

Recommandations pour la vérification de modèles d'éléments finis en géotechnique

Philippe MESTAT

Directeur de recherche
Chef de la section Calcul des ouvrages géotechniques
Division Mécanique des sols et des roches et géologie de l'ingénieur

Pierre HUMBERT

Directeur de recherche
Chef de la section Modèles numériques
Service Modélisation pour l'ingénieur

Alain DUBOUCHET

Chargé de recherche
Section Modèles numériques
Service Modélisation pour l'ingénieur
Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

RÉSUMÉ

Cet article propose quelques recommandations pour la vérification des résultats des calculs par éléments finis en géotechnique. Celles-ci concernent à la fois l'analyse du déroulement d'un calcul (processus de résolution incrémental et itératif, tests de convergence) et l'analyse des résultats obtenus (déplacements, contraintes, pressions interstitielles, efforts et moments dans les structures). Ces recommandations sont fondées sur le respect des équations de la mécanique des milieux continus et sur la cohérence des hypothèses de modélisation retenues par le chercheur ou l'ingénieur. Un exemple de modélisation complexe avec plusieurs phases de construction (exemple du rempiètement d'un quai) constitue une application représentative de ces recommandations.

MOTS CLÉS : 40 - Éléments finis (méthode) - Recommandation - Modèle mathématique - Mécanique des sols - Calcul - Ouvrage d'art (gén.) - Mur - Quai.

Introduction

L'utilisation croissante de la modélisation numérique dans les études d'ouvrages confère un rôle important aux résultats des calculs par la méthode des éléments finis (déplacements, contraintes, pressions interstitielles, moments, efforts, débits, températures, etc.). Leur fiabilité doit être raisonnablement satisfaisante. Pour s'en assurer, il convient d'avoir confiance dans le code de calcul employé, de poser avec soin les nécessaires hypothèses de calcul, de procéder avec minutie à l'élaboration du modèle d'éléments finis et à la détermination des paramètres, et enfin de vérifier, tant que faire se peut, les résultats du calcul. Dans cette analyse, il faut bien distinguer ce qui ressort :

- d'une part, de la justification du modèle (le modèle réalisé et ses paramètres sont capables de décrire tout ou partie de la réalité observée) ;
- et, d'autre part, de la vérification des résultats (la solution obtenue est conforme aux hypothèses de calcul).

La vérification ne consiste donc pas à valider le modèle en tant que tel, ni à juger la conception du modèle d'éléments finis et encore moins à contrôler la détermination des paramètres. L'objectif est plus modeste ; il s'agit de « prouver » que les résultats de calcul sont corrects et conformes aux hypothèses de la modélisation.

La facilité de mise en œuvre des logiciels de calcul par éléments finis et le perfectionnement des contrôles internes dans les pré-processeurs sont aujourd'hui des facteurs de qualité. Mais lors de la mise en données, l'utilisateur intervient toujours directement à de nombreux niveaux. Les risques d'erreur involontaire (de type faute de frappe) ou consécutive à une ambiguïté dans l'utilisation du logiciel restent élevés. Lorsqu'une erreur entraîne l'échec brutal du calcul (résultats irréalistes, division par zéro, divergence), il est généralement aisé de la déceler et de

modifier les données ou le modèle. En revanche, lorsque le calcul aboutit à des résultats *a priori* plausibles, il est impossible de prouver que ceux-ci sont satisfaisants puisqu'on ne connaît pas la solution exacte du problème. On ne peut conclure au bon déroulement du calcul qu'à partir d'un ensemble d'indications ponctuelles et d'estimateurs *a posteriori*. Tout l'enjeu de la vérification est là. La connaissance des contrôles systématiques qu'il est possible de faire et des principaux types d'erreur susceptibles de compromettre une modélisation en géotechnique devrait aider les ingénieurs et les chercheurs à apprécier à leur juste valeur les résultats d'un calcul.

Types d'erreur dans une modélisation par éléments finis

Il est habituel de distinguer dans une **erreur de calcul** deux types d'erreur : **l'erreur de modèle** et **l'erreur de discrétisation** (voir, par exemple, Kurowski et Szabo, 1997). Cette description est intéressante, mais il convient d'ajouter **l'erreur de données** et **l'erreur de convergence** qu'on se propose de traquer par la vérification. Pour cela, on suppose que le logiciel est bien validé et a été jugé apte à effectuer des calculs en géotechnique : c'est-à-dire qu'il ne présente pas de bogues ni de dysfonctionnement pour les calculs de géotechnique. On définit alors les cinq types d'erreur relative suivants :

■ **l'erreur de discrétisation** est due à la technique des éléments finis (méthode de résolution approchée, algorithmes utilisés, procédures itératives ou par pas de temps pour les problèmes d'évolution) et à sa mise en œuvre par un utilisateur (hypothèses de calcul, type d'analyse et d'éléments, élaboration du maillage, raffinement et autres choix faits par le géotechnicien et l'ingénieur chargé des calculs). Elle est définie par le rapport :

$$e_{\text{discrétisation}}^i = \frac{\|u_{\text{EF}}^i - u_{\text{th}}\|_1}{\|u_{\text{th}}\|_1} ;$$

■ **l'erreur de convergence** ne concerne que les problèmes de comportement non linéaire et la résolution par une technique itérative. Elle est due soit à un découpage inapproprié du chargement, soit à des données inadaptées pour les algorithmes de résolution. Elle exprime l'écart qui existe entre la solution obtenue à une certaine itération *i* et la solution convergée (limite de la suite des inconnues) :

$$e_{\text{convergence}} = \frac{\|u_{\text{EF}}^i - u_{\text{EF}}\|_1}{\|u_{\text{EF}}\|_1} ;$$

■ **l'erreur de modèle** liée au modèle théorique censé décrire tout ou partie des phénomènes observés. Cette erreur dépend des équations mathématiques du modèle et des incertitudes de mesure, mais non de la méthode

de résolution employée pour obtenir des valeurs numériques. On la définit par le rapport suivant :

$$e_{\text{modèle}} = \frac{\|u_{\text{th}} - u_{\text{exp}}\|_2}{\|u_{\text{exp}}\|_2} ;$$

■ **l'erreur de calcul** est l'erreur constatée à la fin du calcul. Elle est la combinaison des erreurs précédentes et se définit également par référence à la solution réelle :

$$e_{\text{calcul}} = \frac{\|u_{\text{EF}}^i - u_{\text{exp}}\|_2}{\|u_{\text{exp}}\|_2} ;$$

où u_{exp} est le vecteur des valeurs mesurées (solution réelle) ; u_{EF}^i , les valeurs correspondantes obtenues par le calcul arrêté à une itération *i* d'un incrément donné ; u_{EF} , le vecteur de la solution exacte du problème d'éléments finis ; u_{th} , le vecteur de la solution exacte du problème théorique (solution des équations différentielles et des conditions aux limites).

La représentation $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne ($\|x\| = \sqrt{x_i x_i}$). L'indice 1 accolé au symbole de la norme indique que celle-ci opère sur l'espace vectoriel de l'ensemble des degrés de liberté du maillage et l'indice 2, que la norme s'applique à un espace vectoriel de dimension réduite au nombre de valeurs mesurées.

Toutes ces définitions sont intéressantes au plan mathématique et représentent bien les différents types d'erreur. Malheureusement, dans la pratique courante, elles ne servent à rien puisqu'on ne dispose pas de mesures et qu'on ignore la solution théorique du problème. On ne connaît que les résultats numériques (u_{EF}^i) de l'itération *i*, éventuellement pour différents maillages. Les différentes erreurs sont donc jugées de manière qualitative faute de références. La vérification consiste donc essentiellement à effectuer des contrôles systématiques.

À ces erreurs « mathématiques », il convient d'ajouter **l'erreur de données** provoquée par des caractéristiques de calcul erronées (fautes de frappe, mauvaise estimation des paramètres mécaniques et/ou hydrauliques). On ne peut la quantifier directement comme les erreurs précédentes : un calcul avec des valeurs d'entrée fausses peut être juste. Cette erreur est donc difficilement décelable à moins de connaître la solution (ou une solution approchée) et de la calculer par ailleurs avec les véritables valeurs d'entrées ou à moins que les valeurs erronées n'entraînent l'échec du calcul. Le tableau I fournit des exemples d'erreurs de données.

Une part des vérifications des données peut être réalisée au niveau du générateur de données (pré-processeur), si celui-ci est pourvu de contrôles internes qui analysent les valeurs des paramètres physiques et les comparent avec des plages de variation connues. Les autres vérifications sont facilitées par des représentations graphiques et l'affichage de valeurs après saisie. C'est notamment le cas pour contrôler :

TABLEAU I
Exemples de données pouvant entraîner une erreur

- mauvaise valeur pour les paramètres des modèles (lois de comportement, d'interfaces, de couplage, etc.),
- valeur impossible pour un paramètre de comportement (par exemple : module d'Young ou coefficient de Poisson négatifs, angle de frottement supérieur à 60 degrés, etc.),
- nombre d'incrément trop petit ou accroissements de chargement trop forts,
- nombre d'itérations trop faible, tolérance trop forte pour les tests de convergence,
- inadaptation des pas de temps pour un problème d'évolution,
- choix d'une méthode de résolution incompatible avec la loi de comportement retenue (ce peut être le cas pour des lois d'écoulement plastique non associées),
- données implicites dans le code incompatibles avec le calcul souhaité par l'utilisateur (par exemple, nombre de sous-pas d'intégration par défaut trop faible),
- etc.

- les valeurs de l'état initial dans le massif de sol (mécanique et hydraulique) ;
- la direction, la position et l'intensité des sollicitations appliquées ;
- la localisation des conditions aux limites et des liaisons entre structures ;
- la carte des propriétés matérielles (limites entre les matériaux) ;
- l'enchaînement des séquences de construction ;
- etc.

L'exemple présenté dans le paragraphe « Exemple de modélisation du rempiètement d'un mur de quai » illustre la démarche proposée.

Erreur de convergence

Cette erreur est naturellement rattachée à l'étude de la suite des déplacements solution du problème en comportement non linéaire (Mestat, 1998) :

$$\Delta u_{EF}^i = u_{EF}^i - u_{EF}^{i-1} = -[K_i]^{-1} R(u_{EF}^{i-1})$$

où $R(u_{EF}^{i-1})$ représente le vecteur des forces résiduelles à l'itération i , qui exprime la différence entre les forces appliquées et les efforts internes dus aux contraintes. Le vecteur u_{EF}^i représente les déplacements à l'itération i d'un incrément de chargement donné et la matrice $[K_i]$, la matrice de rigidité calculée au même instant ou non.

Le test de convergence sur la suite des déplacements à l'itération i s'écrit :

$$\frac{\|u_{EF}^i - u_{EF}^{i-1}\|_1}{\|u_{EF}^{i-1}\|_1} \leq \varepsilon$$

où ε est la tolérance fixée par l'utilisateur (généralement égale à 0,1 %).

On définit également la suite des taux de convergence :

$$q_i = \frac{\|\Delta u_{EF}^i\|_1}{\|u_{EF}^{i-1}\|_1}. \text{ Lorsque le problème d'éléments finis}$$

est bien posé et que la suite des déplacements converge, on observe la plupart du temps que la suite des taux de convergence est monotone décroissante. Lorsque de plus elle tend vers une limite strictement inférieure à l'unité, la suite est « absolument convergente » (au sens mathématique du terme). Notre expérience montre que la limite de la suite des taux de convergence est fréquemment comprise entre 0,8 et 0,99 pour peu qu'une plasticité relativement étendue se soit développée (Mestat, 1998). Dans ces conditions, un calcul simple aboutit à l'inégalité :

$$\|u_{EF} - u_{EF}^i\|_1 \leq \frac{q_i}{1 - q_i} \|\Delta u_{EF}^i\|_1$$

La combinaison avec le test de convergence conduit aux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} e_{\text{convergence}} &= \frac{\|u_{EF} - u_{EF}^i\|_1}{\|u_{EF}^i\|_1} \leq \frac{q_i}{1 - q_i} \frac{\|\Delta u_{EF}^i\|_1}{\|u_{EF}^i\|_1} \\ &\leq \frac{q_i}{1 - q_i} \frac{\|u_{EF}^{i-1}\|_1}{\|u_{EF}^i\|_1} \varepsilon \end{aligned}$$

En décomposant le dernier terme de ces inégalités, on fait apparaître les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\|u_{EF}^{i-1}\|_1}{\|u_{EF}^i\|_1} &= \frac{\|u_{EF}^{i-1}\|_1}{\|u_{EF}^i\|_1} \frac{\|u_{EF}^i\|_1}{\|u_{EF}^i\|_1} = \frac{\|u_{EF}^{i-1}\|_1}{\|u_{EF}^i\|_1} \\ &= \left(\frac{\|u_{EF}^i - u_{EF} + u_{EF}^{i-1}\|_1}{\|u_{EF}^i\|_1} \right) \leq \frac{1 + e_{\text{convergence}}}{1 - \varepsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{puisque } \frac{\|u_{EF}^{i-1}\|_1}{\|u_{EF}^i\|_1} &= \left(\frac{\|u_{EF}^{i-1} - u_{EF}^i + u_{EF}^i\|_1}{\|u_{EF}^i\|_1} \right) \\ &\leq 1 + \frac{\|u_{EF}^{i-1} - u_{EF}^i\|_1}{\|u_{EF}^i\|_1} \frac{\|u_{EF}^i\|_1}{\|u_{EF}^i\|_1} \leq 1 + \varepsilon \frac{\|u_{EF}^{i-1}\|_1}{\|u_{EF}^i\|_1}. \end{aligned}$$

D'où finalement l'inégalité :

$$e_{\text{convergence}} \leq \frac{q_i}{1 - q_i} \left(\frac{1 + e_{\text{convergence}}}{1 - \varepsilon} \right) \varepsilon.$$

La quantité $(1 - q_i - \varepsilon)$ est généralement positive dès que les conditions sur la suite des taux de convergence sont satisfaites (décroissance monotone et convergence vers une quantité strictement inférieure à l'unité) et que la tolérance ε est prise égale à 0,1 %. On en déduit alors un majorant de l'erreur de convergence en fonction de la tolérance fixée par l'utilisateur :

$$e_{\text{convergence}} \leq \frac{q_i \varepsilon}{1 - q_i - \varepsilon}$$

Erreur de discrétisation

La réalisation d'un maillage nécessite de nombreuses étapes et souvent la manipulation de plusieurs sous-maillages qu'il faudra ensuite assembler. Des erreurs peuvent être commises à tous les niveaux (tableau II). La plupart des logiciels du commerce disposent aujourd'hui d'un mailleur d'éléments finis performant qui réalise automatiquement nombre d'opérations. C'est généralement une bonne garantie, mais son emploi nécessite tout de même des options de vérification du maillage afin d'avertir l'utilisateur de la présence d'éléments aux géométries trop irrégulières, de vides non voulus, de manques de liaison, de mauvais raccordements, etc.

TABLEAU II
Exemples d'actions pouvant entraîner une erreur de discrétisation

- choix d'éléments finis inadaptés (géométrie trop élancée, angle au sommet trop important, cisaillement mal décrit par l'élément choisi, degré d'interpolation insuffisant, etc.),
- assemblage sans précaution des éléments avec des degrés de liberté différents (poutres et massifs bidimensionnels, coques et massifs tridimensionnels),
- assemblage des sous-maillages avec des frontières discrétisées de manière différente,
- assemblage en laissant des nœuds sans liaison suffisante dans le maillage,
- maillage avec une densité insuffisante dans les régions les plus sollicitées, autour des structures, des inclusions ou des cavités,
- maillage trop grossier au voisinage d'éléments d'interface ou aux frontières séparant des couches de rigidité différente (discontinuité brutale),
- gestion incorrecte des raccordements entre éléments d'interface et éléments de massif : arrêt ou intersection des lignes (en 2D) ou des plans (en 3D) d'interface. Pour faciliter cette gestion délicate, le pré-processeur peut proposer un superélément spécial et paramétrable (par exemple le « motif » de sol renforcé par des armatures prévu dans le pré-processeur MAX2D de CÉSAR-LCPC),
- etc.

Lorsque le maillage est réalisé dans les règles de l'art, il n'y a pas à attendre d'erreur grossière au sens usuel (voir, par exemple : Mestat, 1997 ; Mestat et al., 1999a ; 1999b ; 1999c). Du point de vue mathématique, il n'est pas possible de calculer l'erreur de discrétisation telle qu'elle est définie puisqu'on ne connaît pas la solution théorique du problème traité. Toutefois, qualitativement, on sait que cette erreur reflète le caractère approché de la méthode des éléments finis et la nature itérative des procédures mises en jeu simultanément :

- une discrétisation spatiale du domaine géométrique représentatif de l'ouvrage et de son environnement (maillage). Lorsque le maillage devient de plus en plus fin, la solution donnée par le calcul tend vers une limite très proche de la solution exacte du problème. La convergence au sens du maillage est assurée par le choix et la formulation mathématique des éléments finis. Des problèmes spécifiquement numériques peuvent toutefois venir perturber ou ruiner les résultats lorsque les nombres manipulés deviennent très grands ou très faibles ;
- un processus de résolution incrémental et itératif si les lois de comportement des matériaux sont non linéaires ;

➤ un schéma d'intégration locale si les lois de comportement sont définies sous une forme différentielle ou implicite. Ce schéma permet le calcul des contraintes et des quantités non linéaires (déformation plastique, écrouissage) compatibles avec l'expression des lois de comportement. Les paramètres de ces schémas ne sont généralement pas accessibles à l'utilisateur. Il faut faire confiance à la programmation et à la description qui doit figurer dans la documentation du logiciel (manuel théorique).

La qualité de la solution dépend de ces procédures et de leurs interactions. En pratique, un utilisateur averti est capable de construire du premier coup un maillage bidimensionnel suffisamment fin pour donner des résultats satisfaisants. La puissance des logiciels et des ordinateurs est aujourd'hui telle que les modèles réalisés sont fréquemment surabondants en termes de nœuds et d'éléments finis. Le chiffre de 2 000 nœuds est rapidement atteint pour des calculs bidimensionnels de type élastoplastique (sans couplage hydromécanique). L'erreur prédominante est alors celle liée à la convergence du processus de résolution itératif (Mestat, 1998). Tous les cas de validation que nous avons traités montrent qu'avec un maillage « moyennement fin », on arrive à des résultats très proches des solutions théoriques connues (voir par exemple : Mestat, 1994).

D'un point de vue pratique, l'erreur de discrétisation peut être « visualisée » en représentant les isovaleurs des gradients dans les zones les plus sollicitées (contraintes, déformations) ou sur les interfaces (contraintes normales et tangentielles). Lorsque les contours des isovaleurs ne présentent pas une allure régulière, cela signifie que le maillage n'est pas suffisamment raffiné dans ces régions. C'est un critère très qualitatif (voire subjectif), mais il est généralement pertinent et efficace.

D'après notre expérience, c'est surtout pour les problèmes d'interface entre solides (bidimensionnel et *a fortiori* tridimensionnel) qu'une variante raffinée du maillage peut être nécessaire au voisinage des zones de contact. De toute façon, l'utilisateur doit se poser la question du raffinement lorsqu'il traite un problème d'interactions. Enfin, tout problème tridimensionnel demeure délicat à résoudre car on reste encore très limité en nombre de nœuds et d'éléments finis. L'erreur de discrétisation n'est donc plus négligeable et la construction du maillage mérite toute l'attention de l'utilisateur. L'expérience numérique montre également que plus les lois de comportement des sols sont compliquées, plus il convient de raffiner le maillage.

Il est à noter que, dans le cas d'un comportement linéaire, la solution théorique est « encadrée » entre la solution obtenue par une approche de type déplacements (les inconnues du problème d'éléments finis sont les déplacements) et celle fournie par une méthode d'équilibre (les inconnues sont les forces aux nœuds). Par ailleurs, se développent depuis quelques années des « indicateurs » qui, en examinant la continuité de certaines variables secondaires (contraintes, déforma-

tions, énergies), fournissent des estimations des erreurs dues au maillage. Les aspects théoriques sont bien avancées mais les applications restent limitées au domaine de l'élasticité linéaire. Il est encore trop tôt pour profiter pleinement de ces nouveaux outils dans les modèles propres à la géotechnique. En revanche, lorsque les délais de l'étude et la puissance de l'ordinateur le permettent, on peut toujours recourir à des études paramétriques sur la densité du maillage.

Erreur de modèle et erreur de calcul

L'erreur de modèle est liée directement aux choix effectués par le responsable de l'étude tant en ce qui concerne le type d'analyse (statique, cyclique, dynamique, calcul drainé, calcul non drainé, couplage hydro-mécanique, etc.) que les lois de comportement des matériaux (élasticité linéaire, isotrope ou anisotrope, élastoplasticité parfaite, élastoplasticité avec écrouissage, élasto-viscoplasticité). Pour les sols, on imagine bien que l'erreur de modèle sera plus grande pour l'élasticité linéaire que pour l'élastoplasticité parfaite. D'une manière plus générale, l'erreur de modèle croît dans la proportion où des phénomènes physiques importants sont négligés dans la modélisation et où les hypothèses de calcul deviennent incohérentes avec la réalité du projet et de son environnement (tableau III). Ainsi, même lorsque les erreurs de données et de discrétisation sont faibles, l'erreur de modèle peut rester très grande. Il est évident qu'il ne servira à rien de raffiner à l'extrême le maillage d'un calcul en élasticité linéaire si le modèle de sol n'est pas correct.

TABLEAU III
Exemples de choix pouvant entraîner une erreur de modèle

- modèle bidimensionnel alors que les phénomènes sont tridimensionnels,
- hypothèse d'un sol monophasique,
- loi de comportement trop simplifiée (par exemple : élasticité pour un sol),
- phénomène physique important négligé (interaction sol-structure, mouvement de l'eau, effet du temps, etc.),
- phénomène de décollement empêché,
- absence d'interface (mauvaises conditions de liaison entre les matériaux ou les structures),
- loi de chargement inappropriée (par exemple : phasage des travaux trop simplifié),
- etc.

L'erreur de modèle est estimée en comparant les comportements théorique et observé, lorsque l'on dispose de mesures obtenues sur l'ouvrage ou au cours d'un essai de reconnaissance : c'est le problème de la validation du modèle. Cette erreur traduit l'écart maximal entre les valeurs de certaines variables prévues par la théorie (déplacements, pressions interstitielles, rotations, efforts dans les structures, etc.) et celles qui ont été mesurées. Malheureusement, on ignore la solution théorique ; on ne connaît que la solution donnée par les éléments finis. Si l'erreur de modèle ne peut être évaluée rigoureusement, il est possible d'en trouver un majorant en utilisant l'inégalité triangulaire sur les normes :

$$\begin{aligned} e_{\text{modèle}} &= \frac{\|u_{\text{th}} - u_{\text{exp}}\|_2}{\|u_{\text{exp}}\|_2} \\ &\leq \frac{\|u_{\text{th}} - u_{\text{EF}}^i\|_2 + \|u_{\text{exp}} - u_{\text{EF}}^i\|_2}{\|u_{\text{exp}}\|_2} \\ &\leq \frac{\|u_{\text{th}} - u_{\text{EF}}^i\|_2}{\|u_{\text{th}}\|_2} \cdot \frac{\|u_{\text{th}}\|_2}{\|u_{\text{exp}}\|_2} + e_{\text{calcul}} \end{aligned}$$

Le terme $\frac{\|u_{\text{th}} - u_{\text{EF}}^i\|_2}{\|u_{\text{th}}\|_2}$ représente l'erreur de discrétisation sur l'espace vectoriel réduit aux valeurs mesurées. Par ailleurs, nous avons aussi l'inégalité suivante :

$$\frac{\|u_{\text{th}}\|_2}{\|u_{\text{exp}}\|_2} \leq \frac{\|u_{\text{th}} - u_{\text{exp}}\|_2 + \|u_{\text{exp}}\|_2}{\|u_{\text{exp}}\|_2} \leq 1 + e_{\text{modèle}}$$

Si le maillage est suffisamment fin, l'erreur de discrétisation est logiquement plus faible que l'unité et on obtient finalement le majorant cherché :

$$e_{\text{modèle}} \leq \frac{e_{\text{calcul}} + \frac{\|u_{\text{th}} - u_{\text{EF}}^i\|_2}{\|u_{\text{th}}\|_2}}{1 - \frac{\|u_{\text{th}} - u_{\text{EF}}^i\|_2}{\|u_{\text{th}}\|_2}}$$

En partant de la définition de l'erreur de calcul, des développements similaires permettent de mettre en évidence un minorant. On aboutit finalement à l'encadrement suivant :

$$\begin{aligned} \frac{e_{\text{calcul}} - \frac{\|u_{\text{th}} - u_{\text{EF}}^i\|_2}{\|u_{\text{th}}\|_2}}{1 + \frac{\|u_{\text{th}} - u_{\text{EF}}^i\|_2}{\|u_{\text{th}}\|_2}} &\leq e_{\text{modèle}} \\ &\leq \frac{e_{\text{calcul}} + \frac{\|u_{\text{th}} - u_{\text{EF}}^i\|_2}{\|u_{\text{th}}\|_2}}{1 - \frac{\|u_{\text{th}} - u_{\text{EF}}^i\|_2}{\|u_{\text{th}}\|_2}} \end{aligned}$$

Cela montre que, pour des maillages raisonnablement fins, l'erreur de modèle est proche de l'erreur de calcul. Ce dont on pouvait se douter. De manière plus quantitative, les articles de synthèse sur la confrontation calculs-mesures donnent des indications sur l'erreur de calcul, donc sur l'erreur de modèle. Les confrontations les plus intéressantes concernent bien sûr les concours de prévisions à l'aveugle (Mestat et Riou, 1999 ; Mestat, 2001). Le tableau IV présente les erreurs estimées lors de ces concours, tous modèles de calcul confondus.

Ces confrontations ont montré que les modèles de prévision utilisés aujourd'hui en géotechnique ne sont pas capables de représenter l'ensemble des phénomènes mesurés. Plus il y a de mesures, plus la confrontation

TABLEAU IV
Erreurs de calcul relatives estimées d'après les résultats de concours
de prévisions en aveugle, tous modèles de calcul confondus (Mestat et Riou, 1999)

Ouvrage	n*	Erreur relative sur les déplacements	Autres comparaisons
Remblais d'Haarajoki (Finlande)	6-5	Tassement instantané : 0,8 - 3 Tassement à 18 mois : 0,4 - 2,7	Pression interstitielle instantanée : selon point de mesure (0,2 - 0,7), (0 - 1,0), (0,05 - 0,1) Pression interstitielle à 18 mois : (0,2 - 0,7), (0,1 - 0,9), (0 - 0,2)
Remblai de Muar Flats (Malaisie)	4	Tassement à court terme : 0,6 - 1,8 Déplacement horizontal : 0,4 - 4,7	Hauteur de rupture : 0 - 0,4 Pression interstitielle : 0,1 - 0,6
Remblai de Gloucester (Canada)	13	Tassement à long terme : selon point de mesure 0,5 - 1,5	Pression interstitielle : 0,5 Déplacements horizontaux : 0,9
Remblai du MIT (Boston, États-Unis)	10	Tassement : 0,1 - 19 Déplacement horizontal : > 0,95 - 4	Pression interstitielle : 0,6 - 1,3 Hauteur de rupture : 0,5 - 0,6
Ouvrage de soutènement et géotextiles (Denver, États-Unis)	15	Tassement maximal en surface : sable : 0,6 - 0,9 argile : 0,7 - 1,7	Surcharge de rupture : sable : > 0,9 - 1,3 argile : > 0 - 0,9
Rideau de palplanches de Hochstetten (Allemagne)	43	Pour la dernière phase : – tassement max. derrière l'ouvrage : 0 - 5 – dépl. latér. de l'écran à mi-hauteur : 0,5 - 3	Pour la dernière phase : – moment max. dans l'écran : 0 - 2,5
Fondations superficielles FHWA (Austin, États-Unis)	31	Tassement : 0,4 - 0,7	Charges de rupture : 0,7 - 1,1

* n : nombre de participants au concours de prévisions.

calculs-mesures est pauvre et plus l'erreur de modèle a des chances d'être importante. Par exemple, dans le cas des remblais sur sols compressibles, les tassements dans l'axe du remblai sont généralement bien prévus ; en revanche, les déplacements latéraux en pied sont surévalués. De même, pour les ouvrages souterrains, les tassements en surface sont bons mais la largeur de la cuvette de tassement est fréquemment surévaluée. Enfin, il ne faut pas oublier non plus que l'erreur de modèle dépend de la qualité de l'instrumentation et des mesures effectuées.

En pratique, l'erreur de modèle s'apprécie qualitativement au moment de la justification des hypothèses de calcul. C'est là que l'utilisateur doit prendre conscience des limites du modèle qu'il est en train d'élaborer. Pour sa part, l'erreur de calcul peut s'évaluer par référence aux ordres de grandeur connus pour des ouvrages et des sols similaires.

Dans la suite de cet article, on présente une approche pour la vérification des résultats d'un calcul qui permet d'estimer qualitativement les erreurs de discrétisation et de données : c'est-à-dire les erreurs qui sont directement de la responsabilité de l'équipe chargée du calcul, et non celles qui relèvent des concepteurs de la théorie, de sa traduction informatique ou encore des choix effectués par les géotechniciens associés à l'étude.

Principes de vérification des résultats à l'aide d'un post-processeur

Le post-processeur d'un code de calcul par éléments finis offre plusieurs possibilités de vérification des résultats. La combinaison de diverses représentations

graphiques (carte d'isovaleurs, courbes de variation, coupes diverses, etc.) permet d'effectuer les vérifications essentielles concernant :

- la cohérence globale des résultats. Une vue de la déformée du maillage suffit généralement à contrôler les conditions aux limites en déplacements, le respect des symétries et la cinématique d'ensemble. La cohérence se vérifie par référence à des comportements mécaniques « systématiques », par exemple : une compression entraîne un tassement, toute excavation a tendance à se refermer sur elle-même, les singularités engendrent des concentrations de contraintes, etc. ;
- les dimensions du maillage, qui doivent être suffisantes pour décrire correctement les mécanismes de déformation. En particulier, loin de l'application des sollicitations, le champ de contraintes doit être proche du champ initial et les déplacements très faibles. L'apparition de points plastiques aux limites géométriques du maillage doit être expliquée ;
- la continuité des déplacements, des vecteurs-contraintes et des réactions. En particulier, les contraintes normales doivent être quasiment nulles sur un bord libre, ou négligeables devant la contrainte maximale dans le modèle. Sur les frontières à pression ou force imposée, on doit également retrouver l'équilibre des vecteurs-contraintes. De même, l'intégration des contraintes normales ou tangentielles doit permettre de retrouver des quantités connues (par exemple le poids des structures et les surcharges ou le poids des zones de sol situées au-dessus) ;
- le comportement aux interfaces (justification des décollements, vérification du critère de Coulomb, etc.) ;
- la satisfaction des tests de convergence (locaux et globaux) et le bon déroulement du processus itératif

(pas de variations bizarres mais une décroissance régulière vers zéro des quantités qui caractérisent la convergence) ;

- l'estimation *a posteriori* des erreurs de calcul ;
- la stabilité du schéma de résolution au cours du temps ;
- l'ordre de grandeur des résultats. Les mouvements autour des ouvrages peuvent être comparés aux ordres de grandeur observés couramment et aux formules empiriques établies sous certaines conditions ;
- la vérification de la carte des critères de plasticité sur l'ensemble du maillage et l'ordre de grandeur des déformations plastiques. Une large zone dans laquelle la norme du tenseur de déformation plastique dépasse 1 % doit inquiéter l'utilisateur ;
- etc.

Pour les calculs en conditions de projet, il est primordial que l'utilisateur examine l'ensemble des résultats obtenus. La vérification du modèle de calcul concerne ainsi l'ensemble des résultats caractéristiques, qui sont généralement comparés aux valeurs mesurées sur des

ouvrages types similaires : tassements en surface ou mouvements du sol en profondeur autour des excavations, pression des terres, efforts dans les structures, etc. La comparaison avec d'autres méthodes de calcul propres à la géotechnique est également conseillée ; même si ces méthodes traditionnelles sont relativement limitées et souvent empiriques, elles sont bien adaptées pour les ouvrages courants.

Dans une modélisation avec des calculs enchaînés, il ne suffit pas d'examiner les résultats de la dernière phase. Il faut impérativement vérifier entre autres que les tests de convergence sont satisfaits à la fin de chaque phase de calcul. En effet, des erreurs de données (chargements, conditions aux limites) et le non-respect des tests de convergence peuvent se glisser dans une phase intermédiaire. Par ailleurs, si la tolérance sur les tests est trop élevée, il y a un risque d'obtenir de mauvais résultats (déséquilibre global du système ou non respect des équations de comportement).

Pour aider l'utilisateur, le tableau V regroupe une liste de questions qu'il doit se poser au cours de l'analyse

TABLEAU V
« Check list » pour la vérification *a posteriori* d'un modèle de calcul

Type de contrôle	Vérifications (questions à se poser)
Vérification : finesse et étendue du maillage, conditions aux limites Moyens : analyse des mouvements, des variations de contraintes et de leurs concentrations	L'allure générale de la déformée du maillage est-elle réaliste ? Les ordres de grandeur des déplacements sont-ils acceptables ? Les isovaleurs présentent-elles une allure régulière et continue dans les zones de fortes sollicitations ? Le mécanisme de déformation touche-t-il les frontières du maillage ? Loin des sollicitations, les mouvements sont-ils négligeables ? Les concentrations de contraintes correspondent-elles aux singularités géométriques ou à des changements de matériaux ? Si un critère de plasticité est considéré, les concentrations sont-elles bien limitées par le critère ? Le calcul des réactions est-il correct ? Loin des sollicitations, le champ de contraintes est-il bien proche du champ de contraintes initial dans le sol ? Près des interfaces ou des changements de matériaux, la continuité des vecteurs-contraintes est-elle assurée ? Les contraintes normales sont-elles quasiment nulles ou très faibles sur les bords libres ?
Vérification : chargement Moyens : continuité des vecteurs-contraintes, intégration des contraintes normale et tangentielle	La déformée du maillage est-elle cohérente avec le chargement imposé par l'utilisateur ? Une compression provoque-t-elle bien un tassement et une traction un soulèvement ? Si la sollicitation est un déchargement, l'état de contraintes diminue-t-il ? Inversement, augmente-t-il pour un chargement ? La continuité du vecteur-contraintes est-elle vérifiée sous les points d'application des charges ? Retrouve-t-on le poids des structures et/ou les surcharges par intégration des contraintes normales à leur base ? Après application de la méthode convergence-soutènement, les vecteurs-contraintes en paroi sont-ils proportionnels au complément des forces de déconfinement par rapport à l'état initial (ou à l'état précédent) ?
Vérification : loi de chargement Moyens : courbes charge-tassement	Les courbes charge-tassement caractéristiques du problème étudié sont-elles régulières ? S'il y a des variations brutales, sont-elles cohérentes avec la loi de chargement ? Si l'on observe un palier prononcé, peut-il s'expliquer par la formation d'une zone de rupture ? Mêmes questions pour les courbes d'évolution dans le temps. Pour un phasage de travaux, chaque phase a-t-elle bien convergé ?
Vérification : méthode de résolution Moyens : tests de convergence, zones plastiques	Les tests de convergence sont-ils satisfaits à la tolérance fixée par l'utilisateur près ? La suite des normes du vecteur résidu décroît-elle régulièrement sans oscillation ? La suite des taux de convergence a-t-elle tendance à se stabiliser autour d'une valeur strictement inférieure à l'unité ? Les isovaleurs du critère de plasticité sont-elles proches de zéro ? Les isovaleurs de la norme du tenseur des déformations plastiques sont-elles faibles ? S'il y a des valeurs fortes (supérieures à 1 %), forment-elles une zone relativement étendue dans le maillage ? La présence d'une telle zone doit être analysée attentivement.
Vérification : interfaces Moyens : analyse dans les éléments de contact	Dans les zones en glissement, le critère de frottement est-il vérifié ? Dans les zones décollées, la contrainte normale est-elle nulle ou très faible ? Les décollements sont-ils justifiés par les sollicitations appliquées ? Les tests de convergence spécifiques au contact sont-ils bien respectés ?
Vérification : valeurs des paramètres mécaniques Moyens : calcul de tassements et de critères de plasticité	Existe-t-il un problème simplifié que l'on pourrait utiliser pour vérifier l'ordre de grandeur de certains déplacements (par exemple, en élasticité : colonne unidimensionnelle pour une excavation ou cavité en milieu infini pour un ouvrage souterrain) ? L'exemple présenté ci-après illustre cette démarche. Dispose-t-on d'ordres de grandeur issus de mesures ou d'autres calculs ? Dans les zones plastiques, le critère de plasticité est-il bien vérifié ? Les chemins de contraintes dans le plan (p, q) (contrainte moyenne – déviateur des contraintes) sont-ils cohérents avec la loi de chargement ?

des résultats. Si la réponse est « oui » à toutes ces questions, on peut raisonnablement penser que les erreurs de discrétisation et de données sont faibles. Quant à l'erreur de modèle, elle sera faible si la justification du modèle est suffisante et si des essais de qualité sont en nombre approprié pour déterminer les paramètres mécaniques et hydrauliques.

Exemple de modélisation du rempiètement d'un mur de quai

Description du problème étudié

Cette étude exploratoire menée au LCPC avait pour objet d'analyser l'apport de la méthode des éléments finis au dimensionnement du rempiètement d'un mur de quai. Le rempiètement consiste à aménager un ouvrage portuaire existant de manière à augmenter la profondeur de fouille. La diversité des types de quai, combinée à la diversité des contraintes de projet, conduit à une grande variété de solutions de rempiètement. Dans l'exemple considéré, il s'agit du rempiètement d'un mur-poids en maçonnerie par un rideau de palplanches métalliques non ancré (fig. 1).

Le mur de quai en maçonnerie est haut de 10 m, large de 3 m en tête et de 7 m à sa base. Le rempiètement est réalisé à l'aide d'un rideau de palplanches LIIs, mis en place dans le sol par fonçage au niveau du fond de fouille initial. La longueur des palplanches est de 7,30 m. Les niveaux de la nappe phréatique et de la mer sont supposés identiques et situés à 3 mètres sous le terrain naturel.

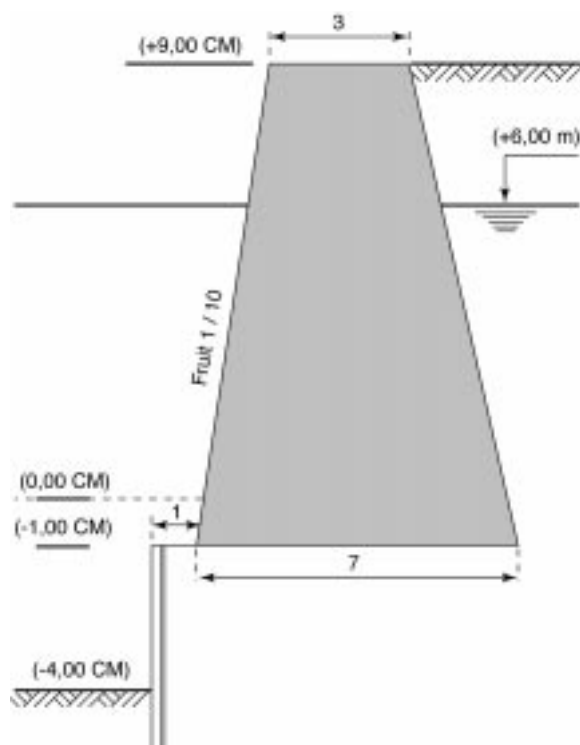


Fig. 1 - Exemple de rempiètement d'un mur-poids par un rideau de palplanches.

Hypothèses de modélisation et simulation de la construction

Le modèle numérique de l'ouvrage rempiété est une représentation forcément simplifiée de la réalité. Les simplifications nécessaires concernent :

- l'histoire de la construction du quai, de manière à estimer par un calcul en plusieurs étapes le champ de contraintes dans le sol avant de simuler le rempiètement ;
- les diverses interactions sol-structures (parement en maçonnerie et rideau de palplanches), sol-fluide et sol-sol ;
- la description du comportement des matériaux (milieu continu en élastoplasticité parfaite).

Le tableau VI regroupe l'ensemble des aspects à prendre en compte pour le calcul en éléments finis et les options de modélisation retenues. Ces hypothèses sont relativement classiques dans les modélisations par éléments finis des ouvrages de soutènement et correspondent à ce qu'il est possible de faire avec les moyens de calcul actuellement disponibles. Le modèle numérique ne permet de décrire que dans une certaine mesure la complexité des interactions sol-fluide-structure qui surviennent dans le problème réel. En particulier, les interactions sol-fluide ont été négligées au profit des interactions sol-structures.

Comme le principe du rempiètement consiste à intervenir sur un ouvrage existant, l'état de contraintes dans le sol avant les travaux est un état de référence et a une grande influence sur les résultats finaux. Cet état de contraintes a été généré par l'histoire de l'ouvrage original depuis sa construction jusqu'au début du rempiètement. Le choix des étapes de construction est donc primordial dans le modèle. Plusieurs possibilités étaient envisageables en fonction des moyens de simulation disponibles. Finalement, le choix s'est porté sur une approche relativement simple, mais plausible, découpée en cinq étapes (tableau VII).

L'étape 6 qui simule le rempiètement de l'ouvrage portuaire comporte elle-même deux parties : la mise en place du rideau de palplanches et l'excavation devant le rideau jusqu'à la cote - 4 m (fig. 1). Pour faciliter la modélisation, ces deux actions sont réalisées simultanément. L'installation du rideau est supposée ne pas perturber l'état des contraintes dans le sol : seules les caractéristiques d'interface entre le sol et le rideau permettent de quantifier l'effet de la mise en place. Autrement dit, la modélisation de l'installation est négligée. L'apparition du rideau dans le maillage est simulée en modifiant brutalement les caractéristiques mécaniques de la colonne d'éléments de massif concernés. Cette opération n'est rigoureuse que si elle prend en compte les déformations dues à ce changement de propriétés mécaniques. Pour ce calcul, ces déformations sont générées de manière itérative en même temps que celles provoquées par l'excavation. Cette approche suppose implicitement que les palplanches sont représentées dans le maillage par une colonne verticale

TABLEAU VI
Hypothèses de calcul (justification et erreur de modèle)

Réalité (ouvrage, environnement)	Modèle mécanique et numérique (hypothèses de calcul)
Géométrie de l'ouvrage : – tridimensionnelle ; – stratification.	Le quai est suffisamment long pour que le calcul soit réalisé en déformation plane. Comme il s'agit d'une étude exploratoire, les couches de sol sont supposées horizontales. Les déformations sont petites.
Matériaux : – sol ; – maçonnerie ; – acier.	A l'échelle du modèle, la maçonnerie est assimilée à un milieu continu, homogène et isotrope. Les résistances de la maçonnerie et de l'acier étant bien supérieures à celles du sol, leur comportement est supposé élastique linéaire et isotrope. En revanche, le sol a un comportement élastoplastique parfait (critère de Mohr-Coulomb). Le sol, le mur en maçonnerie et le rideau de palplanches sont décrits par des éléments finis de massif bidimensionnel (triangles et quadrilatères).
Interactions : – sol-structures ; – sol-sol.	Les interactions sol-structures et sol-sol (étape de remblaiement) sont décrites par un critère de frottement de Coulomb et une résistance à la traction nulle. Le modèle numérique comprend des éléments de contact.
Régime hydraulique et interactions sol-fluide	Le calcul est réalisé en contraintes effectives et le niveau de la nappe est supposé égal de part et d'autre du quai. L'interaction sol-fluide est prise en compte en déjaugant le massif de sol.
État initial	Les contraintes effectives sont initialisées par un calcul de type poids volumique.
Conditions aux limites	Les déplacements horizontaux sur les frontières latérales sont nuls. Les déplacements verticaux à la base du modèle sont également nuls. Les limites sont placées suffisamment loin pour ne pas interférer avec les zones excavées.
Phasage de construction	Une histoire de construction du quai a été choisie : elle comporte 5 étapes avant celle du rempiètement (étape 6 : approfondissement et mise en place du rideau de palplanches). L'effet du temps est négligé.
Mise en place du rideau de palplanches	Pour l'étape 6, le fonçage du rideau dans le sol n'est pas pris en compte. L'installation est simplement simulée par un changement des caractéristiques des éléments finis concernés.

d'éléments de massif ayant une certaine épaisseur, déterminée de manière à conserver la rigidité de flexion du rideau.

Malgré toutes les simplifications considérées par rapport à l'ouvrage réel, l'erreur de modèle nous semble raisonnable et les résultats en contraintes et en déplacements à chaque phase seront représentatifs du fonctionnement général l'ouvrage, comme va le montrer l'analyse suivante.

Maillage d'éléments finis

Le maillage d'éléments finis réalisé est constitué de 1 693 nœuds et de 698 éléments finis (220 quadrilatères à huit nœuds, 434 triangles à six nœuds et 44 éléments d'interface à 6 nœuds) (fig. 2). Ce maillage comprend toutes les zones de matériaux qui vont successivement changer de nature et de propriétés : certaines seront excavées, puis remplacées par le mur, le remblai ou le rideau de palplanches.

L'excavation est simulée par une technique numérique qui transforme la frontière de la zone à excaver en un bord libre par application de forces nodales équivalentes déterminées à partir de l'état des contraintes existant à la fin de l'étape précédente. Le calcul est réalisé avec le progiciel CÉSAR-LCPC (module TCNL : résolution des problèmes de contact entre solides élastoplastiques).

L'origine des coordonnées est prise en tête du mur (côté aval), l'axe vertical est orienté vers le haut et l'axe horizontal vers l'amont. La largeur totale du modèle a été fixée à 140 m (soit 60 m vers l'aval du mur et 77 m vers l'amont) et la hauteur totale à 30 m. Ces limites ont été choisies pour que les frontières extérieures du maillage n'aient pas d'influence sur les champs de déplacements et de contraintes à proximité de l'ouvrage rempiété. Les conditions aux limites sont les suivantes : le déplacement horizontal est nul sur les frontières latérales ($x = -60$ m et $x = +80$ m), ainsi que les déplacements horizontal et vertical sur la frontière inférieure ($y = -30$ m).

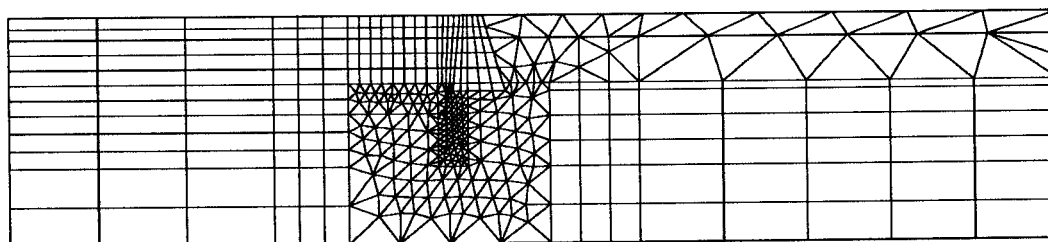
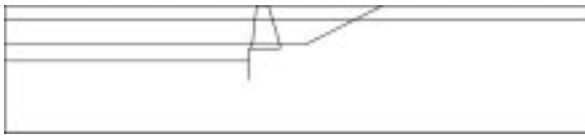
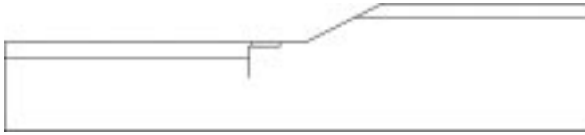
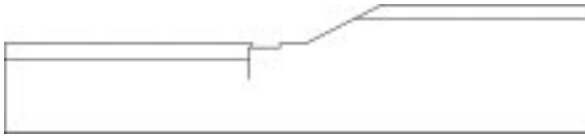
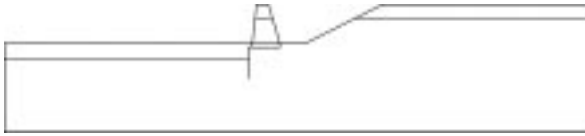
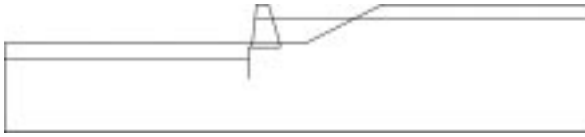
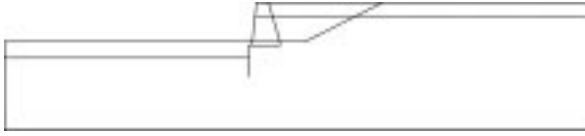


Fig. 2 - Maillage réalisé pour l'étude du rempiètement d'un mur de quai.

TABLEAU VII
Histoire supposée de la construction du mur de quai

Zones du maillage actives	Description des calculs
<p align="center">Étape 0</p> 	Etat initial. Les poids volumiques des couches sont appliqués. Les contraintes effectives horizontales sont égales aux contraintes effectives verticales multipliées par le coefficient K_0 . Les déplacements sont annulés et les contraintes utilisées pour l'initialisation de l'étape 1.
<p align="center">Étape 1</p> 	Excavation du sol selon une pente de un pour trois afin de créer une fouille à la cote - 9 m. Les forces d'écoulement sont négligées.
<p align="center">Étape 2</p> 	Excavation d'une petite zone de sol au fond de fouille pour encastrer le mur sur une hauteur de 1 m. La base du mur repose à - 10 m de la surface.
<p align="center">Étape 3</p> 	Construction du mur jusqu'à son niveau actuel. Activation des éléments finis représentant la maçonnerie et des éléments d'interface sol-parement (sur une hauteur de 1 m).
<p align="center">Étape 4</p> 	Remblaiement arrière jusqu'à la cote - 3 m. Les éléments d'interface entre le mur et le remblai sont activés. Le remblaiement est divisé en deux parties pour faciliter la convergence des calculs.
<p align="center">Étape 5</p> 	Remblaiement arrière jusqu'à la surface du terrain naturel. Cette étape termine la simulation de la construction du mur dans son état avant rempiètement. L'état de contraintes effectives dans le sol représente l'état initial pour le rempiètement (étape 6).

Comportement des matériaux et des interfaces

Le sol est un matériau homogène, cohérent et frottant dont le comportement peut être représenté par un critère de Mohr-Coulomb, un potentiel plastique et une élasticité linéaire et isotrope. Les valeurs du module d'Young (E'), du coefficient de Poisson (ν'), de l'angle de frottement interne (φ'), de la cohésion (c') et de l'angle de dilataance (ψ) sont indiquées dans le tableau VIII.

L'angle de dilataance est supposé égal à l'angle de frottement interne, autrement dit la loi d'écoulement plastique est supposée associée. Cette hypothèse n'est généralement pas vérifiée par le comportement des sols, pour lesquels on observe des angles de dilataance beaucoup plus faibles que l'angle de frottement. Toutefois, elle est apparue nécessaire dans le cadre de cette étude exploratoire, car la non-associativité ($\psi < \varphi$)

TABLEAU VIII
Caractéristiques des matériaux pour la modélisation

Matériau	γ (kN/m^3)	E' (MPa)	ν'	c' (kPa)	φ' (°)	ψ (°)
Sol	20	90	0,3	30	30	30
Maçonnerie	24	20 000	0,2	–	–	–
Palplanches	75	210 000	0,2	–	–	–

implique souvent des temps de calcul importants. Cette simplification n'est envisageable que pour ce type d'étude exploratoire. Le sol employé en remblai est supposé identique au sol en place.

La valeur du coefficient de pression des terres au repos K_0 est prise égale à 0,4286. Cette valeur correspond à l'initialisation des contraintes effectives par l'application du poids volumique des terrains : en élasticité, la

valeur de K_0 est reliée à celle du coefficient de Poisson

$$(K_0 = \frac{\nu'}{1 - \nu'})$$

Le mur de quai a été construit en maçonnerie. Par rapport au sol, son comportement peut être supposé élastique linéaire isotrope.

Le rideau de palplanches est représenté par dix éléments quadrangulaires à huit nœuds superposés, formant ainsi une plaque homogène de 7,30 m de hauteur et de 0,20 m de largeur. Cette largeur relativement importante a été adoptée afin de limiter le nombre d'éléments finis du maillage au voisinage du rideau. Son comportement est élastique, linéaire et isotrope. La modélisation par des éléments de massif impose d'affecter à ceux-ci un module d'Young différent de celui de l'acier afin de conserver une équivalence mécanique en flexion avec les palplanches *réelles*, d'inertie $I = 27\,500\text{ cm}^4/\text{m}$. La conservation du produit (EI) entraîne alors la relation

$$E_b \times h \times \frac{e^3}{12} = E \times I$$

d'où la valeur du module équivalent cherché : $100 \times 20^3 \times E_b = 27\,500 \times 210\,000 \times 12$, soit $E_b = 86\,500\text{ MPa}$. La valeur du coefficient de Poisson est prise égale à celle de l'acier constituant les palplanches (cf. tableau VIII). Par ailleurs, comme l'installation du rideau de palplanches est négligée, son poids n'est pas pris en compte.

Les éléments d'interface ont été disposés autour du mur et du rideau de palplanches, mais ces lignes de contact ne se rencontrent pas. Leur comportement est décrit par le critère de frottement de Coulomb avec un angle d'interface égal à $\frac{2}{3}\varphi'$ (soit 20 degrés), et une cohésion de contact égale à la cohésion du sol en place (soit 30 kPa). La résistance des éléments à la traction est nulle, ce qui autorise des décollements entre les nœuds des différentes interfaces.

Déroulement des calculs et critères de convergence

Avant d'analyser les résultats des différentes étapes de la construction, il est nécessaire de préciser les points suivants :

- les calculs ont été réalisés avec la méthode de résolution de Newton-Raphson modifiée (ou méthode des contraintes initiales) ;
- les tests de convergence permettent de suivre les évolutions du rapport de la norme de l'accroissement des déplacements à celle des déplacements cumulés et du rapport de la norme du déséquilibre au chargement appliqué à l'étape de calcul. La convergence est obtenue lorsque ces deux rapports décroissent et deviennent inférieurs à 0,1 %.

Les déplacements représentés sur les figures ci-après correspondent aux *accroissements* de déplacements horizontaux et verticaux générés au cours d'une étape de calcul. Il n'est en effet pas possible de s'intéresser

directement aux déplacements cumulés car ceux-ci n'ont pas tous la même origine, des matériaux disparaissant et d'autres apparaissant à chaque étape. En revanche, les contraintes dans le sol autour des structures sont cumulées depuis l'étape initiale.

Analyse et principes de « vérification » des résultats de la modélisation

Les principes de vérification consistent à passer en revue l'ensemble des étapes de calcul. Les résultats finaux qui intéressent l'utilisateur sont situés au bout de la chaîne et dépendent donc de la qualité des résultats de chaque étape de calcul.

Étape 0 – État initial

L'application du poids volumique du sol homogène provoque un tassement uniforme du maillage, qu'il est facile de contrôler. En effet, comme aucune plasticité n'est apparue, le tassement est égal à celui du milieu élastique et vaut donc

$$s = \frac{(1 + \nu')(1 - 2\nu')}{2E'(1 - \nu')} \gamma H^2$$

où H est la hauteur totale du massif de sol.

De même, l'état de contraintes initiales est simple à vérifier puisque les équations de l'équilibre conduisent aux relations : $\sigma'_{v0}(z) = \gamma'z$ et $\sigma'_{h0} = K_0\gamma'z$. Cette étape permet également de vérifier le bon positionnement des conditions aux limites en déplacements.

Étape 1 – Excavation d'un talus de pente 1/3

Sous l'effet des forces d'excavation, le massif de sol se déplace dans les directions horizontale (déplacement vers l'aval) et verticale (soulèvement). La cinématique calculée montre bien que le chargement est appliqué avec le bon signe. Grâce à l'analyse des résultats dans des coupes adéquates, on vérifie aisément que les contraintes normales sur la frontière de l'excavation sont quasiment nulles. On peut également contrôler l'ordre de grandeur du soulèvement. En effet, loin du talus vers l'aval, tout se passe comme si l'on excavait sur une certaine hauteur un massif semi-infini à surface horizontale. Pour un comportement élastique isotrope, le déplacement vertical est exprimé par la relation :

$$s = \frac{(1 + \nu')(1 - 2\nu')}{E'(1 - \nu')} [\gamma D_1 + (\gamma - \gamma_w) D_2] H$$

où γ est le poids volumique du sol ; γ_w , le poids volumique de l'eau ; H, la distance au substratum rigide (égale à 21 m) ; D_1 , la hauteur de l'excavation réalisée au-dessus de la nappe (égale à 3 m) et D_2 , la hauteur de l'excavation sous la nappe (6 m). L'application numérique avec les valeurs du tableau VIII conduit à un soulèvement de 2,080 cm à comparer à la valeur 2,086 cm fournie par les éléments finis. La comparaison avec la formule précédente est facilitée par l'absence de plasticité au cours de cette étape et justifiée par la figure 3

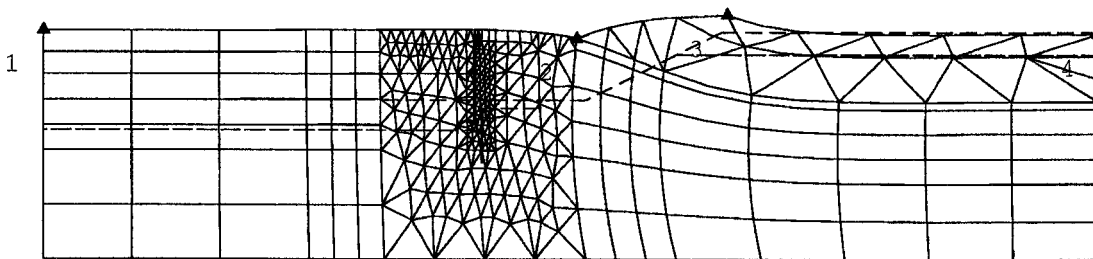


Fig. 3 - Mouvements du sol pour l'étape 1.

qui montre un soulèvement pratiquement uniforme loin du talus. On peut également vérifier que les valeurs des contraintes calculées, loin du talus, demeurent proches des valeurs géostatiques initiales.

Étape 2 – Excavation d'une zone de sol pour la fondation du mur

Les forces d'excavation sont appliquées sur une petite zone de sol de largeur maximale 7 m et de hauteur 1 m. Cette zone correspond à l'encastrement à la base du mur dans le sol. L'excavation provoque un accroissement positif du déplacement vertical (soulèvement) au centre de la zone d'environ 0,94 mm. Aucun point n'est entré en plasticité. Une vérification possible consiste à estimer le soulèvement à l'aide de la formule donnant le tassement d'une fondation souple en déformation plane (Poulos et Davis, 1974, page 103) :

$$s = \frac{pH}{\pi E} I_s$$

où p est la pression appliquée à la base du mur, changée de signe (on peut l'estimer à 20 kPa, soit le poids d'un mètre de sol excavé) ; H , la distance au substratum rigide (égale à 20 m) et I_s , un facteur d'influence lu sur les abaques de Poulos et Davis qui dépend du rapport H/B (B est la largeur de la fondation, égale ici à 7 m) et du coefficient de Poisson. Dans le cas présent, ce facteur est compris entre 0,80 et 1,06. L'application de la formule précédente fournit des valeurs situées entre 1,10 et 1,5 mm. L'ordre de grandeur du soulèvement donné par le calcul est donc correct.

Étape 3 – Installation du mur de quai

L'installation du mur est modélisée par son poids volumique et l'activation des éléments de contact entre le parement et le sol (à l'aval, sous sa base et à l'amont). Sous l'effet de son poids, le mur a tendance à s'incliner vers l'aval (fig. 4a). Quelques points sont en état de glissement sur les parements près de la base (fig. 4b). Cette cinématique est conforme à ce que l'on pouvait attendre. Une zone plastique relativement étendue s'est développée aux extrémités de la base du mur, avec une zone plus importante en aval (fig. 4c). Cette plasticité est cohérente avec le mouvement observé. Il a fallu 81 itérations pour obtenir une bonne convergence, c'est-à-dire pour que les tests de convergence satisfassent la tolérance demandée (0,1 %).

Pour cette étape, une vérification simple consiste à comparer le poids théorique du mur (1 080 kN/m) à la résultante des contraintes normales calculées à la base du modèle de mur (1 099,06 kN/m). La différence constatée est très faible ; l'erreur relative est d'environ 1,8 %. Les résultats numériques sont donc satisfaisants. On peut aussi noter que, sous le mur, la distribution des contraintes normales a l'allure de la distribution théorique sous une fondation rigide.

Étapes 4 et 5 - Remblaiement derrière le mur jusqu'au terrain naturel

Le remblaiement a été réalisé jusqu'au terrain naturel en deux étapes. Seule la dernière est analysée. Comme pour l'activation des éléments finis représentant le mur, la modélisation consiste à appliquer le poids volumique du remblai et à activer les éléments d'interface mur-sol et sol-sol. Sous l'effet de son poids, le remblai se tasse et entraîne en partie le mur à cause de la cohésion d'interface (égale à la cohésion du sol) prise en compte dans la modélisation du contact sol-parement. Le mur est donc tiré vers l'amont (fig. 5a). Cette cinématique génère également des tractions dans le sol près du sommet du mur et provoque le décollement de quelques points (fig. 5b). En revanche, en dessous, une majorité de points de l'interface est en état de glissement (fig. 5c). La cinématique finalement calculée est cohérente et conforme à ce que l'on pouvait attendre.

La zone plastique s'étend légèrement vers l'aval et vers l'amont (fig. 5d). Il a fallu 65 itérations pour obtenir une bonne convergence (0,1 % sur les tests de convergence) pour l'étape 4, et 82 itérations pour l'étape 5. Le maximum de la norme des déformations plastiques

$\left(\sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\epsilon_{ij}^p)^2} \right)$ vaut environ 1 % et se situe au coin du mur à l'aval (dans une zone très localisée et très peu étendue).

En dehors de la cohérence des résultats, on peut vérifier l'équilibre du bloc de sol mis en remblai : son poids théorique vaut 2 205 kN/m et la résultante verticale calculée par éléments finis sur la frontière inférieure du sol en remblai est d'environ 2 093 kN/m. La différence (5 %) s'explique par le décollement de certains points, les concentrations de contraintes aux coins du mur, les contraintes qui subsistaient sur les bords libres à l'étape 3 (avant remblaiement) et les erreurs de conver-

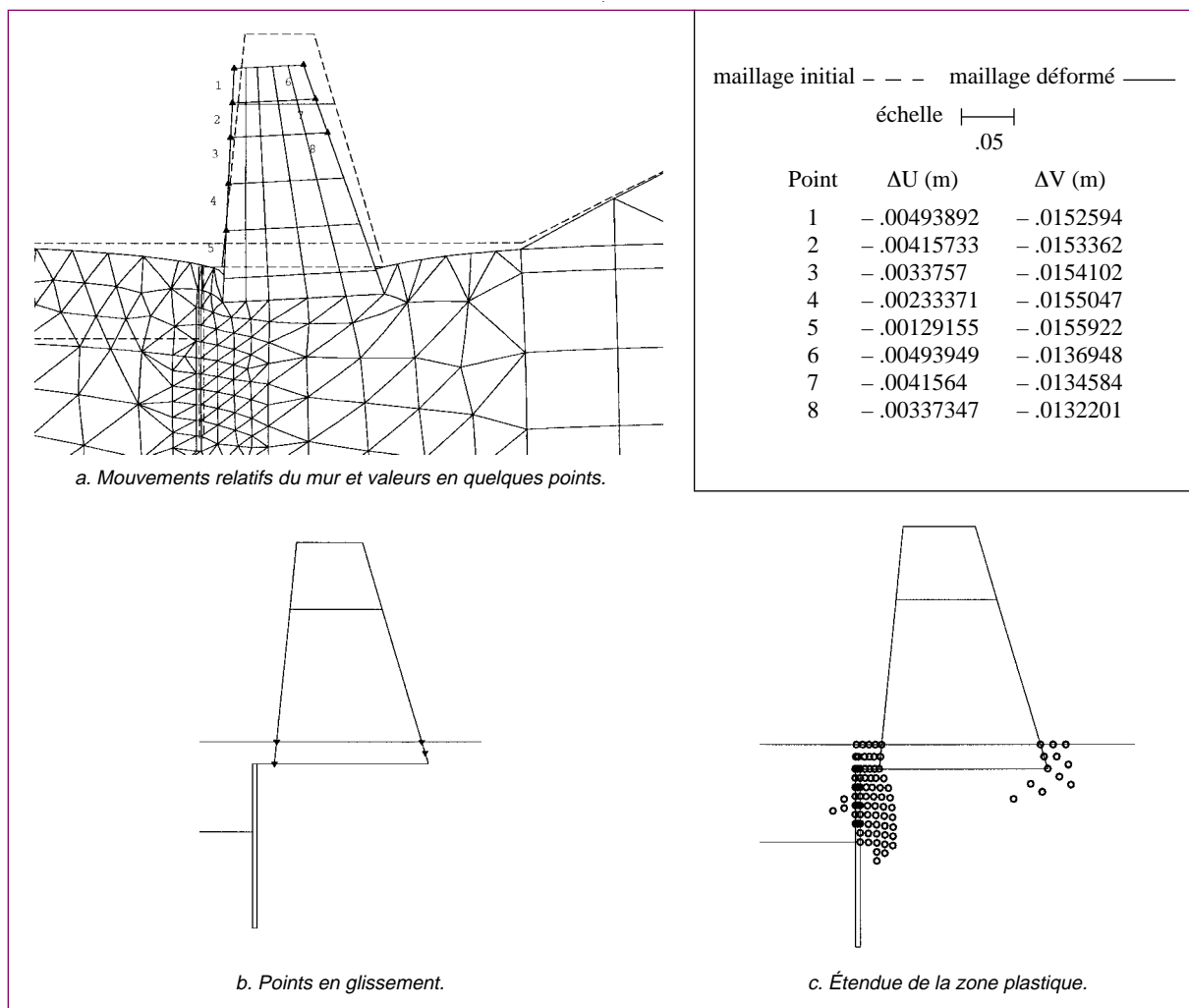


Fig. 4 - Résultats de la modélisation pour l'étape 3.

gence sur l'équilibre global du modèle d'éléments finis. Néanmoins, l'ordre de grandeur est proche et on peut conclure à la validité du calcul. Cette vérification montre la complexité de la démarche lorsque se mêlent les processus de résolution des problèmes d'interface (glissement et décollement) et de plasticité dans les milieux en contact.

Cette étape termine la modélisation de la construction du mur. Les figures 6a et 6b montrent la distribution des contraintes normales et tangentielles du sol sur les parois du mur avant le rempiètement. Cette distribution est plausible et en accord avec la cinématique générale de l'ouvrage obtenue à cette étape de calcul.

Étape 6 - Rempiètement du mur de quai.

L'excavation à la cote - 13 m et l'installation du rideau de palplanches sont réalisées simultanément. Sous l'effet des forces d'excavation, un soulèvement du sol se produit à l'aval qui entraîne le rideau (fig. 7a). Quant au mur, il s'incline de nouveau vers l'aval. Des tractions apparaissent près de la tête du mur (côté amont) et deux nœuds supplémentaires sont déclarés décollés (fig. 7b) ; les autres sont en état de glissement entre le

parement arrière et le sol (fig. 7c). De même, tous les points de l'interface sol-rideau sont en état de glissement. Cette cinématique est également conforme à ce que l'on pouvait attendre et cohérente avec l'ensemble des résultats.

La zone plastique s'est largement étendue vers l'aval et vers l'amont (fig. 7d). Le maximum de la norme des déformations plastiques vaut environ 2 % et se situe au coin du mur à l'aval. À cause de cette expansion plastique et des points en décollement et en glissement, les tests de convergence ont été satisfaits au bout de 233 itérations (0,1 % sur le test de convergence).

Comme pour l'étape 1, une vérification simple peut être effectuée. Loin du rideau vers l'aval, tout se passe comme si l'on excavait un massif semi-infini à surface horizontale, la formule du soulèvement s'écrit alors :

$$s = \frac{(1 + \nu')(1 - 2\nu')}{E'(1 - \nu')} (\gamma - \gamma_w) D_3 H$$

où D_3 est la hauteur de l'excavation pour cette étape de calcul (4 m) et H , la distance au substratum rigide (17 m). Une application numérique avec les valeurs du tableau VIII conduit à un soulèvement de 5,613 mm à

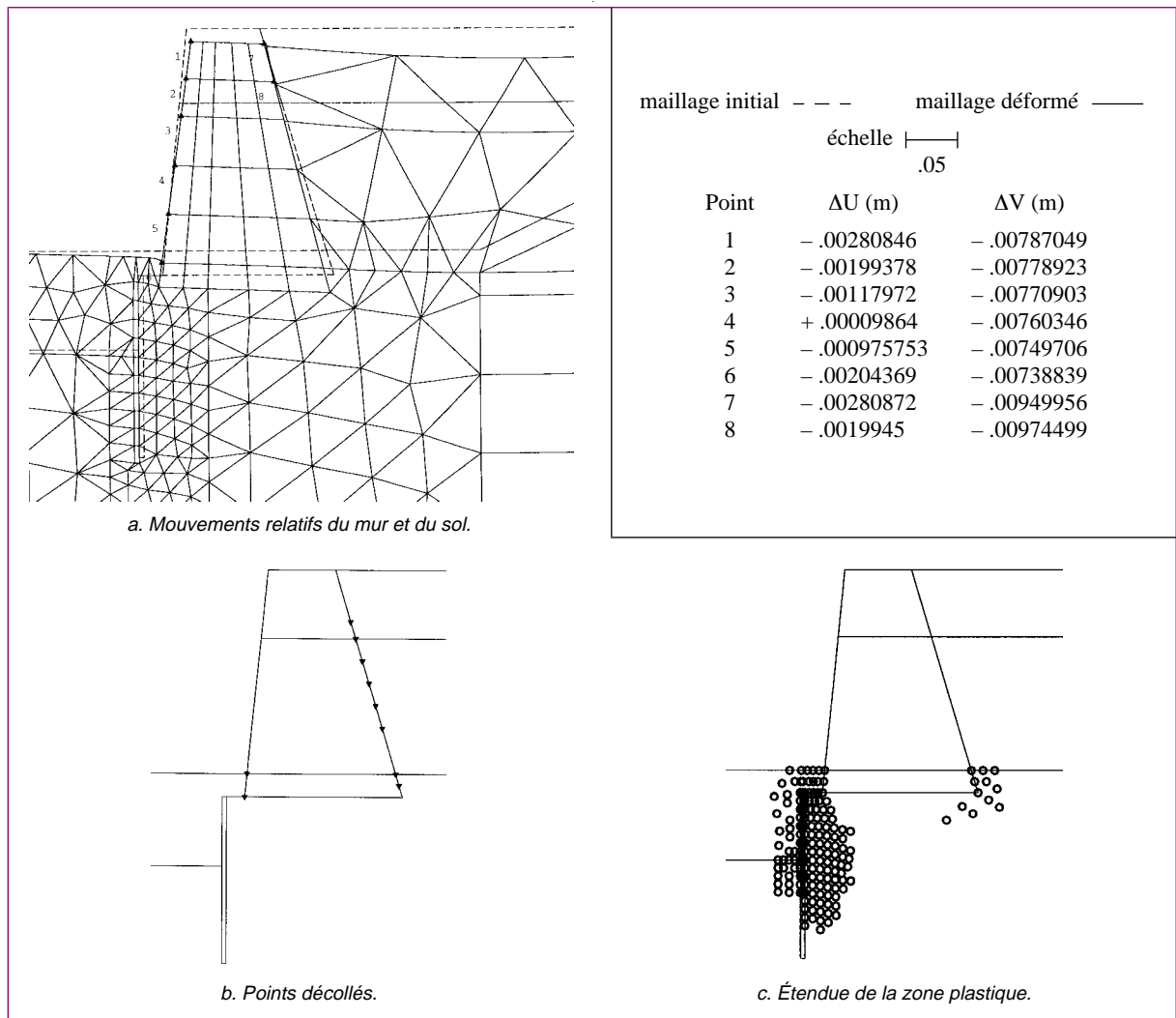


Fig. 5 - Résultats de la modélisation pour l'étape 5.

comparer à la valeur relative de 5,639 mm fournie par les éléments finis. Ceci constitue une bonne vérification d'ensemble, mais elle ne préjuge en aucun cas de la précision des résultats dans les zones les plus sollicitées.

Le déplacement horizontal en tête du rideau (vers l'aval) vaut environ 1,75 cm, soit $0,0058H_0$ si H_0 est la hauteur hors fiche. Cette valeur est à comparer à l'ordre de grandeur observé pour des ouvrages soumis à des charges de service : $0,002H_0$. Ce déplacement est donc plus important, mais l'ordre de grandeur est raisonnable et il est lié au fort développement de la plasticité autour du rideau.

Pour compléter la vérification, on peut analyser le champ de contraintes autour du rideau. Comme l'excavation entraîne une décompression du sol autour du rideau et du mur, les contraintes dans le sol ont tendance à diminuer (fig. 8a et 8b) par rapport à celles obtenues à la fin de la construction du mur (cf. fig. 6a et 6b). L'état de contraintes évolue vers un état d'équilibre limite de poussée.

Les contraintes normales appliquées par le sol au rideau sont données sur la figure 9. Pour tous les points

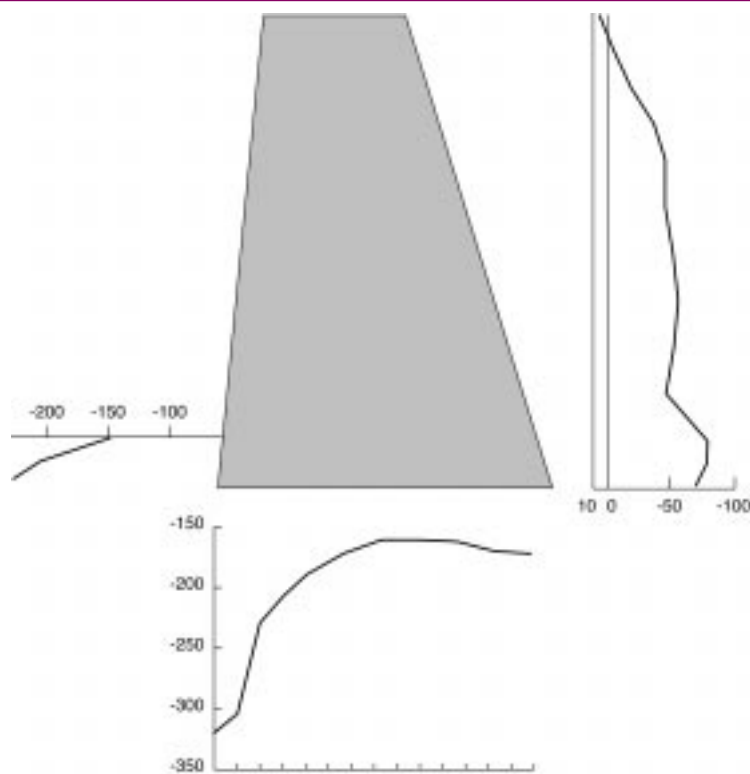
de l'interface en glissement, il est facile de s'assurer que le critère de Coulomb est bien vérifié par les contraintes normales et tangentielles. Le critère est satisfait même dans les régions extrêmes du rideau, où l'état des contraintes est perturbé par des charges extérieures (poids du mur) ou des concentrations de contraintes (points anguleux).

La distribution des contraintes et notamment les pressions différentielles appliquées sur le rideau expliquent l'allure de la courbe des moments fléchissants (fig. 10). Le maximum du moment est atteint pour une profondeur d'environ 1 m sous le nouveau fond de fouille, et vaut environ 100 kN.m.

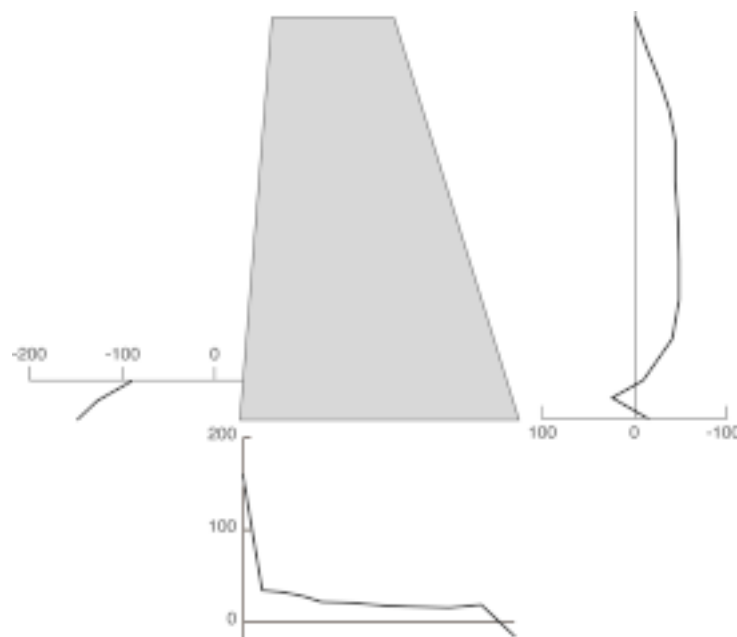
Par ailleurs, la contrainte normale au fond de fouille (côté aval) est limitée par la contrainte de butée (théorie de Rankine) :

$$\sigma_b = \frac{c'}{\tan \varphi} (K_p \cos \delta - 1)$$

soit, pour cet exemple, $\sigma_b = 30\sqrt{3} (5,30 \cos 20 - 1) = 328,05$ kPa. Cette limite est donc légèrement dépassée au fond de fouille, puisque la contrainte normale atteint



a. Contraintes normales.



b. Contraintes tangentielles.

Fig. 6 - Distribution des contraintes effectives appliquées sur les parois du mur avant rempliement.
Les contraintes sont exprimées en kPa avec la convention de signe de la mécanique des milieux continus (compression négative).

360 kPa. Les contraintes dans la zone de butée, que l'on peut juger élevées près de la surface du fond de fouille, dépendent également de la finesse du maillage utilisé. Malgré une modélisation *a priori* satisfaisante (en nombre de nœuds et densité), ces résultats semblent indiquer que le maillage n'est pas suffisamment fin autour du rideau et entre celui-ci et le mur. C'est un aspect qu'il

conviendrait d'étudier dans le cadre d'une étude plus poussée et non exploratoire comme ce qui a été fait. Cette observation montre aussi toute la difficulté de construire un maillage qui sera suffisamment fin pour toutes les étapes de calcul. Néanmoins, à cette réserve près, on peut raisonnablement conclure à la validité du calcul. Les résultats obtenus sont plausibles et cohérents

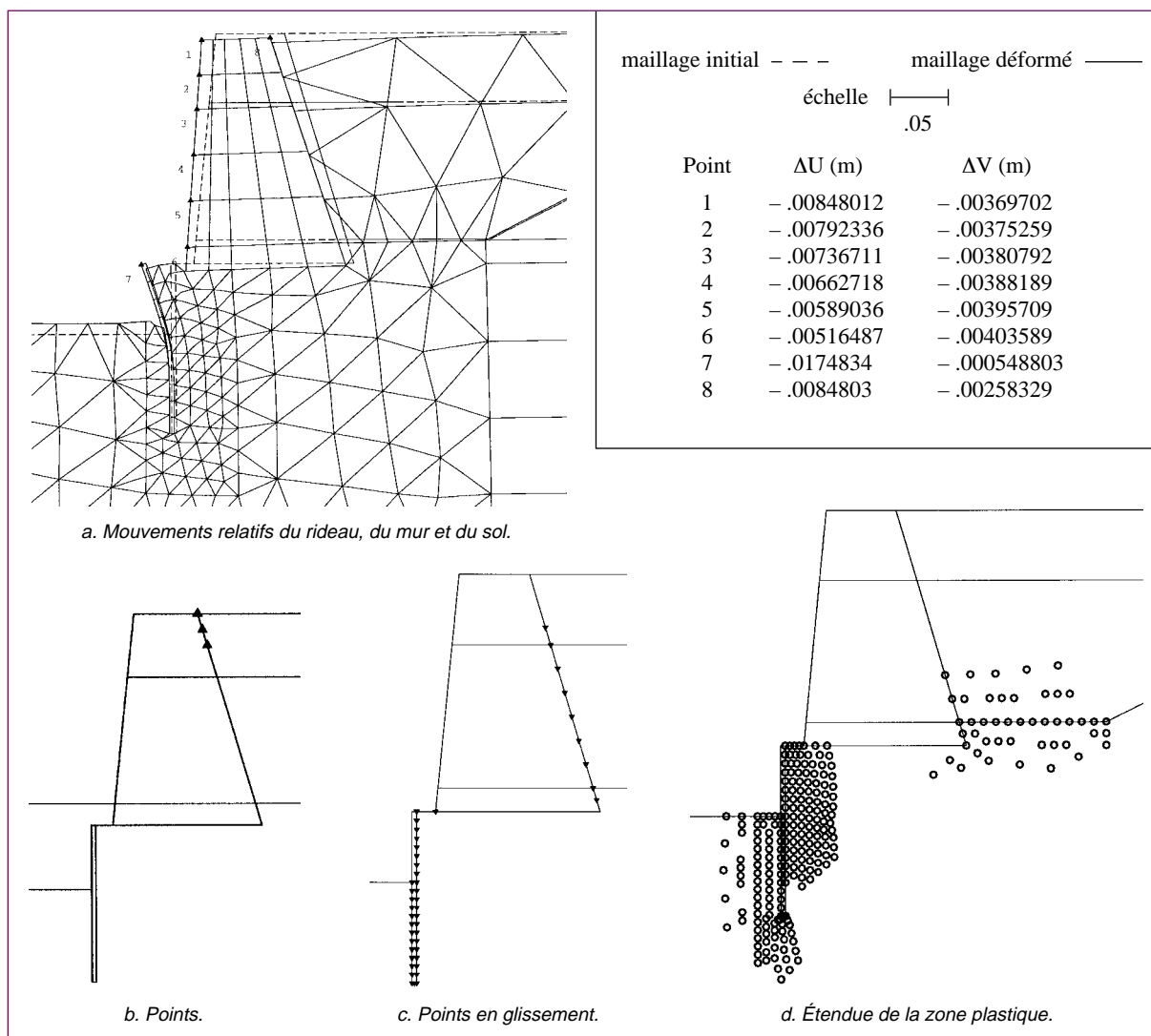


Fig. 7 - Résultats de la modélisation de l'ouvrage remplié.

avec les mouvements observés sur de tels ouvrages et avec les ordres de grandeur théoriques et expérimentaux connus. Le calcul de l'erreur de modèle ne peut être réalisé puisqu'on n'a pas de véritable référence pour comparer (pas de mesures sur ouvrage).

D'autres vérifications plus complexes sont également possibles en appliquant les méthodes de calcul traditionnelles des soutènements et en faisant diverses hypothèses quant à la prise en compte de l'effet du mur (surcharge en surface) sur le rideau de palplanches. On aboutira à une solution plus ou moins approchée (qu'il sera là aussi difficile de valider) et à des ordres de grandeur qui pourront être comparés. On comparera ainsi deux modèles entre eux, d'où une difficulté supplémentaire liée à des hypothèses de calcul différentes.

Conclusions

L'ensemble des recommandations présentées dans cet article devraient permettre aux utilisateurs d'acquérir

des réflexes de vérification de leurs résultats. Les principes de vérification proposés se répartissent en deux catégories :

- des principes relativement généraux que l'on peut considérer comme des réflexes à acquérir (contrôle des chargements, de l'allure des déformées, des conditions aux limites, des isovaleurs des gradients, etc.) ;
- des principes à adapter au cas par cas selon le type d'ouvrage, son environnement, les sollicitations qu'il subit et les interactions sol-structures à représenter. C'est notamment le cas pour le recours à des solutions théoriques simples, à d'autres techniques de calcul ou à des ordres de grandeur connus.

Un exemple d'application des principes de vérification a été présenté et largement commenté. Il s'agissait d'un calcul géotechnique complexe (rempiétement d'un mur de quai par un rideau de palplanches) pour lequel on ne dispose pas d'outil de dimensionnement usuel. L'objectif était d'analyser l'apport de la méthode des éléments finis dans l'analyse des mécanismes de report de charges du mur sur le rideau de palplanches. Le

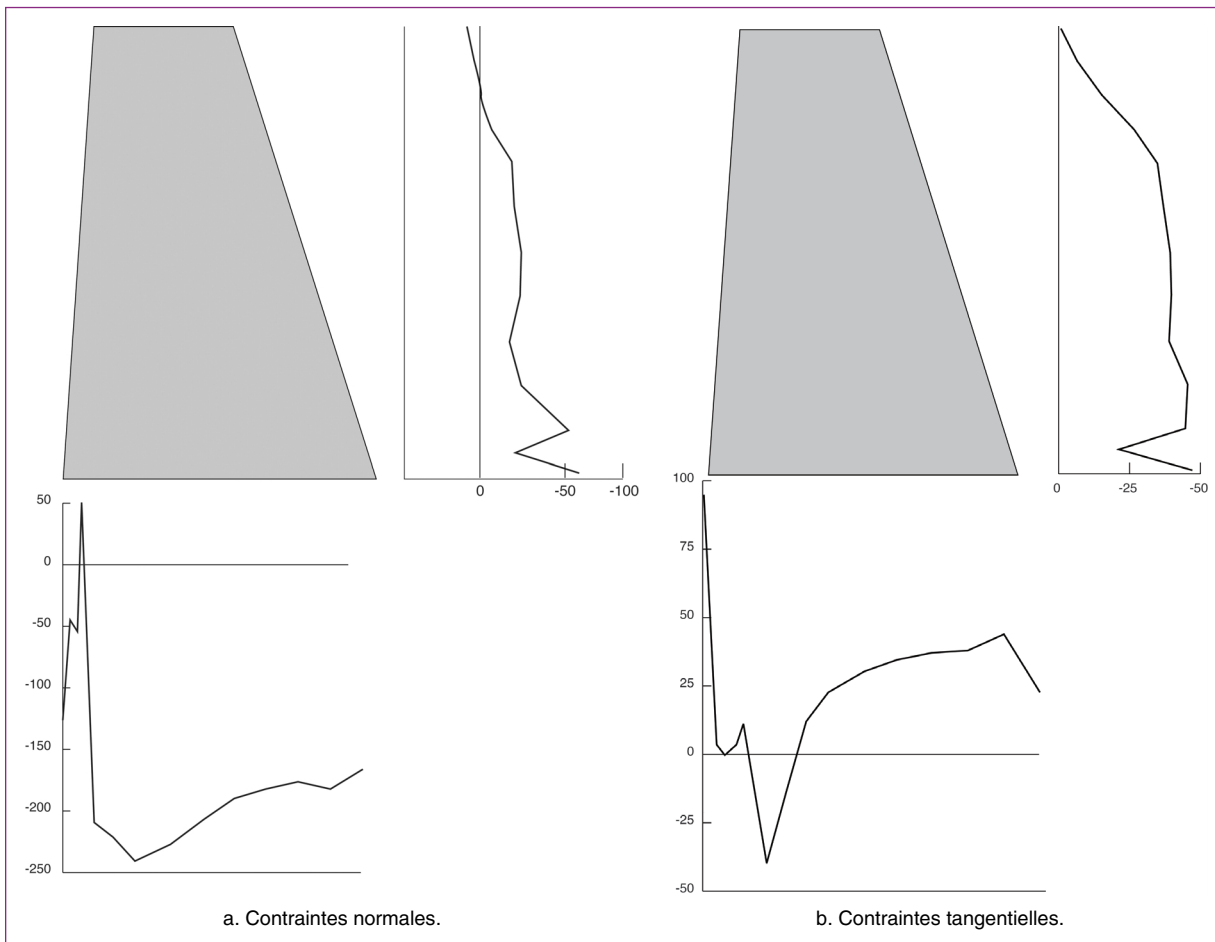


Fig. 8 - Distribution des contraintes effectives appliquées sur les parois du mur après rempiètement. Les contraintes sont exprimées en kilopascals avec la convention de signe de la mécanique des milieux continus (compression négative).

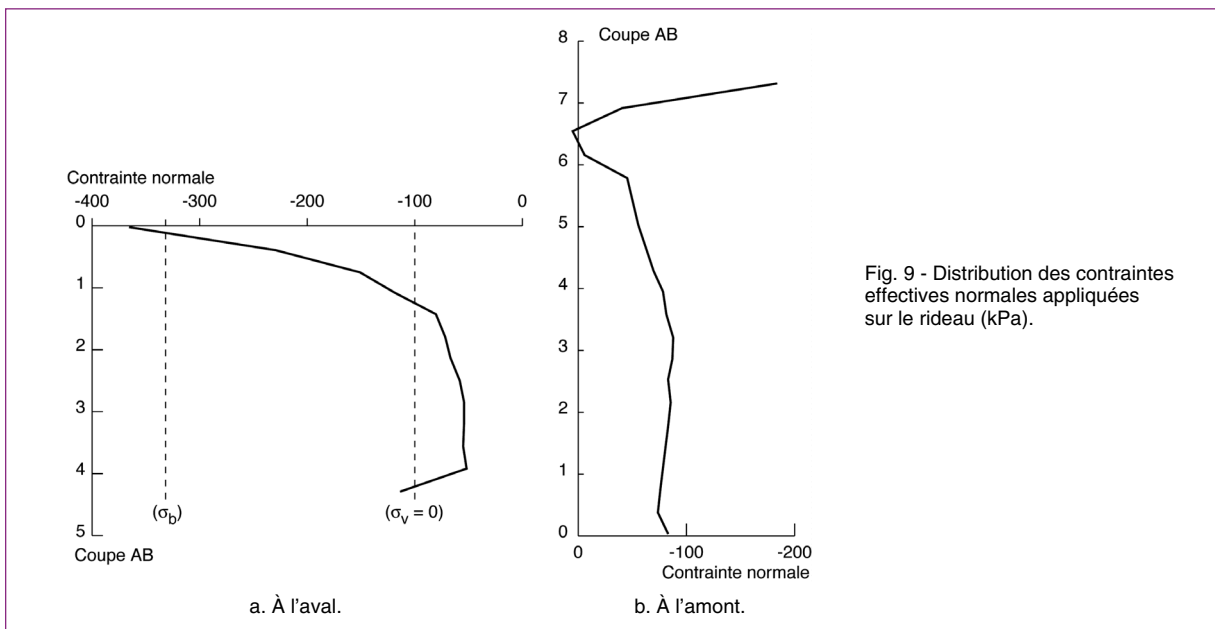


Fig. 9 - Distribution des contraintes effectives normales appliquées sur le rideau (kPa).

modèle d'éléments finis élaboré tient compte d'une histoire simplifiée de la construction de l'ouvrage en six étapes, du comportement élastoplastique du sol et des interactions sol-structures (sol-mur et sol-rideau de

palplanches). Malgré la complexité du modèle, il a été possible d'appliquer les principes de vérification proposés, de « contrôler » certains résultats à chaque étape de calcul et de juger de la cohérence globale des dépla-

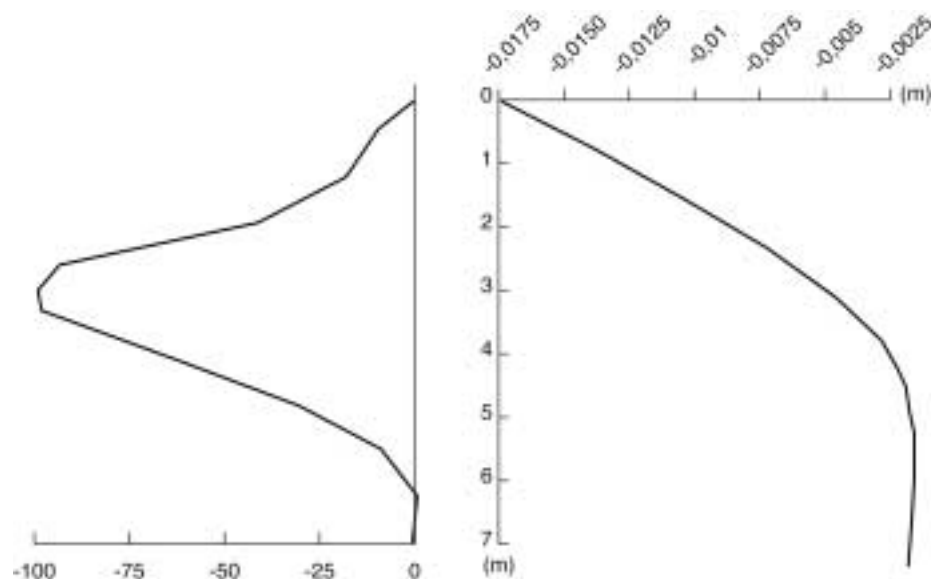


Fig. 10 - Variations du moment fléchissant dans le rideau de palplanches (kN.m) et déplacement horizontal du rideau (m).

cements et des contraintes. Cette analyse a permis finalement de conclure à la validité de l'ensemble du calcul.

Les vérifications ont été simples à mettre en œuvre grâce au postprocesseur utilisé. Toutefois, pour faciliter les vérifications dans un domaine aussi complexe que la géotechnique, il ne serait pas inutile d'améliorer certaines « visualisations » en rapprochant leur présentation des schémas classiques de la mécanique des sols. L'idéal serait de disposer de sorties-métiers, dépendant directement du type d'ouvrage analysé. Cela permettrait aussi de supprimer une étape dans l'exploitation des résultats (c'est-à-dire un transfert de données vers

un autre logiciel de représentation) et donc un risque d'erreurs.

Enfin, on n'insistera jamais assez sur la nécessité de consulter la bibliographie sur les expérimentations d'ouvrages similaires. Ces études, ainsi que les états de l'art publiés, fournissent à l'ingénieur des ordres de grandeur et des indications sur les mécanismes de déformation qu'il pourrait rencontrer dans son analyse. Combiné avec des calculs traditionnels, cela lui donne des moyens supplémentaires pour vérifier qualitativement les résultats de son modèle. N'oublions pas enfin qu'une pratique régulière et du bon sens restent irremplaçables pour juger un modèle et ses résultats.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

KUROWSKI P., SZABO B. (1997), *How to find errors in finite-element models ?* [http://sogl.me.qub.ac.uk/dermot/documents/analysis/fea_errors.html], 5 p.

MESTAT Ph. (1994), *Validation du progiciel CÉSAR-LCPC en comportement mécanique non linéaire. Volume 1 : Fondations superficielles et tunnels*, ERLPC, série géotechnique, **GT 58**, 170 pages.

MESTAT Ph. (1997), *Maillages d'éléments finis pour les ouvrages de géotechnique – Conseils et recommandations*, *Bulletin des laboratoires des Ponts et Chaussées*, **212**, novembre-décembre, pp. 39-64.

MESTAT Ph. (1998), *Modèles d'éléments finis et problèmes de convergence en comportement non linéaire*, *Bulletin des laboratoires des Ponts et Chaussées*, **214**, mars-avril, pp. 45-60.

MESTAT Ph., HUMBERT P., DUBOUCHET A. (1999a), *Erreurs dans les modélisations par éléments finis : principaux types et méthodes de vérifications associées*, *Revue Française de Génie Civil*, vol. 3, **7-8**, pp. 519-534.

MESTAT Ph., HUMBERT P., DUBOUCHET A., PRAT M. (1999b), *Critères et mesures de performance d'un progiciel d'éléments finis – Propositions*, *Revue Française de Génie Civil*, vol. 3, **7-8**, pp. 603-614.

MESTAT Ph., PRAT M., BISCH Ph., MILLARD A., PIJAUDIER-CABOT G. (1999c), *Calcul des ouvrages en interactions*, éditions Hermès Sciences, 944 pages.

MESTAT Ph., RIOU Y. (1999), *Benchmarking en aveugle : cas de la géotechnique*, *Inter-Pôle, Pôle d'expertise sur les éléments finis en Génie Civil-AFGC*, n° 4, décembre 1999, pp. 3-11.

MESTAT Ph. (2001), *An overview on 25 years of numerical modeling of test embankments and tunnels*, *10th IACMAG*, Desai (ed.), janvier 2001, Balkema, pp. 1521-1526.

POULOS H.G., DAVIS E.H. (1974), *Elastic solutions for soil and rock mechanics*, John Wiley Inc, 412 pages.

ABSTRACT

Recommendations for the verification of finite element geotechnical models

PH. MESTAT, P. HUMBERT, A. DUBOUCHET

This paper makes some recommendations for the verification of the results of finite element geotechnical calculations. These recommendations apply to both the performance of calculations (incremental and iterative resolution process, convergence tests) and the analysis of the results (displacements, stresses, pore pressures, loads and moments within the structures). The recommendations are based on the equations which apply to the mechanics of continuous media and on the modelling hypotheses made by researchers and engineers. An example of complex modelling involving several phases of construction (underpinning a quay) provides an appropriate application of these recommendations.