

# Référentiel de tests pour la vérification de la programmation des lois de comportement dans les logiciels d'éléments finis

**Philippe Mestat**

Directeur de recherche  
Chef de la section Calcul des ouvrages géotechniques  
Division Mécanique des sols, des roches et géologie de l'ingénieur

**Pierre Humbert**

Directeur de recherche  
Chef de la section Modèles numériques  
Direction des Programmes  
Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

## RÉSUMÉ

Le développement et la diffusion de logiciels de calcul par éléments finis soulèvent trois problèmes importants : la vérification des procédures de calcul, la validation des modèles de comportement et, enfin, l'utilisation correcte de ces logiciels pour la modélisation des ouvrages (maîtrise et justification des hypothèses de calcul). Les aspects liés à la validation des modèles et aux recommandations pour la maîtrise des logiciels ont déjà fait l'objet de nombreuses publications. En revanche, dans le domaine de la géotechnique, la vérification du bon fonctionnement d'un logiciel a été peu abordée sous l'angle méthodologique. Cet article s'appuie sur l'expérience acquise dans le développement du module de résolution en comportement non linéaire de CÉSAR-LCPC pour proposer une stratégie de vérification et un référentiel de tests pour contrôler la programmation des lois de comportement élastoplastique. Plusieurs exemples de mécanique des sols illustrent ces propos, mais le lecteur pourra facilement les transposer aux lois de comportement d'autres matériaux.

**MOTS-CLÉS :** 42 - Mécanique des sols - Ouvrage d'art (gén.) - Modèle mathématique - Logiciel - Éléments finis (méthode) - Comportement - Essai - Calcul - Loi - Élastoplasticité.

## Introduction

Le développement et la diffusion de logiciels de calcul par éléments finis soulèvent trois problèmes importants : la vérification des procédures de calcul, la validation des modèles de comportement et, enfin, l'utilisation correcte de ces logiciels pour la modélisation des ouvrages (maîtrise et justification des hypothèses de calcul). Les aspects liés à la validation des modèles et aux recommandations pour la maîtrise des logiciels ont déjà fait l'objet de nombreuses publications (voir par exemple : les travaux du GRECO-Géomatériaux (1986-1994) ; Prat *et al.* (1995, 1997) ; Mestat *et al.* (1999a ; 1999b ; 1999c)). Quant à la vérification et à la description des tests nécessaires, des travaux importants ont été entrepris dans le domaine des structures et des barrages. On peut citer les travaux de la Commission de validation des logiciels de calcul de structures (créée en 1987 au sein de la Société française des mécaniciens), de la Commission internationale des grands barrages (CIGB, 1994) et ceux menés par la NAFEMS (National agency for finite element methods and standards en Grande-Bretagne).

En revanche, dans le domaine de la géotechnique, la vérification du bon fonctionnement d'un logiciel a été peu abordée sous l'angle méthodologique et sous l'aspect particulier de la vérification de la programmation des lois de comportement non linéaire. Cet article s'appuie sur l'expérience acquise dans le développement du module de résolution en comportement non linéaire de CÉSAR-LCPC pour proposer une *stratégie de vérification* et un *référentiel de tests* pour contrôler la programmation des lois de comportement. Sans vérification préalable de leur programmation, il n'est pas de validation des modèles possible.

L'élaboration des lois de comportement, leur introduction dans les logiciels d'éléments finis et leur validation sont ainsi au

cœur des recherches théoriques en géotechnique. Une bonne description du comportement du sol est fondamentale pour passer au calcul des ouvrages et de leurs interactions avec l'environnement. La tendance actuelle est au développement de lois de type élastoplastique avec plusieurs mécanismes d'écrouissage ou au perfectionnement de modèles plus anciens avec un seul mécanisme plastique (couplage avec une anisotropie ou de la viscosité). Leur programmation dans un logiciel d'éléments finis permet d'accéder aux champs de déplacements et de contraintes par la modélisation d'un ouvrage dans son environnement.

L'enjeu pour l'équipe de développement du logiciel est alors de prouver que celui-ci fournit des résultats satisfaisants pour les problèmes de géotechnique. C'est toute la problématique de la validation des modèles et de leur traduction informatique. Un long processus de vérification et de confrontations calculs-mesures doit donc être suivi avant de décider de diffuser l'outil de calcul (Mestat et *al.*, 1999b).

La première étape de ce processus consiste à vérifier que le logiciel fait bien ce que l'on attend qu'il fasse. Les résultats fournis doivent être en accord avec des solutions théoriques. La vérification doit être effectuée pour chaque problème physique que prétend traiter le logiciel (mécanique, hydraulique, hydromécanique, dynamique, etc.). Ces vérifications permettent de contrôler, d'une part, la programmation des lois de comportement et, d'autre part, l'adéquation des algorithmes adoptés dans de multiples conditions d'utilisation (géométries, type d'éléments, chargements, conditions aux limites, etc.).

L'emploi de solutions théoriques et d'un référentiel de tests peut également servir plusieurs stratégies comme :

- le contrôle interne lors du développement du logiciel ;
- la recette d'un logiciel acheté par un client ;
- l'apprentissage par les utilisateurs (exercices de prise en main, formation continue par l'exemple, tests d'aptitude) ;
- la certification du logiciel vis-à-vis de certaines applications et de certaines autorités (ou de donneurs d'ordre).

Les stratégies de vérification des développeurs et des utilisateurs ne sont toutefois pas identiques. Les développeurs ont le souci de la généralité et la volonté d'une certaine exhaustivité. En revanche, les utilisateurs ont souvent des exigences particulières liées à une étude en cours : types d'ouvrage et d'analyse, domaine d'emploi. Leurs exigences peuvent varier au gré des projets traités par les bureaux d'études. Cette spécificité ponctuelle est donc difficilement prise en compte au niveau des concepteurs et nécessite l'implication des utilisateurs dans les processus de validation et de vérification.

## Programmation des lois de comportement dans un logiciel d'éléments finis

Une loi de comportement élastoplastique se traduit par une relation entre les tenseurs de contraintes et de déformations de la forme suivante :

$$D\varepsilon_{ij} = M_{ijkl}(\sigma_{mn}) d\sigma_{kl} \text{ et } d\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\sigma_{mn}) D\varepsilon_{kl}$$

où le tenseur ( $M_{ijkl}$ ) représente le tenseur de comportement et ( $E_{ijkl}$ ), son inverse.

La programmation de telles équations dans un logiciel de calcul par éléments finis ne pose plus aujourd'hui de problèmes particuliers. La non-linéarité est traitée au niveau du système global (assemblage des éléments finis) par un processus de résolution incrémental et itératif, fondé sur une linéarisation du système d'équations exprimant l'équilibre mécanique du milieu discrétisé (méthodes de Newton-Raphson). Au niveau local du point d'intégration, les équations différentielles de la loi de comportement sont intégrées à tout instant du processus de résolution entre deux accroissements successifs du chargement pour obtenir le champ de contraintes vérifiant les équations de comportement et l'équilibre global du milieu à une certaine tolérance près sur les tests de convergence.

Les algorithmes de traitement des lois élastoplastiques sont bien connus, fiables et robustes. De nombreuses publications ont traité ce sujet en proposant tel ou tel raffinement dans les schémas d'intégration. Sous réserve de pouvoir réutiliser les algorithmes déjà programmés (par exemple, la méthode de Newton-Raphson), le travail de programmation se réduit généralement à la création et à la modification d'un petit nombre de sous-programmes bien localisés dans le code-source et décrits dans le manuel de programmation du logiciel (voir, par exemple, le manuel de développement du module MCNL (résolution de problèmes Mécaniques à Comportement Non Linéaire) de CÉSAR-LCPC (Mestat, 1998). En revanche, la vérification ne pourra être restreinte ; elle devra porter sur la programmation de la loi, sur l'adéquation des algorithmes de résolution et sur les connexions des développements avec l'ensemble des sous-programmes existants.

## Tests de vérification pour un logiciel d'éléments finis

Pour un logiciel général de calcul, il est quasiment impossible de contrôler toutes les combinaisons d'emploi disponibles. Face au nombre de tests théoriquement nécessaire, le problème est de sélectionner une plate-forme de « bons » tests, pertinents et efficaces. Pour cela, il est nécessaire d'élaborer une stratégie fondée sur un ensemble de tests (ou référentiel) des plus simples aux plus complexes :

- > les **tests unitaires** pour vérifier les résultats au niveau d'un sous-programme (par exemple, test d'une fonctionnalité : inversion de matrices, résolution d'un système d'équations, calcul de valeurs propres, etc.) ;
- > les **tests d'intégration** pour tester un ensemble de sous-programmes qui viennent d'être réunis dans le logiciel (par exemple : test d'un algorithme) ;
- > les **tests de non-régression** pour s'assurer que les résultats ne sont pas altérés par des modifications du code (corrections, rapatriement du code-source dans une version diffusée) ou de l'environnement informatique ;
- > les **tests de robustesse** pour estimer la réponse du logiciel à des « données limites » pour les algorithmes (par exemple : des valeurs non physiques pour les paramètres) ;
- > les **tests élémentaires** pour contrôler les résultats d'applications simples avec des solutions théoriques connues. Ces tests doivent aussi permettre de tester des combinaisons de types d'analyse (élastique, élastoplastique, thermique, dynamique, etc.), de géométries, d'éléments finis, de chargements, de conditions aux limites, etc. ;
- > les **tests de référence** destinés à vérifier la validité des domaines d'emploi du logiciel par rapport à des résultats obtenus avec d'autres logiciels de calcul ;
- > les **tests semi-industriels** destinés à comparer les résultats avec des mesures sur des modèles physiques. Ces tests sont réalisés avec une certaine maîtrise de la nature des matériaux considérés (homogénéité notamment) qui rend plus facile la modélisation des essais, mais éloigne quelque peu de la réalité des projets ;
- > les **tests industriels** voués à démontrer l'aptitude du logiciel à modéliser des ouvrages dans des conditions proches de celles du projet. La validation provient d'un bon accord entre les résultats numériques et les mesures réalisées sur des ouvrages en vraie grandeur. La confrontation concerne à la fois le logiciel, le modèle et la manière de les mettre en œuvre.

Les tests élémentaires et de référence servent, d'une part, à démontrer les performances des algorithmes et l'absence d'erreurs dans le code (autant que faire se peut) par un *contrôle* de l'exactitude des résultats et, d'autre part, à fabriquer une bibliothèque de tests automatiques afin de contrôler régulièrement que les résultats n'ont pas été altérés par des modifications apportées au code-source. Ce travail est indispensable en phase de développement, de changement de version ou encore lorsque l'utilisateur acquiert un nouvel ordinateur. Les tests unitaires, d'intégration et de non-régression concernent surtout les concepteurs et sont effectués au cours du développement ou de la maintenance. Enfin, les tests semi-industriels et industriels sont exclus de cette réflexion. Par la suite, on se limitera aux tests élémentaires et de référence, correspondant à des solutions obtenues par une approche théorique ou numérique.

## Tests élémentaires et de référence

Les procédures de calcul étant vérifiées (tests unitaires), il s'agit maintenant de s'assurer que l'outil de calcul fonctionne correctement et fournit des résultats satisfaisants pour les problèmes physiques qu'il doit résoudre (modélisations bidimensionnelles et tridimensionnelles). L'expression « solution satisfaisante » est employée car la méthode des éléments finis n'est qu'une méthode de résolution approchée des équations différentielles. Pour effectuer les tests nécessaires, il faut disposer de solutions théoriques.

En toute rigueur, la vérification ne devrait faire intervenir que des problèmes dont on connaît la solution théorique exacte (mécanique, hydraulique, hydromécanique). Les problèmes avec solutions (déplacements et contraintes) sont nombreux en comportement mécanique linéaire isotrope. Malheureusement, il n'en est plus de même lorsque des non-linéarités sont prises en compte. Pour disposer de suffisamment de tests et couvrir largement les domaines d'application (par exemple : les modèles 2D, à symétrie de révolution et 3D pour tous les grands types d'ouvrages et de sollicitations), il convient de considérer différentes catégories de solutions « théoriques » :

- > les **solutions théoriques complètes** (les champs de déplacements, de contraintes et de déformations sont connus en tout point du domaine étudié) ;
- > les **solutions théoriques incomplètes** (seule une partie de la solution est connue) ;
- > les **solutions de référence concernant des ouvrages-types de la géotechnique** (publiées dans la littérature, calculées par d'autres logiciels d'éléments finis ou par toute autre méthode numérique) ;
- > les **solutions approchées incomplètes** (seul un encadrement de certains résultats est fourni comme par exemple avec le calcul à la rupture).

### Solutions théoriques complètes

La solution théorique complète d'un problème mécanique est constituée par la donnée des déplacements, des déformations et des contraintes en tout point du domaine étudié. La formulation peut être explicite, implicite ou aboutir à un système différentiel simple. On peut recalculer les solutions ou consulter des abaques ou des tables numériques publiés dans des compilations de référence (par exemple : Giroud (1972a, 1972b, 1972c) ; Poulos et Davis (1974) ; Selvadurai, (1979)).

La plupart des solutions intéressantes ont été obtenues en élasticité linéaire isotrope dans le cas de massifs semi-infinis chargés en surface ou soumis à leur poids propre, et de problèmes d'expansion de cavité cylindrique ou sphérique (tableaux I et II). Ces solutions concernent des modèles tridimensionnels ou bidimensionnels (déformation plane, symétrie de révolution).

Dans le cas d'un comportement élastique non linéaire ou élastique parfaitement plastique (critères de Tresca,

TABLEAU I  
Exemples de problème ayant une solution théorique complète (en mécanique)

Test	Description du problème	Référence
<p>Problème de Boussinesq. Force ponctuelle appliquée à la surface d'un massif semi-infini élastique linéaire et isotrope.</p>		<p><b>Expression analytique</b> Poulos et Davis (1974, p. 16) Giroud (1974a, p. 79)</p>
<p>Force ponctuelle appliquée à la surface d'un massif de profondeur finie <math>H</math>, élastique linéaire et isotrope.</p>		<p><b>Tables numériques</b> Poulos et Davis (1974, pp. 19-25) Giroud (1972a, p. 133)</p>
<p>Force linéique appliquée à la surface d'un massif de profondeur finie, élastique linéaire et isotrope :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- déformation plane ;</li> <li>- déformation axisymétrique (force appliquée sur un anneau).</li> </ul>		<p><b>Tables numériques</b> Poulos et Davis (1974, pp. 28-32) Poulos et Davis (1974, p. 32)</p>
<p>Fondation filante souple. Pression uniforme appliquée sur une largeur finie à la surface d'un massif élastique linéaire et isotrope de profondeur :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- infinie ;</li> <li>- finie.</li> </ul> <p>Même problème pour une fondation circulaire sur massif d'épaisseur finie.</p>		<p><b>Tables numériques</b> Poulos et Davis (1974, pp. 36-37) Poulos et Davis (1974, pp. 103-107) Giroud (1972a, pp. 181-238)</p>
<p>Fondation filante rigide (interface parfaitement lisse ou adhérente). Même problème pour une fondation circulaire.</p>		<p><b>Tables numériques</b> Giroud (1972b, pp. 365-400) Giroud (1972a, pp. 285-324)</p>
<p>Pieu isolé incompressible chargé axialement dans un milieu semi-infini d'épaisseur infinie (interface adhérente).</p>		<p><b>Tables numériques</b> Poulos et Davis (1974, pp. 269-277)</p>
<p>Cavité cylindrique de section circulaire soumise à une pression interne uniforme et située dans un milieu :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- élastique linéaire isotrope ;</li> <li>- élastique linéaire anisotrope ;</li> <li>- élastoplastique (critère de Tresca) ;</li> <li>- élastoplastique (critère de Mohr-Coulomb) ;</li> <li>- élastoplastique (critère de von Mises).</li> </ul>		<p><b>Expressions analytiques et abaques</b> Poulos et Davis (1974, pp. 163-167) ; Mestat (1994, pp. 40-41) Mestat (1994, pp. 46-49) Mestat (1994, pp. 50-55) Hodge et White (1950) ; Mestat (1994, pp. 56-57)</p>
<p>Cavité cylindrique de section circulaire soumise à une compression à l'infini et située dans un milieu élastique linéaire isotrope.</p>		<p><b>Expressions analytiques</b> Kirsch (1898) ; Poulos et Davis (1974, pp. 229-230)</p>
<p>Cavité sphérique soumise à une pression interne uniforme et située dans un milieu :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- élastique linéaire et isotrope ;</li> <li>- élastoplastique (critère de von Mises).</li> </ul>		<p><b>Expressions analytiques et abaques</b> Mestat (1994, pp. 58-60) Nayak et Zienkiewicz (1972)</p>

TABLEAU II  
Solutions élémentaires pour l'élasticité linéaire isotrope

Test	Description du problème	Solution théorique
Colonne de sol pesante et soumise à une pression uniforme P en déformation plane (champ de déplacements unidimensionnel). H : hauteur de la colonne. E : module d'Young. $\nu$ : coefficient de Poisson.		Tassement : $w = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2E(1-\nu)}(\gamma z^2 - 2\gamma Hz - 2Pz)$ . Contrainte verticale : $\sigma_{zz} = \gamma(z-H) - P$ ; autres contraintes : $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{zz}$ .
Essai œdométrique (éprouvette cylindrique, champ de déplacements unidimensionnel, état de contraintes homogène) ( $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 0$ ).		Tassement : $w = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}(P - \sigma_{zz}^0)z$ . Contrainte verticale : $\sigma_{zz} = -P$ ; autres contraintes : $\sigma_{xx} - \sigma_{xx}^0 = \sigma_{yy} - \sigma_{yy}^0 = \frac{\nu}{1-\nu}(\sigma_{zz} - \sigma_{zz}^0)$ .
Essai triaxial sur éprouvette cylindrique pleine (champ de déplacements bidimensionnel, état de contraintes homogène) ( $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \text{constante}$ ).		Tassement : $w = -\frac{1}{E}(P_1 - 2\nu P_3)z$ ; déplacement latéral : $u = -\frac{1}{E}(P_3(1-\nu) - \nu P_1)r$ . Contrainte verticale : $\sigma_{zz} = -P_1$ ; contraintes latérales : $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -P_3$ . $P_1$ , pression monotone croissante et $P_3$ , pression maintenue constante.
Expansion d'une cavité cylindrique de section circulaire dans un massif infini sous une pression interne P (champ de déplacements unidimensionnel).		Déplacement radial : $u = \frac{P(1+\nu)R^2}{E} \frac{1}{r}$ ; contrainte radiale : $\sigma_{rr} = -\frac{PR^2}{r^2}$ ; contrainte orthoradiale : $\sigma_{\theta\theta} = -\frac{PR^2}{r^2}$ ; contrainte verticale : $\sigma_{zz} = 0$ .
Expansion d'une cavité sphérique dans un massif infini sous une pression interne P (champ de déplacements unidimensionnel).		Déplacement radial : $u = \frac{P(1+\nu)R^3}{E} \frac{1}{2r^2}$ ; contrainte radiale : $\sigma_{rr} = -\frac{PR^3}{r^3}$ ; autres contraintes : $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{PR^3}{2r^3}$ .

de Mohr-Coulomb ou de Drucker-Prager), les solutions complètes connues concernent des problèmes très particuliers dans lesquels la géométrie est simplifiée ainsi que le champ de déplacements et de contraintes. C'est le cas des problèmes « élémentaires » décrits dans les tableaux III et IV.

### Les solutions théoriques incomplètes (exactes ou approchées)

Une solution théorique incomplète d'un problème mécanique est constituée par la donnée explicite ou implicite des champs de déplacements, de déforma-

TABLEAU III  
Solutions élémentaires pour l'élastoplasticité parfaite de Mohr-Coulomb

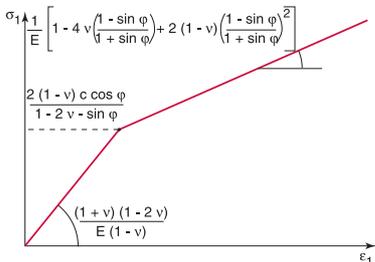
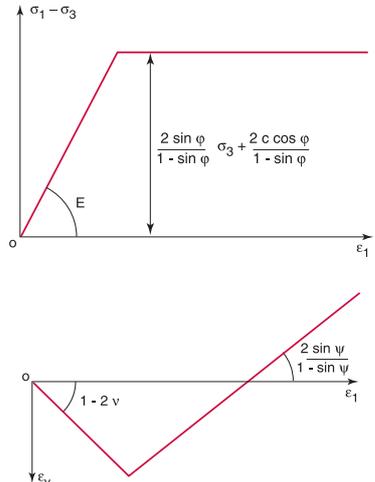
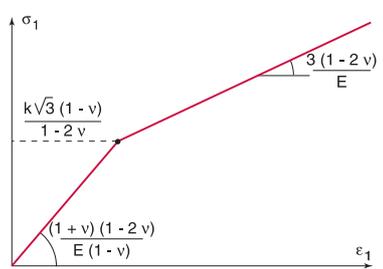
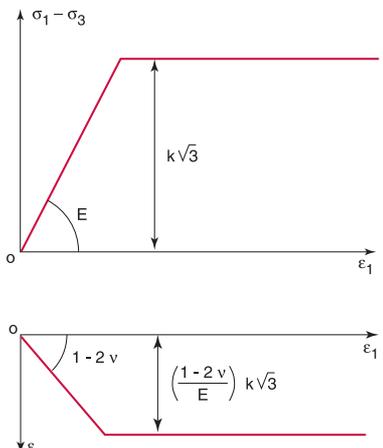
Test	Solution théorique
<p>Essai œdométrique (éprouvette cylindrique, pour la description du problème voir le tableau II).</p>	<p>Dans la zone élastique : <math>\Delta \varepsilon_1 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \Delta \sigma_1</math>.</p> <p>Dans la zone plastique : <math>\Delta \varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left[ 1 - 4\nu \left( \frac{1-\sin \varphi}{1+\sin \varphi} \right) + 2(1-\nu) \left( \frac{1-\sin \varphi}{1+\sin \varphi} \right)^2 \right] \Delta \sigma_1</math>.</p> 
<p>Essai triaxial sur éprouvette cylindrique pleine (pour la description du problème voir le tableau II). Test réalisé en déplacements imposés pour décrire le palier de plasticité.</p>	<p>Dans la zone élastique : <math>\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \sigma_3)</math>.</p> <p>Dans la zone plastique :</p> $\varepsilon_1 = \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \frac{\sigma_3}{E} + \frac{2 \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \frac{c}{E} + \varepsilon_1^p \text{ et } \frac{\Delta \varepsilon_1^p}{\Delta \varepsilon_1} = \frac{\Delta \varepsilon_1^p}{\Delta \varepsilon_1} = \frac{2 \sin \psi}{1 - \sin \psi}$ 
<p>Expansion d'une cavité cylindrique de section circulaire dans un massif limité par les rayons <math>R_1</math> et <math>R_2</math>, sous une pression uniforme <math>P</math> (<math>E, \nu, c, \varphi, \psi</math>). Pour la description du problème, voir le tableau II. <math>u_r(r), \sigma_{rr}(r), \sigma_{\theta\theta}(r), \sigma_{zz}(r)</math> <math>R_p</math> : rayon plastique. En supposant que <math>\sigma_{rr}</math> et <math>\sigma_{\theta\theta}</math> sont les contraintes principales extrêmes.</p>	<p>Dans la zone élastique, pour <math>R_p \leq r \leq R_2</math> :</p> $\sigma_{rr} = \frac{c \cos \varphi}{R_2^2 + R_p^2 \sin \varphi} \left( 1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right); \sigma_{\theta\theta} = \frac{c \cos \varphi}{R_2^2 + R_p^2 \sin \varphi} \left( 1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right); \sigma_{zz} = \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$ $u_r = \frac{1+\nu}{E} \frac{c \cos \varphi}{R_2^2 + R_p^2 \sin \varphi} \left( (1-2\nu)r + \frac{R_2^2}{r} \right)$ <p>Dans la zone plastique, pour <math>R_1 \leq r \leq R_p</math> :</p> $\sigma_{rr} = \frac{c}{\tan \varphi} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{P}{c} \tan \varphi \right) \left( \frac{R_1}{R_p} \right)^{\frac{2 \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} \right]; \sigma_{\theta\theta} = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} + \left( \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right) \sigma_{rr};$ $\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \text{ avec}$ $P = \frac{c}{\tan \varphi} \left\{ \left( \frac{R_p}{R_1} \right)^{\frac{2 \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} \left[ 1 + \frac{\sin \varphi (R_2^2 - R_p^2)}{R_2^2 + R_p^2 \sin \varphi} \right] - 1 \right\}$ $u_r = \frac{1+\nu}{E} \frac{c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \left( 1 - 2\nu - \sin \psi + \frac{1 - 2\nu + \sin \varphi \sin \psi}{2 \sin \varphi} \right) r$ $- \frac{1 + \nu c \cos \varphi (1 - 2\nu + \sin \varphi \sin \psi)}{E (1 - \sin \varphi \sin \psi)} \left( \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{R_2^2 - R_p^2}{R_2^2 + R_p^2 \sin \varphi} \right) \left( \frac{r}{R_p} \right)^{\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} R_p$ $+ \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi \sin \psi} \left( \sin \psi + \frac{R_2^2 - R_p^2 \sin \varphi \sin \psi}{R_2^2 + R_p^2 \sin \varphi} \right) \left( \frac{r}{R_p} \right)^{\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} R_p$

TABLEAU IV  
Solutions élémentaires pour l'élastoplasticité parfaite de von Mises

Test	Solution théorique
Essai œdométrique (éprouvette cylindrique, pour la description du problème voir le tableau II).	<p>Dans la zone élastique : <math>\Delta \varepsilon_1 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)} \Delta \sigma_1</math>.</p> <p>Dans la zone plastique : <math>\Delta \varepsilon_1 = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} \Delta \sigma_1</math>.</p> 
Essai triaxial sur éprouvette cylindrique pleine (pour la description du problème voir le tableau II). Le test est réalisé en déplacements imposés pour pouvoir décrire le palier de plasticité.	<p>Dans la zone élastique : <math>\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \sigma_3)</math>.</p> <p>Dans la zone plastique : <math>\varepsilon_1 = \frac{1}{E}k\sqrt{3} + \varepsilon_1^p</math> et <math>\Delta \varepsilon_v^p = \Delta \varepsilon_v = 0</math>.</p> 
Expansion d'une cavité cylindrique de section circulaire dans un massif infini. Pour la description du problème, voir le tableau II.	Voir l'abaque donné par Hodge et White (1950) [reproduit dans Mestat (1994), p. 56] Exemples de calcul par éléments finis : Nayak et Zienkiewicz (1972) ; Owen et Hinton (1980) ; Mestat (1994).
<p>Le critère de von Mises s'écrit : <math>F(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2} - k \leq 0</math> avec <math>k</math> la résistance au cisaillement et <math>J_2</math>, le déviateur des contraintes</p> $J_2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{6}$	

tions et de contraintes en quelques régions ou frontières particulières du domaine étudié. Ces solutions ne sont pas très nombreuses même en élasticité linéaire. Les plus intéressantes concernent des ouvrages-types : ouvrages souterrains et soutènements (tableau V).

Des solutions incomplètes ont également été obtenues pour d'autres systèmes de chargement (par exemple : cisaillement en surface ou appliqué sur une cavité, rotation d'un écran rigide) ou d'autres formes géométriques (elliptique, sphérique, rectangulaire). Elles peuvent être trouvées dans les références suivantes :

➤ pour les ouvrages souterrains : Poulos et Davis (1974) ; Uriel et Sagaseta (1989) ; Einstein et Schwartz (1979) ;

➤ pour les ouvrages de soutènement : Finn (1963) ; Baladi (1968) ; Poulos et Davis (1974) ; Winterkorn et Fang (1975).

Dans cette catégorie, on peut également inclure les solutions fournies par l'étude de la stabilité des ouvrages (calcul à la rupture dans les milieux cohérent et pulvérulent). En effet, un calcul incrémental par la méthode des éléments finis de type déplacements et avec une technique de résolution appropriée (accélération de la convergence, méthode de rigidité tangente, etc.) permet d'approcher le mécanisme de rupture et d'obtenir des valeurs limites généralement proches des valeurs théoriques (pourvu que le maillage soit suffisamment fin et les chargements appliqués avec de petits accroissements lorsque les mouvements devien-

TABLEAU V  
Exemples de solutions théoriques incomplètes

Description du problème – Variable calculée	Référence
<p>Contrainte tangentielle <math>\sigma_{\theta\theta}</math> au bord d'un tunnel (de section circulaire) soumis à une pression interne uniforme et situé dans un milieu élastique linéaire <i>anisotrope</i>. Calcul en déformation plane (section transversale du tunnel). La loi de comportement s'écrit :</p> $\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_1}{E_1} & \frac{-\nu_2}{E_2} & 0 \\ \frac{-\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_2}{E_2} & 0 \\ \frac{-\nu_2}{E_2} & \frac{-\nu_2}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix}$ <p>On pose : <math>\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i2}a_{j2}}{a_{22}}</math> (condition de déformation plane suivant l'axe Oy).</p>	<p>Expression analytique Lekhnitskii (1963, pp. 163-167)</p> $\sigma_{\theta\theta} = PE_{\theta}\alpha \left[ (A_1 + A_2)\sin^2\theta + A_1A_2(A_1 + A_2)\cos^2\theta - A_1A_2 + (1 - A_1^2)(1 - A_2^2)\sin^2\theta\cos^2\theta \right]$ <p>avec</p> $\frac{1}{E_{\theta}} = \gamma\cos^4\theta + \alpha\sin^4\theta + \beta\sin^2\theta\cos^2\theta$ $A_1A_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}; A_1 + A_2 = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha} + 2\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}}; A_1^2 + A_2^2 = \frac{\beta}{\alpha}$ <p>et</p> $\alpha = \beta_{11}; \beta = 2\beta_{12} + \beta_{44}; \gamma = \beta_{22} \text{ et } \beta_{44} = \frac{1}{G}$ <p>Exemple de calcul par éléments finis (Mestat, 1997).</p>
<p>Variation de la contrainte tangentielle autour d'un tunnel (de section circulaire) proche de la surface du terrain naturel. Simulation du creusement dans un milieu élastique linéaire, isotrope et semi-infini.</p>	<p>Tables numériques : Mindlin (1940) ; Poulos et Davis (1974, p. 233). Exemple de calcul par éléments finis : Mestat (1994, pp. 137-139).</p>
<p>Distribution de la contrainte horizontale derrière un écran de soutènement rigide soumis à une translation horizontale (interface sol-mur lisse ou rugueuse, sol élastique linéaire isotrope). <math>\gamma</math> : poids volumique. <math>h</math> : hauteur du soutènement. <math>d</math> : valeur de la translation.</p>	<p>Expression analytique : Finn (1963) ; Poulos et Davis (1974, pp. 306-307). Cas d'un écran parfaitement lisse :</p> $\sigma_{xx} = \frac{\nu\gamma z}{1-\nu} + \frac{4zh}{(z+h)^3(z-h)\pi(1-\nu^2)} \frac{Edh}{\pi(1-\nu^2)}$ <p>Cas d'un écran parfaitement rugueux :</p> $\sigma_{xx} = \frac{\nu\gamma z}{1-\nu} + \frac{4dh}{\pi(3\beta-\rho)} \left( \frac{\beta}{(\beta+\rho)(z^2-h^2)} - \frac{\rho h - \beta z}{(h+z)^3} \right)$ <p>avec <math>\beta = \frac{1-\nu^2}{E}</math> et <math>\rho = \frac{\nu(1+\nu)}{E}</math>.</p>

ment importants). Les solutions de l'analyse limite peuvent donc être utilisées pour vérifier un logiciel d'éléments finis classique. Le cas le plus usuel considère les valeurs de charge limite des fondations superficielles.

Le calcul à la rupture fournit également des solutions incomplètes *approchées*, correspondant à un encadrement de la charge limite par une borne supérieure et une borne inférieure. L'intervalle peut être plus ou moins important selon les problèmes traités : tunnels (en section courante ou au front de taille), fouilles soutenues ou non, fondations en bord de talus, etc. Bien que moins intéressants que les charges limites exactes, ces encadrements peuvent être utilisés pour des vérifications particulières.

Le tableau VI regroupe les solutions théoriques de charge limite les plus utiles pour vérifier le fonctionnement d'un logiciel de calcul par éléments finis dans le domaine de l'élastoplasticité parfaite. Les solutions disponibles impliquent essentiellement les lois de comportement élastique parfaitement plastique de Tresca et de Mohr-Coulomb. Ces vérifications sont essentielles car dans la pratique ces lois sont les plus utilisées par les ingénieurs de bureau d'études. D'autres solutions théoriques ont été obtenues dans des cas plus complexes. On peut citer notamment les travaux concernant les fondations superficielles sur des massifs de sol dont la cohésion non drainée est proportionnelle à la profondeur (Davis et Booker, 1973 ; Matar et Salençon, 1979 ; Meyerhof, 1982).

Pour les lois plus complexes (par exemple : élastoplasticité avec écrouissage), les solutions théoriques sont quasiment inexistantes. La vérification est alors très délicate, néanmoins on propose une approche originale dans la section « Pratique de la vérification de la programmation d'une loi de comportement avancée » qui complète l'utilisation des résultats de simulations d'essais de laboratoire en champ homogène (triaxiaux ou oedométriques).

### Les solutions numériques de référence

Les solutions numériques de référence concernent des ouvrages-types de la géotechnique. Il s'agit de problèmes simplifiés, mais qui demeurent représentatifs du fonctionnement réel des ouvrages et dont une modélisation (une solution) a été publiée dans la littérature. Les calculs peuvent être réalisés avec la méthode des éléments finis ou toute autre méthode numérique (différences finies, formulation mixte, volumes finis, etc.). Une vérification rigoureuse nécessite souvent de croiser plusieurs références traitant du même exemple ou d'un cas similaire. Un travail bibliographique important doit donc accompagner l'effort de vérification. Le tableau VII regroupe quelques solutions de référence numériques utiles pour la comparaison des performances des logiciels d'éléments finis. Ces références fournissent généralement des courbes charge-déplacement qui permettent d'effectuer la comparaison.

TABLEAU VI  
Quelques solutions de référence pour la vérification des logiciels (élastoplasticité parfaite)

Élasto-plasticité	Problème	Solution théorique	Références de calcul
Tresca (E, $\nu$ , $c_u$ )	Fondation filante souple sur un sol non pesant. P, pression uniforme appliquée sur la largeur B.	Tassement au centre de la fondation tant que le sol reste élastique : $s = 2,98 \frac{(1-\nu^2)PB}{E}$ . Charge limite (Prandtl, 1921) : $P_{\text{limite}} = (\pi + 2) c_u$ .	<i>Courbe charge-tassement</i> : Griffith (1982a) Mestat et al. (1999a, pp. 48-51)
	Fondation circulaire rigide sur un sol non pesant. P, pression uniforme appliquée sur la largeur B.	Tassement au centre de la fondation tant que le sol reste élastique : $s = \frac{(1-\nu^2)PB}{E}$ . Charge limite (Cox et al., 1961) : $P_{\text{limite}} = 5,69 c_u$ .	<i>Courbe charge-tassement</i> : de Borst et Vermeer (1982) Mestat (1994, pp. 109-112)
	Stabilité d'une fouille verticale de hauteur H ; $\gamma$ est le poids volumique du sol.	Encadrement de la charge limite : $3,635 \leq \frac{\gamma H}{c_u} \leq 3,835$ .	Britto et Kusakabe (1985) Mestat et al. (2000)
Mohr-Coulomb (E, $\nu$ , $c = 0$ , $\varphi$ )	Fondation filante souple sur un sol purement frottant, non pesant d'épaisseur finie H. P, pression uniforme appliquée sur la largeur B et $q_s$ , surcharge uniforme sur le terrain naturel.	Tassement au centre de la fondation tant que le sol reste élastique : $s = C_f \frac{(1-\nu^2)PB}{E} + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} q_s H$ (facteur $C_f$ donné par les tables de Giroud, 1972) Charge limite : $P_{\text{limite}} = q_s e^{\pi \tan \varphi} \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$ .	<i>Courbe charge-tassement</i> : Mestat et al. (1995) Mestat (1994, pp. 104-105)
Mohr-Coulomb (E, $\nu$ , $c$ , $\varphi$ )	Fondation filante en bord de talus sur une pente infinie.	Charge limite : $P_{\text{limite}} = c \cotan \varphi \left[ e^{(\pi - 2\beta) \tan \varphi} \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - 1 \right]$ .	Jiang (1992)
	Fondation circulaire rigide. P, pression uniforme sur un disque dans un milieu semi-infini (épaisseur infinie).	Solution théorique de Cox et al. (1961) : $P_{\text{limite}} (\varphi = 5^\circ) = 7,44 c$ ; $P_{\text{limite}} (\varphi = 10^\circ) = 9,98 c$ ; $P_{\text{limite}} (\varphi = 15^\circ) = 13,9 c$ ; $P_{\text{limite}} (\varphi = 20^\circ) = 20,1 c$ ; $P_{\text{limite}} (\varphi = 25^\circ) = 30,5 c$ ; $P_{\text{limite}} (\varphi = 30^\circ) = 49,3 c$ ; $P_{\text{limite}} (\varphi = 35^\circ) = 85,8 c$ ; $P_{\text{limite}} (\varphi = 40^\circ) = 164 c$ .	<i>Courbe charge-tassement</i> : Mestat (1994, pp. 109-114).
	Fondations profondes.	Fondations superficielles posées au fond d'une fouille en déformation plane et en symétrie de révolution (Meyerhof, 1982). Charge limite en déformation plane pour une section transversale d'un pieu (Randolph et Houlsby, 1984).	Griffiths (1982c)
	Stabilité d'une pente sous son poids propre (coefficient de sécurité).	Comparaison avec la méthode de calcul traditionnelle des ouvrages en terre : méthode des tranches.	<i>Courbe charge-tassement</i> : Smith et Griffiths (1982) ; Mestat et al. (1999a)
	Stabilité d'une excavation verticale de hauteur H dans un milieu pulvérulent sous le poids propre du massif.	Encadrement de la charge limite : $2 \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \leq \frac{\gamma H}{c} \leq 3,83 \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$ .	<i>Courbe charge-tassement</i> : Smith et Griffiths (1982) ; Mestat et al. (1999a)
Mohr-Coulomb (E, $\nu$ , $c$ , $\varphi$ )	Stabilité des ouvrages souterrains.	Divers encadrements de charges limites obtenus pour des tunnels (analyse dans une section transversale ou longitudinale) et pour différents types de sollicitations : Atkinson et Potts (1977) ; Davis et al. (1980) ; Britto et Kusakabe (1985) ; Leca et Dormieux (1990) ; Leca et Panet (1988) ; Sloan et Assadi (1993) ; Chambon et Corté (1991) ; Antao (1997).	<i>Courbe charge-tassement</i> : Mestat (1994, pp. 140-159)
	Stabilité des ouvrages de soutènement.	Divers encadrements de charges limites obtenus pour des fouilles verticales en déformation plane ou en symétrie de révolution : Salençon (1983) ; Britto et Kusakabe (1983, 1984) ; Bakker et Vermeer (1986) ; Bakker et Brinerve (1991).	<i>Courbe charge-tassement</i> : Mestat et al. (2000)
Drucker-Prager (E, $\nu$ , $c$ , $\varphi$ )	Fondation filante sur un milieu semi-infini. P, pression uniforme appliquée sur la largeur B.	Comparaison avec une solution obtenue par éléments finis. On ne connaît pas de solution théorique pour ce critère de plasticité.	<i>Courbe charge-tassement</i> : Desai et Siriwardane (1984)

Lorsqu'un problème et sa solution sont décrits de façon complète dans la littérature, le développeur ou l'utilisateur peut envisager de refaire une modélisation à l'aide de son propre logiciel et de comparer les résultats numériques obtenus à ceux indiqués dans la référence. Cette comparaison est notamment intéressante pour apprécier des valeurs de déplacements, lorsque la solution théorique n'est pas connue ou est incomplète (par exemple, lorsqu'elle ne fournit qu'une estimation de la charge limite). Dans le même temps, on effectue aussi une confrontation entre deux codes de calcul et, éventuellement, deux méthodes

numériques, deux techniques de résolution pour les problèmes non linéaires, deux types d'éléments finis, etc. Cette manière de procéder ne concerne évidemment que les lois de comportement les plus répandues dans les logiciels, comme l'élastoplasticité parfaite ou les modèles Cam-Clay. Par exemple, la figure 1 présente une comparaison entre les logiciels CÉSAR-LCPC et PLAXIS dans le cas de la modélisation d'une fondation superficielle en déformation plane. En revanche, cela devient impossible pour une loi de comportement avancée qui n'a été introduite que dans un seul logiciel d'éléments finis.

TABLEAU VII  
Quelques solutions de référence pour la vérification des logiciels (critères de Tresca et de Mohr-Coulomb)

Ouvrages	Références bibliographiques
Fondations superficielles	Zienkiewicz et al. (1969, 1975) ; de Borst (1982) ; Griffiths (1982a ; 1982b) ; Casciaro et Cascini (1982) ; Sloan et Randolph (1982) ; de Borst et Vermeer (1984) ; Mahapatra et Dasgupta (1988, 1990, 1991) ; van Langen et Vermeer (1990a) ; Jiang (1992) ; Mestat (1994)
Fondations profondes	Griffiths (1982c) ; de Borst et Vermeer (1982) ; Randolph et Houlsby (1984) ; Tadjbakhsh et Frank (1985) ; Lane et Griffiths (1988) ; van Langen et Vermeer (1990b) ; Chaoui (1992) ;
Remblais et pentes	Zienkiewicz et al. (1975) ; Smith et Griffiths (1982) ; Lépidas et Magnan (1990) ; Smith (1994) ; Sassi (1996) ; Mestat et al. (1999)
Ouvrages souterrains	Atahan (1995) ; Antao (1997) ; Mestat (1994)
Ouvrages de soutènement	Christian et al. (1977) ; Smith et Griffiths (1982) ; Smith (1994)

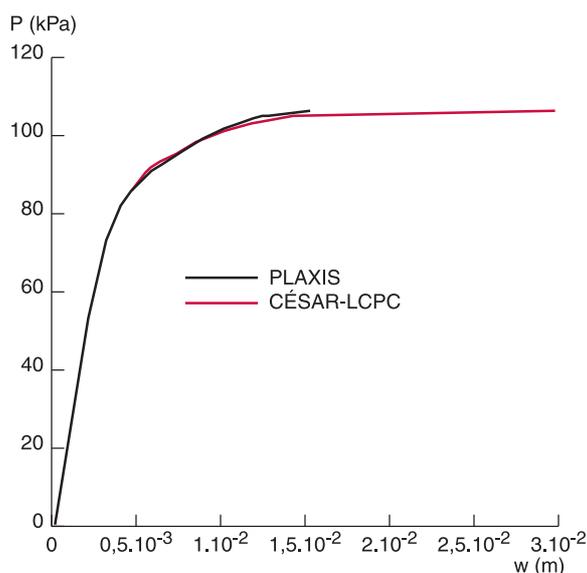


Fig. 1 - Comparaison entre les résultats fournis par CÉSAR-LCPC et PLAXIS pour le test de la fondation superficielle en déformation plane (critère de Tresca).

## De la difficulté de recalculer une solution de référence

Si les solutions numériques de référence permettent d'aborder des problèmes d'ouvrages et de tester quelques lois de comportement évoluées, elles ne sont véritablement pertinentes qu'à la condition d'être parfaitement décrites à tous les niveaux (mise en données, résolution et exploitation des résultats). En effet, il est arrivé plusieurs fois, en choisissant de traiter un problème tiré de la littérature, de devoir croiser plusieurs articles et communications (voire de remonter jusqu'à la thèse) pour obtenir tous les renseignements assurant de traiter le même cas et dans des conditions numériques identiques. Il est également important que les auteurs ne cachent pas certaines données du problème ni les difficultés numériques qu'ils ont pu rencontrer pour obtenir cette solution. L'exploitation des résultats sous la forme graphique d'une courbe charge-déplacement (par exemple) n'est pas non plus acceptable. Pour effectuer une comparaison intéressante et quantifier les écarts, il faut accéder à des valeurs numériques avec plusieurs chiffres significatifs

et non procéder à des extrapolations à partir d'une figure publiée dans un article. Les auteurs qui présentent avec soin la modélisation et les résultats sont ainsi très rares.

Pour être reproductible et utile à la validation des logiciels, une solution numérique de référence doit concerner un problème d'ouvrage simplifié (tunnel, fondation, soutènement, barrage), mais néanmoins suffisamment compliqué pour rester représentatif du comportement réel de l'ouvrage. La présentation d'un tel problème et de sa solution numérique nécessite beaucoup de rigueur et doit inclure autant que possible les descriptions suivantes :

- la géométrie du problème, ses conditions aux limites et les conditions d'interface entre les matériaux ;
- le maillage et les types d'éléments choisis, les densités et pas de discrétisation, etc. Bref, si besoin en était, tous les aspects qui permettraient de reproduire à l'identique le maillage original ;
- la loi de comportement, les valeurs des paramètres mécaniques et hydrauliques (et éventuellement la manière dont elles ont été déterminées) ;
- l'état initial, indispensable pour les problèmes non linéaires et qui intervient directement dans la définition des chargements spécifiques aux problèmes d'excavation ;
- les lois de chargement et le phasage des travaux, avec le nombre et les valeurs des incréments de charge appliqués successivement. Ceci est fondamental pour des calculs en comportement non linéaire, où la solution dépend étroitement de l'histoire des sollicitations ;
- les interactions sol-structures prises en compte (adhérence, glissement, frottement) ;
- la méthode de résolution (Newton-Raphson, Newton-Raphson modifié, autre méthode), les tests de convergence et les tolérances imposées au cours du calcul ;
- les algorithmes utilisés pour intégrer localement les équations constitutives (schéma implicite ou explicite, itérations locales, traitement des singularités, gestion des tractions, etc.). Ces précisions sont importantes car tout traitement local particulier peut expliquer les différences observées entre les résultats fournis par deux logiciels ;
- pour des éléments quadrangulaires à huit nœuds ou hexaédriques à vingt nœuds, indiquer si l'intégration

est réduite (2 × 2 ou 2 × 2 × 2 points de Gauss) ou normale (3 × 3 ou 3 × 3 × 3 points de Gauss).

Il n'y a qu'à ces conditions que des « références numériques » pourront être employées avec profit pour vérifier un logiciel de calcul. Ces références constituent un complément indispensable aux triviales solutions théoriques et aux quelques solutions incomplètes connues, comme les charges limites de fondation. Le tableau VII regroupe des références tirées de la littérature et qui respectent à peu près l'ensemble des conditions énoncées ci-dessus.

## Pratique de la vérification de la programmation d'une loi de comportement avancée

Parmi les développements réalisés dans les logiciels, l'exemple le plus habituel concerne l'introduction d'une nouvelle loi de comportement mécanique. Pour vérifier sa programmation, il convient d'établir des solutions théoriques adéquates. Le plus simple consiste à considérer les jeux de données correspondant aux problèmes suivants que l'on a su résoudre par ailleurs (tableau VIII) :

- problèmes unidimensionnels en contrainte et en déplacement (compression ou extension d'une colonne en déformation plane ou en symétrie de révolution) ;
- essai œdométrique (modèle en symétrie de révolution, problème unidimensionnel en déplacement). Il est généralement aisé d'obtenir l'état de déformation (qui se réduit à la déformation axiale) en fonction de l'état de contraintes ;
- essai en déformation plane (« mur » infiniment long soumis à une pression uniforme sur sa face supérieure) ;
- essai triaxial sur éprouvette cylindrique (modèle en symétrie de révolution) ou cubique (modèle tridimensionnel). Vu la complexité de certaines lois, il est généralement impossible d'établir une solution explicite en dehors de l'essai de compression isotrope. On doit alors résoudre pas à pas le système d'équations différentielles relatif à un chemin de contraintes ou de déformations donné. Pour la vérification, les chemins considérés doivent activer, séparément ou ensemble, les principaux mécanismes qui caractérisent la loi de comportement vérifiée (notamment mécanismes volumique et déviatoire) ;
- problèmes bidimensionnels ou tridimensionnels (expansions cylindrique et sphérique sous pression uniforme). La vérification doit également concerner la troisième dimension. Pour cela, les solutions des pro-

TABLEAU VIII  
Solutions élémentaires pour l'élastoplasticité avec écoulement (exemple pour 1 mécanisme plastique)

Test	Solution théorique
Essai œdométrique (éprouvette cylindrique, pour la description du problème voir le tableau II).	<p>Dans la zone élastique : <math>\Delta \varepsilon_1 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \Delta \sigma_1</math> (par exemple, si l'élasticité est linéaire). Les déformations sont reliées directement aux contraintes : par exemple, <math>\varepsilon_v^e = \varepsilon_v^e(p, q)</math> et <math>\varepsilon_d^e = \varepsilon_d^e(p, q)</math>.</p> <p>Dans la zone plastique, la surface de charge s'écrit généralement sous la forme : <math>F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = f(p, q) - k(\varepsilon_v^p, \varepsilon_d^p) = 0</math> où <math>f</math> et <math>k</math> sont deux fonctions scalaires. Les conditions aux limites de l'essai sont telles que le champ de déformation se réduit à la seule composante axiale non nulle. Par conséquent, on a : <math>\varepsilon_v^p = \varepsilon_v - \varepsilon_v^e = \varepsilon_1 - \varepsilon_v^e</math> et <math>\varepsilon_d^p = \frac{2}{3}\varepsilon_1 - \varepsilon_d^e</math>. Finalement, la déformation axiale est reliée à l'état de contraintes par l'équation explicite ou implicite :</p> <p><math>f(p, q) = k(\varepsilon_1 - \varepsilon_v^e(p, q), \frac{2}{3}\varepsilon_1 - \varepsilon_d^e(p, q)) = 0</math>. Sa détermination dépend de la donnée de l'état de contraintes. Le report des contraintes calculées par éléments finis dans cette relation permet de comparer les valeurs de déplacements théoriques et calculées (pour une éprouvette de hauteur unité, les déformations et les déplacements sont confondus) et donc de vérifier que l'on a obtenu la bonne solution. Le calcul de la solution complète et donc l'évaluation de la contrainte latérale nécessitent d'intégrer l'équation différentielle qui la détermine.</p> <p>Par exemple, dans le cas du modèle Cam-Clay, on obtient la relation suivante entre les contraintes et la déformation axiale :</p> $\varepsilon_1 = \varepsilon_v^e(p, q) + \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{q^2 + M^2 p^2}{M^2 p p_{c0}} \right).$
Essai triaxial sur éprouvette cylindrique pleine (pour la description du problème voir le tableau II). Le test est réalisé en déplacements imposés pour pouvoir décrire le palier de plasticité ( $d\sigma_3 = 0$ pour l'essai de compression).	<p>Dans la zone élastique : <math>\Delta \varepsilon_1 = a \Delta \sigma_1</math></p> <p>Dans la zone plastique, il faut intégrer pas à pas les deux équations différentielles suivantes :</p> $d\varepsilon_1 = d\varepsilon_1^e + d\varepsilon_1^p = a d\sigma_1 + \frac{1}{H} \frac{\partial G}{\partial \sigma_1} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 \right) ;$ $d\varepsilon_3 = d\varepsilon_3^e + d\varepsilon_3^p = b d\sigma_1 + \frac{1}{H} \frac{\partial G}{\partial \sigma_3} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 \right).$ <p>Un petit logiciel d'intégration peut être facilement développé. Les coefficients <math>a</math> et <math>b</math> sont définis par les équations de l'élasticité linéaire ou non linéaire ; <math>H</math> est le module d'écrouissage ; <math>F</math>, la surface de charge et <math>G</math>, le potentiel plastique.</p>
Expansion d'une cavité cylindrique de section circulaire dans un massif infini.	Logiciel de différences finies à développer pour intégrer les équations de l'équilibre et celles du comportement.
<p>La surface de charge du modèle Cam-Clay s'écrit : <math>F(\sigma_{ij}) = q^2 + M^2 p(p - p_c) \leq 0</math> avec <math>p_c</math> la variable d'écrouissage dépendant de la déformation volumique plastique <math>\varepsilon_v^p (p_c = p_{c0} \exp(\alpha \varepsilon_v^p))</math> <math>p</math> est la contrainte moyenne <math>p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}</math> et <math>q</math>, le déviateur des contraintes : <math>q = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}}</math>.</p>	

blèmes d'expansion sont très utiles puisqu'ils sont à la fois des problèmes de révolution et de déformation plane. Pour un même problème, on peut ainsi tester trois modélisations différentes de l'expansion (fig. 2). Là encore, il est nécessaire de disposer d'un logiciel d'intégration des équations différentielles pour obtenir les solutions théoriques. Des logiciels de type différences finies sont bien adaptés même pour des lois complexes.

Le tableau VIII illustre ces tests dans le cas du modèle Cam-Clay modifié (élastoplasticité avec un mécanisme plastique volumique). Ceux-ci ont le mérite d'exister, mais ils ne font intervenir que des sollicitations simplistes. Dans la mesure du possible, il faut les compléter par des tests de type « ouvrages » afin de tester des états de contraintes plus compliqués, véritablement tridimensionnels. Dans cette catégorie de tests, les plus simples concernent les fondations superficielles, pour lesquelles plusieurs problèmes de charge limite ont été résolus de manière exacte en déformation plane ou de révolution. Ces solutions sont connues pour le critère de Mohr-Coulomb, ou de Tresca, et des modélisations par éléments finis de type déplacements permettent de retrouver ces solutions. En revanche, pour une loi de comportement avancée (par exemple de type élastoplastique avec écrouissage), on ne peut plus procéder ainsi car il n'existe aucune solution de ce type. La vérification nécessite une démarche particulière.

Une procédure originale a été proposée. Il s'agit de prendre comme référence un calcul réalisé avec le critère de plasticité parfaite associé à la loi considérée (par exemple : critère de von Mises, de Drucker-Prager, de Lade ou de Matsuoka-Nakai, pour les plus connus). L'intérêt est alors d'utiliser une programma-

tion déjà vérifiée pour effectuer ce calcul : à savoir celle de l'élastoplasticité parfaite. Si le critère considéré n'est pas programmé, il est très facile de l'introduire en lieu et place du critère de von Mises ou de Drucker-Prager, par exemple. On peut aussi naturellement écrire un sous-programme spécial. Ensuite, on procède par étapes en activant, dans des calculs successifs, les différentes composantes du modèle (élasticité non linéaire, élastoplasticité sans écrouissage, puis élastoplasticité avec écrouissage). Pour des chargements monotones croissants, les courbes de charge-déplacement données par les lois avec écrouissage et par la loi de référence (élastoplasticité sans écrouissage) doivent toutes tendre vers la même limite pour les grandes déformations. La figure 3 illustre cette propriété, qui permet de vérifier la cohérence du modèle et son bon fonctionnement dans un cas de sollicitations non triviales.

Il est impossible d'aller plus loin dans la vérification sans aborder la validation de la loi de comportement elle-même par une comparaison avec des mesures sur un ouvrage réel ou sur un modèle centrifugé. À cause des nombreuses difficultés inhérentes à ce type d'étude, la « validation des modèles » ne sera pas abordée dans cet article. Le lecteur désireux d'en savoir plus pourra se reporter avec profit aux travaux du GRECO-Géomatériaux (Cambou et *al.*, 1995 ; Meimon et *al.*, 1995) et à des publications relatant des confrontations entre les résultats de modèles numériques et des mesures sur ouvrages en vraie grandeur (Duncan, 1994 ; Gens, 1995 ; Mestat, 2001).

Enfin, dans cette démarche de vérification, il conviendra de ne pas oublier de contrôler que les méthodes de résolution globale (processus itératifs) et les types de

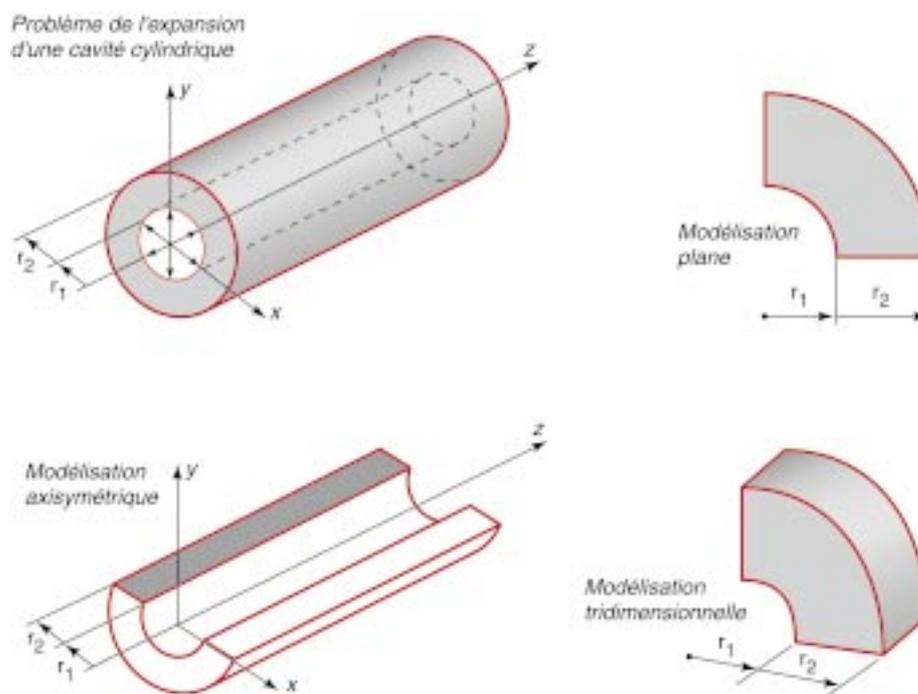


Fig. 2 - Modélisations de l'expansion d'une cavité cylindrique dans un massif de sol.

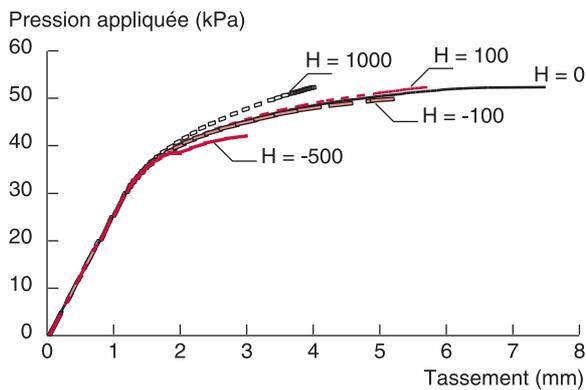


Fig. 3 - Vérification par des calculs successifs de la programmation du modèle de von Mises avec écoulement (module d'écrouissage H constant) et comparaison avec un calcul en élastoplasticité parfaite (H = 0) dans le cas d'une fondation superficielle.

chargement possibles (notamment des chargements de type excavation ou remblaiement) sont bien compatibles avec la loi programmée.

## Conclusion

Mettre régulièrement à la disposition des utilisateurs de nouvelles possibilités de calcul (plus fiables et plus

performantes) est un enjeu de première importance pour un logiciel ayant une forte vocation dans la recherche. La programmation de modèles et d'algorithmes nouveaux doit être menée avec une grande rigueur et vérifiée avec soin. Plus les modèles sont complexes et plus les moyens de vérification non triviaux deviennent rares. Cet article a présenté les moyens disponibles pour vérifier la programmation des lois de comportement de type élastoplastique dans un logiciel d'éléments finis. Un référentiel de tests a été proposé pour les problèmes de géotechnique. Il permet actuellement de couvrir tous les modèles introduits dans le module de résolution MCNL de CÉSAR-LCPC. Ce référentiel est naturellement perfectible, et il s'enrichit chaque année de nouveaux cas-tests au gré des études et des développements réalisés. Ce référentiel de tests et la manière de procéder sont évidemment transposables à tout autre logiciel. La vérification n'a pour but que de garantir le bon fonctionnement du logiciel et d'assurer que les résultats fournis correspondent bien au modèle numérique élaboré par l'utilisateur. Elle s'inscrit dans la volonté d'aller vers une démarche d'Assurance Qualité dans le domaine des calculs par éléments finis en génie civil. Ce travail méthodologique est également le fruit d'une collaboration avec le Pôle d'expertise sur l'emploi des éléments finis de l'Association française pour le génie civil (AFGC).

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AFNOR (1990), *Guide de validation des progiciels de calcul des structures*, Collection « Afnor Technique », Paris, 362 pages.

ANTAO A.M. (1997), *Analyse de la stabilité des ouvrages souterrains par une méthode cinématique régularisée*, Thèse de doctorat de l'ENPC, 216 pages.

ATAHAN C. (1995), *Modélisation numérique du creusement d'un tunnel à l'aide d'un bouclier à pression de boue*, Thèse de doctorat de l'ENPC, 452 pages.

ATKINSON J.H., POTTS D.M. (1977), Stability of a shallow circular tunnel in cohesionless soil, *Géotechnique*, vol. 27, 2, pp. 203-215.

BAKKER K.J., BRINKGREVE R.B.J. (1991), Deformation analysis of a sheet pile wall, using a two dimensional model, *Proc. 10th European Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Florence, pp. 655-658.

BAKKER K.J., VERMEER P.A. (1986), Finite element analyses of sheetpile walls, *Proc. 2nd Int. Symp. on Numerical Models in Geomechanics, NUMOG II*, Ghent, pp. 409-416.

BALADI G. (1968), *Distribution of stresses and displacements within and under long elastic and viscoelastic embankments*, PhD Thesis, Purdue University.

BESCOND B., BOTTERO A., TOUZOT G. (1974), *Fondations sur sols bi-couches. Tables de calcul des tassements*, Presses de l'université du Québec, Eyrolles éditeur, Paris, 322 pages.

de BORST R. (1982), Calculation of collapse loads using higher order elements, *IUTAM Conf. on Deformation and failure of granular materials*, Delft, pp. 503-513.

de BORST R., VERMEER P. (1982), Finite element analysis of static penetration tests, *Second European Symp. on Penetration Testing*, Amsterdam, pp. 457-462.

de BORST R., VERMEER P. (1984), Possibilities and limitations of finite elements for limit analysis, *Géotechnique*, vol. 34, 2, pp. 199-210.

BOUVARD-LECOANET A., COLOMBET G., ESTEULLE F. (1988), *Ouvrages souterrains. Conception. Réalisation. Entretien*, Presses de l'ENPC, 272 pages.

BRIOIST J.-J., HUMBERT P., MESTAT Ph. (1995), Some remarks on the validation of finite element codes in geotechnics, *Numerical Models in Geomechanics, NUMOG V*, Davos, septembre 1995, Balkema, pp. 681-686.

BRITTO A.M., KUSAKABE O. (1983), Stability of unsupported axisymmetric excavations in soft clay, *Géotechnique*, vol. 32, 3, pp. 261-270.

BRITTO A.M., KUSAKABE O. (1984), On the stability of supported excavations, *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 21, pp. 338-348.

BRITTO A.M., KUSAKABE O. (1985), Upper bound mechanisms for undrained axisymmetric problems, *5th Int. Conf. in Numerical Methods in Geomechanics*, Nagoya, Balkema, pp. 1691-1698.

BROWN E.T., BRAY J.W., LADANYI B., HOEK E. (1983), Ground response curves for rock tunnels, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, vol. 109, 1, pp. 15-39.

BURMINSTER D.M. (1943), The theory of stresses and displacements in layered systems and applications to the design

- of airport runways, *Proc. Highway Res. Board*, **vol. 23**, pp. 127-148.
- CASCIARO R., CASCINI L. (1982), Limit analysis by incremental-iterative procedure, *IUTAM Conf. on Deformation and failure of granular materials*, Delft, pp. 523-533.
- CAMBOU B., FAVRE J.-L., LANIER J., SHAHROUR I., SHAO J.-F. (1995), La validation des codes de calcul. Chapitre 5 in *Mécanique des Géomatériaux*, pp. 445-562, Darve et al. (ed.), éditions Hermès.
- CHAMBON P., CORTÉ J.-F. (1991), *Étude sur modèles réduits centrifugés. Application aux tunnels à faible profondeur en terrain meuble pulvérulent*, Études et recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées, série géotechnique, **GT 48**, 163 pages.
- CHAOUI F. (1992), *Étude tridimensionnelle du comportement des pieux dans les pentes instables*, Thèse de doctorat de l'ENPC, Paris, 355 pages.
- CHEN W.F. (1975), *Limit analysis and soil plasticity*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.
- CHRISTIAN J.T., HAGMANN A.J., MARR W.A. (1977), Incremental plasticity analysis of frictional soils, *Int. J. for Num. and Anal. Meth. in Geomech.*, **vol. 1, 4**, pp. 343-375.
- COX A.D., EASON G., HOPKINS H.G. (1961), Axially symmetric plastic deformation in soils, *Phil. Trans. Royal Soc.*, A254, pp. 1-47.
- DAVIS E.H., BOOKER J.R. (1973), The effect of increasing strength with depth on the bearing capacity of clays. *Géotechnique*, **vol. 23, 4**, pp. 551-563.
- DAVIS E.H., GUNN M.J., MAIR R.J., SENEVIRATNE H.N. (1980), The stability of shallow tunnels and underground openings in cohesive material, *Geotechnique*, **vol. 30, 4**, pp. 397-416.
- DESAI C.S., SIRIWARDANE H.J. (1984), *Constitutive laws for engineering materials with emphasis on geologic materials*, Prentice Hall, 468 pages.
- DUNCAN J.M. (1994), The role of advanced constitutive relations in practical applications, *14th Int. Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering*, New Delhi, **vol. 5**, pp. 31-48.
- EINSTEIN H.H., SCHWARTZ C.W. (1979), Simplified analysis for tunnel supports, *Journal of the geotechnical Engineering Division, ASCE*, **vol. 105**, GT4, pp. 499-518.
- FINN W.D. (1963), Boundary value problems of soil mechanics, *J. of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, **vol. 89**, SM5, pp. 39-72.
- GENS A. (1995), General report : prediction, performance and design, *Pre-failure Deformation of Geomaterials*, Shibuya et al. (eds), Balkema, **vol. 2**, pp. 1233-1256.
- GIROUD J.-P. (1972a), *Tables pour le calcul des fondations. Tome 1 : Tassement (charges concentrées, fondations circulaires)*, Dunod, Paris, 360 pages.
- GIROUD J.-P. (1972b), *Tables pour le calcul des fondations. Tome 2 : Tassement (fondations rectangulaires et de forme quelconque)*, Dunod, Paris, 506 pages.
- GIROUD J.-P. (1972c), *Tables pour le calcul des fondations. Tome 3 : Force portante*, Dunod, Paris, 446 pages.
- GRIFFITHS D.V. (1982a), Computation of bearing capacity factors using finite elements, *Geotechnique*, **vol. 32, 3**, pp. 195-202.
- GRIFFITHS D.V. (1982b), Computation of bearing capacity on layered soils, *Int. Conf. of Num. Methods*, Edmonton, **vol. 1**, pp. 163-170.
- GRIFFITHS D.V. (1982c), Elasto-plastic analyses of deep foundations in cohesive soil, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **vol. 6**, pp. 211-218.
- HODGE P.G., WHITE G.N. (1950), A quantitative comparison of flow and deformation theories of plasticity, *J. Appl. Mech.*, **vol. 17**, pp. 180-184.
- JIANG G.L. (1992), Application de l'analyse limite à l'étude de la stabilité des massifs de sol, Thèse de doctorat de l'ENPC, 220 pages.
- KIRSCH G. (1898), Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre, *Veit. Ver. Deut. Ing.*, **vol. 48, 28**.
- LANE P.A., GRIFFITHS D.V. (1988), Computation of the ultimate pressure of a laterally loaded circular pile in frictional soil, *Numerical Methods in Geomechanics*, Innsbruck, Balkema, **vol. 2**, pp 1025-1031.
- LECA E., DORMIEUX L. (1990), Upper and lower bound solutions for the face stability of shallow circular tunnels in frictional material, *Géotechnique*, **vol. 40, 4**, pp. 581-606.
- LECA E., DORMIEUX L. (1992), Contribution à l'étude de la stabilité du front de taille d'un tunnel en milieu cohérent, *Revue française de géotechnique*, **61**, pp. 5-16.
- LECA E., PANET M. (1988), Application du calcul à la rupture à la stabilité du front de taille d'un tunnel, *Revue française de géotechnique*, **43**, pp. 5-19.
- LEKHNITSKII S.G. (1963), *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*, Holden-Day Series in mathematical physics, San Francisco, Californie, 404 pages.
- LÉPIDAS I, MAGNAN J.-P. (1990), *Fluage et consolidation des sols argileux : modélisation numérique*, Rapport de recherche LPC, **157**, LCPC, Paris, 170 pages.
- MAHAPATRA R.C., DASGUPTA S.P. (1988), The mixed finite element method in elastic and elasto-plastic axisymmetric problems, *Computers and structures*, **vol. 30, 5**, pp. 1047-1065.
- MAHAPATRA R.C., DASGUPTA S.P. (1990), Elasto-plastic modelling of plane geomechanics problems, *Computers and structures*, **vol. 37, 4**, pp. 481-502.
- MAHAPATRA R.C., DASGUPTA S.P. (1991), Elasto-plastic solution of some axially symmetric geomechanics problems by mixed finite elements, *Computers and structures*, **vol. 41, 1**, pp. 83-92.
- MARQUÈS J.M.M.C., OWEN D.R.J. (1984), Some reflections on elastic-plastic stress calculation in finite element analysis, *Computers and Structures*, **vol. 18, 6**, pp. 1135-1139.
- MATAR M., SALENÇON J. (1979), Capacité portante des semelles filantes, *Revue française de géotechnique*, **9**, pp. 51-76.
- MEIMON Y., FAVRE J.-L., LANIER J., MESTAT Ph., SHAHROUR I. (1995), Fondations superficielles. Chapitre 3

in *Les géomatériaux : avancées récentes en calcul d'ouvrages*, pp. 147-188, Darve et al. (ed.), éditions Hermès.

MESTAT Ph. (1994), *Validation du progiciel CÉSAR-LCPC en comportement mécanique non linéaire. Volume 1 : Fondations superficielles et tunnels*. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Études et recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées, série géotechnique, **GT 58**, 170 pages.

MESTAT Ph. (1997), Maillages d'éléments finis pour les ouvrages de géotechnique – Conseils et recommandations, *Bulletin des laboratoires des Ponts et Chaussées*, **212**, novembre-décembre, pp. 39-64.

MESTAT Ph. (1998), *Description de la programmation du module de résolution MCNL*, division MSGI, LCPC Paris, 36 pages.

MESTAT Ph., PRAT M., BISCH Ph., MILLARD A., PIJAUDIER-CABOT G. (1999a), *Calcul des ouvrages en interactions*, éditions Hermès Sciences, 944 pages.

MESTAT Ph., HUMBERT P., DUBOUCHET A. (1999b), Erreurs dans les modélisations par éléments finis : principaux types et méthodes de vérifications associées, *Revue française de génie civil*, **vol. 3, 7-8**, pp. 519-534.

MESTAT Ph., HUMBERT P., DUBOUCHET A., PRAT M. (1999c), Critères et mesures de performance d'un progiciel d'éléments finis – Propositions, *Revue française de génie civil*, **vol. 3, 7-8**, pp. 603-614.

MESTAT Ph., MAGNAN J.-P., DRONIUC N., HUMBERT P., BERTHELON J.-P., PAVLIK E. (2000), Étude de la stabilité d'excavations partiellement soutenues, *XIIe Colloque franco-polonais de mécanique des sols et des roches appliquée*, Paris, 3-4 juillet 2000, 8 pages.

MESTAT Ph. (2001), An overview on 25 years of numerical modeling of test embankments and tunnels, *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Tucson, Desai et al. (ed.), Balkema, pp. 1521-1526.

MEYERHOF G.G. (1982), *The bearing capacity and settlements of foundations*, Tech Press. Technical University of Nova Scotia, Halifax, Canada.

MINDLIN R.D. (1940), Stress distribution around a tunnel, *Trans. ASCE*, **vol. 105**, pp. 1117-1140.

MÜLHAUS H.B. (1985) Lower bound solutions for circular tunnels in two and three dimensions, *Rock Mechanics and Rock Engineering*, **vol. 18**, pp. 37-52.

NAYAK G.C., ZIENKIEWICZ O.C. (1972), Elastoplastic stress analysis. A generalization for various constitutive relations including strain softening, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **vol. 5**, pp. 113-135.

OWEN D.R.J., HINTON E. (1980), *Finite elements in plasticity. Theory and practice*, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K.

PANET M. (1995), *Le calcul des tunnels par la méthode convergence-confinement*, Presses de l'ENPC, 178 pages.

POULOS H.G., DAVIS E.H. (1974), *Elastic solutions for soil and rock mechanics*, John Wiley Inc, 412 pages.

PRANDTL L. (1921), Eindringungsfestigkeit und Festigkeit von Schneiden. *Z. Angew. Math. Mech.*, **vol. 1**, 15.

PRAT M., BISCH Ph., MESTAT Ph., MILLARD A., PIJAUDIER-CABOT G. (1995), *La modélisation des ouvrages*.

Collection Emploi des éléments finis en génie civil. Éditions Hermès, Paris, 770 pages.

PRAT M., BISCH Ph., MESTAT Ph., MILLARD A., PIJAUDIER-CABOT G. (1997), *Calcul des ouvrages généraux de construction*. Collection Emploi des éléments finis en génie civil. Éditions Hermès, Paris, 768 pages.

RANDOLPH M.F., HOULSBY G.T. (1984), The limiting pressure on a circular pile loaded laterally in cohesive soil, *Géotechnique*, **vol. 34, 4**, pp. 613-623.

SALENÇON J. (1983), *Calcul à la rupture et analyse limite*, Presses de l'ENPC, Paris, 366 pages.

SASSI K. (1996), *Contributions à l'étude des mécanismes de déformation des pentes instables*. Thèse de doctorat de l'INSA de Lyon, 434 pages.

SELVADURAI A.P.S. (1979), *Elastic analysis of soil-foundation interaction*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 543 pages.

SLOAN S.W., RANDOLPH M.F. (1982), Numerical prediction of collapse loads using finite element methods, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, **6**, pp. 47-76.

SLOAN S.W., ASSADI A. (1993), Stability of shallow tunnels in soft ground, *Proc. of the Wroth Memorial Symposium*, Oxford, July 1992. Predictive Soil Mechanics, Thomas Telford, pp. 644-663.

SMITH I., GRIFFITHS D.V. (1982), *Programming the finite element method*, John Wiley, Londres, 380 pages.

SMITH I. (1994), Validation of finite element solutions, *XIIIth Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, New Delhi, **vol. 5**, pp. 229-231.

TADJBAKHS S., FRANK R. (1985), *Étude par la méthode des éléments finis du comportement élastoplastique de sols dilatants. Application aux pieux sous charge axiale*, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris, Rapport de recherche LPC, **135**, 142 pages.

URIEL A.O., SAGASETA C. (1989), General report : Selection of design parameters for underground construction, *XII Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng.*, Rio de Janeiro, **vol. 4**, pp. 2521-2551.

VAN LANGEN H., VERMEER P.A. (1990a), Automatic step size correction for non-associated plasticity problems, *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, **vol. 29**, pp. 579-598.

VAN LANGEN H., VERMEER P. (1990b), Finite element analysis of a pile penetration problem in clay, *2nd European Specialty Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, Santander, 18-20 september 1990, pp. 519-527.

WINTERKORN H.F., FANG H.Y. (1975), *Foundation Engineering Handbook*, Van Nostrand Reinhold company.

ZIENKIEWICZ O.C., HUMPHESON C., LEWIS R.W. (1975), Associated and non-associated viscoplasticity and plasticity in soils mechanics, *Géotechnique*, **vol. 25, 4**, pp. 671-689.

ZIENKIEWICZ O.C., VALLIAPPAN S., KING I.P. (1969), Elasto-plastic solution of engineering problems. Initial stress, finite element approach, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **vol. 1**, pp. 75-100.

ZIENKIEWICZ O.C., NAYLOR D.J. (1972), The adaptation of critical state soil mechanics theory for use in finite elements. *Stress-strain behaviour of soils*, RHG Parry ed., G. T. Foulis and Co, Henley-on-Thames England, pp. 537-547.

## **ABSTRACT**

### **System of tests for checking the programming of constitutive laws in finite element software**

Ph. MESTAT, P. HUMBERT

The development and marketing of finite element computation software raises three major problems : checking of the computation procedures, validation of the constitutive models and, finally, the correct use of software in order to model structures (correct running of software and justification of calculation hypotheses). Many publications have already dealt with validation of the models and recommendations for the correct running of software. However, in the area of geotechnics, little attention has been paid to verification that the software functions correctly from a methodological point of view. This paper is based on experience acquired when developing the non-linear solution module in CÉSAR-LCPC in order to propose a verification strategy and a system of tests to monitor the programming of elastoplastic constitutive laws. Several examples from soil mechanics are given to illustrate the remarks, but the reader will find no difficulty in transposing them to the constitutive laws for other materials.