

Méthodologie de détermination des paramètres pour la loi de comportement élastoplastique de Vermeer et simulations d'essais de mécanique des sols

Philippe MESTAT
Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

Yvon RIOU
École centrale de Nantes

RÉSUMÉ

Une méthodologie de détermination des valeurs des paramètres, d'une loi de comportement adaptée aux sables et introduite dans le progiciel de calcul par éléments finis CÉSAR-LCPC est proposée. Cette loi élastoplastique avec écrouissage, élaborée par P. Vermeer, présente l'avantage de posséder un faible nombre de paramètres. Plusieurs études ont montré la simplicité de mise en œuvre de ce modèle et ses bonnes performances dans la simulation d'essais de laboratoire. Ce modèle, le rôle de chaque paramètre et la manière de les déterminer sont décrits. Par ailleurs, une étude de sensibilité a permis d'aboutir à un principe d'optimisation des simulations théoriques des essais triaxiaux. Malgré son faible nombre de paramètres, la loi de Vermeer est performante et actuellement peu employée dans la modélisation des ouvrages. Cet article a aussi pour objectif de contribuer à son application en géotechnique.

DOMAINE : Géotechnique et risques naturels.

ABSTRACT

A methodology for determining parameter values of a constitutive law adapted to sands, and introduced into the CESAR-LCPC finite element computation software, is described herein. This elastoplastic law with strain hardening, proposed by P. Vermeer, offers the advantage of a low number of parameters. Several studies have demonstrated this model's ease of implementation and high level of performance in laboratory test simulations. This article discusses not only the model itself, but also the role of each input parameter and the parameter-determination procedure employed. Moreover, a sensitivity analysis has allowed us to develop a principle for optimizing the theoretical simulation of triaxial testing. Vermeer's law proves effective despite the small number of parameters ; nonetheless, its applications in the field of geotechnical modeling remain quite limited. This article is also intended to further the extent of such applications.

Introduction

Dans un article récent (Mestat et Arafati, 2000), une méthodologie de détermination des valeurs des paramètres a été proposée pour la loi de comportement de Nova (version 1982). Cette méthodologie était adaptée à l'interprétation des essais courants de mécanique des sols (essai de compression triaxiale drainé et essai isotrope) et ne faisait pas appel aux essais sophistiqués utilisés fréquemment par les auteurs de modèle, à la fois pour l'élaboration des équations, l'identification des paramètres et la validation. La finalité n'est plus de vérifier les performances d'un modèle, mais de l'appliquer dans des situations de type « bureau d'études ». Dans un tel cadre, ce travail méthodologique allait de pair avec l'introduction de la loi de Nova dans le progiciel de calcul par éléments finis CÉSAR-LCPC (module de calcul en comportement non linéaire, MCNL).

Une méthodologie adaptée doit donc être développée pour toute nouvelle loi de comportement introduite dans CÉSAR-LCPC. Pour les lois les plus courantes, les paramètres sont bien connus : module de déformation, coefficient de Poisson, cohésion, angles de frottement et de dilatance. La détermination de leur valeur pour une couche de sol donnée ne pose pas de problème particulier, à condition d'avoir suffisamment d'informations géotechniques. En revanche, pour les lois plus complexes comme les modèles élastoplastiques à plusieurs mécanismes, il y a lieu de développer une démarche originale pour tirer le meilleur parti des résultats des essais courants de mécanique des sols. Parmi ces modèles, la loi de comportement de Vermeer a fait l'objet de plusieurs applications prometteuses au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC) et à l'École centrale de Nantes : pour l'étude des pieux sous charge axiale (Tadjbakhsh et Frank, 1985), pour la simulation

d'essais triaxiaux (Mestat, 1990 ; Youssef, 1991 ; Mestat, 1992) et pour le calcul d'ouvrages souterrains (Abdallah, 1997 ; Riou et Chambon, 1998 ; Riou et *al.*, 1998). Ces applications ont nécessité le développement d'une méthodologie originale et pratique pour estimer les valeurs des paramètres.

Description de la loi de Vermeer

La loi de comportement, développée par P. Vermeer, est un modèle élastoplastique à deux mécanismes écouissables. Le premier mécanisme, fondé sur le critère de rupture défini par Matsuoka et Nakaï (1974), est purement déviatorique (mécanisme de cisaillement) et le second purement volumique (mécanisme de consolidation). Le domaine de validité de ce modèle, tel qu'il a pu être exploré par son auteur, est constitué par l'ensemble des sollicitations qui comportent au plus un ou deux cycles de chargement-déchargement-rechargement (Vermeer, 1982). Sa formulation, les hypothèses qui ont permis son élaboration et le rôle de chaque paramètre sont précisés ci-après.

Critère de rupture en cisaillement

Afin de décrire la surface de rupture dans l'espace des contraintes principales, P. Vermeer a utilisé le critère tridimensionnel de Matsuoka et Nakaï, adapté aux milieux pulvérulents (fig. 1) :

$$F_r(\sigma_{ij}) = 3 p \Pi_2 + III_3 A_r = 0$$

où p , Π_2 et III_3 représentent les invariants du tenseur des contraintes dans la convention de signe de la mécanique des milieux continus (compression négative) :

$$p = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} ; q = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}} ;$$

$$\Pi_2 = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 ; III_3 = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 ;$$

où

- σ_1, σ_2 et σ_3 sont les contraintes principales,
- q est le déviateur des contraintes.

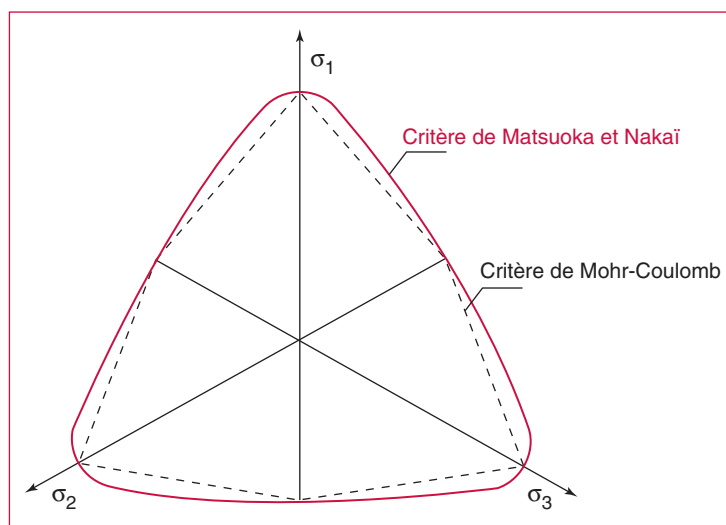


Fig. 1 - Représentation du critère de Matsuoka et Nakai (1974).

Le paramètre A_r définit la surface de charge dans l'espace des contraintes. Dans le cas d'un essai triaxial de compression sur une éprouvette cylindrique ($\sigma_2 = \sigma_3$), ce paramètre peut être relié à

l'angle de frottement au pic φ_p qui intervient dans le critère de Mohr-Coulomb. Puisque la cohésion est nulle, on a les relations suivantes à la rupture :

$$\left(\frac{q}{p}\right)_r = \frac{6 \sin \varphi_p}{3 - \sin \varphi_p} \text{ et } A_r = \frac{27 \left(3 + \left(\frac{q}{p}\right)_r\right)}{\left(3 + 2 \left(\frac{q}{p}\right)_r\right) \left(3 - \left(\frac{q}{p}\right)_r\right)} = \frac{9 - \sin^2 \varphi_p}{1 - \sin^2 \varphi_p}.$$

Surface de charge de cisaillement

En supposant l'existence d'une surface de charge qui évolue de manière homothétique vers le critère de Matsuoka et Nakai, et à l'intérieur de laquelle le comportement du sol est réversible, l'équation de la surface de charge de cisaillement est de la forme :

$$F_c(\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}^{pc}) = 3 p \text{ II}_2 + \text{III}_3 A(k) = 0$$

où k est une variable interne qui pilote l'évolution de la surface dans l'espace des contraintes et qui est reliée à la déformation plastique de cisaillement (ε_{ij}^{pc}).

Par analogie avec le paramètre A_r , la fonction $A(k)$ est définie par la relation suivante :

$$A(k) = \frac{27 \left(3 + \left(\frac{q}{p}\right)_{\text{actuel}}\right)}{\left(3 + 2 \left(\frac{q}{p}\right)_{\text{actuel}}\right) \left(3 - \left(\frac{q}{p}\right)_{\text{actuel}}\right)}$$

où $\left(\frac{q}{p}\right)_{\text{actuel}}$ est le rapport du déviateur des contraintes à la pression moyenne pour le seuil de plasticité actuel. Il reste à relier ce rapport à la déformation plastique pour compléter le modèle. Pour cela, P. Vermeer exploite les analyses réalisées sur les essais triaxiaux à pression moyenne constante. En particulier, Kondner et Zelasko (1963) et Brinch Hansen (1965) ont proposé de décrire les résultats de ces essais par l'équation :

$$\frac{q}{p} = \frac{\gamma \left(\frac{q}{p}\right)_r}{\alpha \left(\frac{p}{p_0}\right)^\beta \left(\frac{q}{p}\right)_r + \gamma}$$

où

- α et β sont deux paramètres ;
- p_0 est une pression de référence ;
- γ représente la distorsion totale ($\gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$ pour les essais considérés).

L'inversion de cette équation permet d'exprimer la distorsion en fonction de l'état de contraintes :

$$\gamma = \frac{\alpha \left(\frac{p}{p_0}\right)^\beta \left(\frac{q}{p}\right)_r \left(\frac{q}{p}\right)}{\left(\frac{q}{p}\right)_r - \left(\frac{q}{p}\right)}.$$

Finalement, P. Vermeer décompose cette quantité en une partie élastique et une partie plastique.

❶ Pour la partie élastique, correspondant aux faibles déformations, un développement limité est considéré pour les faibles cisaillements (q petit), on obtient alors :

$$\gamma^e = \alpha \left(\frac{p}{p_0} \right)^\beta \left(\frac{q}{p} \right).$$

❷ La partie plastique est déduite par différence entre la distorsion totale et la distorsion élastique :

$$\gamma^{pc} = \gamma - \gamma^e = \alpha \left(\frac{p}{p_0} \right)^\beta \frac{\left(\frac{q}{p} \right)^2}{\left(\frac{q}{p} \right)_r - \left(\frac{q}{p} \right)}.$$

Pour obtenir la relation cherchée, il reste à inverser l'équation précédente en identifiant l'état de contrainte $\left(\frac{q}{p} \right)$ à l'état de contraintes actuel sur la surface de charge $\left(\frac{q}{p} \right)_{\text{actuel}}$. Il vient alors :

$$\left(\frac{q}{p} \right)_{\text{actuel}} = -\frac{\chi}{2} + \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \chi \left(\frac{q}{p} \right)_r} \quad \text{avec : } \chi = \frac{\gamma^p}{\alpha} \cdot \left(\frac{p_0}{p} \right)^\beta$$

χ apparaît ainsi comme la variable interne recherchée.

La surface de charge est alors complètement définie pour des conditions triaxiales sur des éprouvettes cylindriques ($\sigma_2 = \sigma_3$). Pour établir un modèle tridimensionnel, il faut généraliser l'écriture en remplaçant la distorsion $\gamma^{pc} = \varepsilon_1^{pc} - \varepsilon_3^{pc}$ par l'invariant suivant :

$$d\gamma^{pc} = \sqrt{\frac{\left(d\varepsilon_1^{pc} - d\varepsilon_2^{pc} \right)^2 + \left(d\varepsilon_1^{pc} - d\varepsilon_3^{pc} \right)^2 + \left(d\varepsilon_2^{pc} - d\varepsilon_3^{pc} \right)^2}{2}}$$

L'équation de la surface de charge dans l'espace des contraintes principales est la suivante :

$$F_c(\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}^{pc}) = 3 p \text{ II}_2 + \text{III}_3 A(\chi) = 0 \quad \text{avec } A(\chi) = \frac{27 (3 + h(\chi))}{(3 + 2 h(\chi)) (3 - h(\chi))}$$

$$\text{et } h(\chi) = -\frac{\chi}{2} + \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \chi \frac{6 \sin \varphi_p}{3 - \sin \varphi_p}}.$$

L'équation de la surface de charge peut aussi s'exprimer en fonction de l'angle de frottement mobilisé φ_m :

$$F_c(\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}^{pc}) = 3 p \text{ II}_2 + \frac{9 - \sin^2 \varphi_m}{1 - \sin^2 \varphi_m} \text{III}_3 = 0 \quad \text{avec } \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}.$$

Comportement élastique

L'expression de la distorsion élastique γ^e établie précédemment est à la base de la formulation du comportement élastique du modèle de Vermeer. L'équation de comportement valable pour l'essai triaxial de compression sur éprouvette cylindrique

$$\gamma^e = \varepsilon_1^e - \varepsilon_3^e = \alpha \left(\frac{p}{p_0} \right)^\beta \left(\frac{q}{p} \right) = \frac{\alpha}{p_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\beta-1} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

est généralisée au cas tridimensionnel en supposant la relation suivante :

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{\varepsilon_0^e}{3p_0} \left(\frac{\sigma_n}{p_0} \right)^{\beta-1} \sigma_{ij}$$

où

➤ σ_n est l'invariant défini par : $\sigma_n = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3}}$

➤ ε_0^e est un paramètre tel que : $\varepsilon_0^e = 3.\alpha$.

Cette équation de comportement définit une élasticité non linéaire. Il s'agit en fait d'une hyperélasticité, puisqu'il existe un potentiel dont peut dériver l'expression précédente. Par rapport au schéma classique de Hooke, on remarque que l'équivalent du coefficient de Poisson dans le modèle de Vermeer est nul.

Pour être cohérent, ce raisonnement conduit à modifier l'expression de la variable χ intervenant dans la définition de la surface de charge de cisaillement et à la remplacer par :

$$\chi = \frac{\gamma^p}{\alpha} \cdot \left(\frac{p_0}{\sigma_n} \right)^\beta.$$

Surface de charge de consolidation

La surface de charge de cisaillement établie précédemment n'est toutefois pas suffisante pour décrire l'ensemble des seuils de plasticité et des irréversibilités. En particulier, les essais de compression isotrope mettent en évidence un second mécanisme plastique, dit volumique ou de consolidation. La simulation de la déformation volumique par la relation

$$\varepsilon_{vol} = \kappa \left(\frac{\sigma_n}{p_0} \right)^\beta$$

est généralement satisfaisante. κ est un paramètre à caler sur les résultats expérimentaux. P. Vermeer déduit alors que la déformation plastique volumique s'écrit sous la forme :

$$\varepsilon_{vol}^{pv} = \varepsilon_{vol} - \varepsilon_{vol}^e = \varepsilon_0^c \left(\frac{\sigma_n}{p_0} \right)^\beta$$

où ε_0^c est un paramètre à déterminer. Par conséquent, la surface de charge liée au mécanisme de consolidation s'écrit :

$$F_v(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{pv}) = \left(\frac{\sigma_n}{p_0} \right)^\beta - \frac{\varepsilon_{vol}^{pv}}{\varepsilon_0^c} = 0.$$

La loi de comportement de Vermeer admet que le mécanisme de consolidation est associé. Autrement dit, le potentiel plastique est égal à la surface de charge. L'évolution de l'écrouissage est gouvernée par la déformation plastique volumique ε_{vol}^{pv} . Par ailleurs, comme les deux mécanismes ont été construits de manière indépendante, les déformations plastiques sont la somme des déformations plastiques de cisaillement et des déformations plastiques de consolidation :

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^{pc} + \varepsilon_{ij}^{pv}.$$

Potentiel plastique pour le mécanisme de cisaillement

Plusieurs études expérimentales ont montré que les directions des déformations plastiques n'étaient pas normales à la surface de charge. Le potentiel plastique associé au mécanisme de cisaillement n'est donc pas associé. P. Vermeer a ainsi proposé un potentiel plastique similaire à la surface de charge :

$$G_c(\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}^{pc}) = 3 p^* \Pi_2^* + \frac{9 - \sin^2 \psi_m}{1 - \sin^2 \psi_m} III_3^* = 0.$$

où ψ_m est l'angle de dilataance mobilisé, variable avec l'état de déformations plastiques. L'exposant * signifie que les invariants p , Π_2 et III_3 concernent le tenseur $(\sigma_{ij} - a\delta_{ij})$ et non le tenseur des contraintes (σ_{ij}) . Le potentiel est identique à la surface de charge lorsque $a = 0$ et $\varphi_m = \psi_m$. La variable a est déterminée par l'équation : $G_c(\sigma_{ij}, \varepsilon_{kl}^{pc}) = 0$. Les variables a et ψ_m sont considérées comme des constantes lors de la dérivation du potentiel nécessaire au calcul des déformations plastiques (application de la règle d'écoulement).

Dans le cas d'un essai triaxial de compression sur une éprouvette cylindrique ($\sigma_1 \geq \sigma_3$ et $\sigma_2 = \sigma_3$), le rapport des incréments de déformations plastiques s'écrit :

$$\frac{1}{2} \frac{d\varepsilon_1^p}{d\varepsilon_3^p} = \frac{\frac{\partial G_c}{\partial \sigma_1}}{\frac{\partial G_c}{\partial \sigma_3}} = -\frac{\sigma_3^*}{\sigma_1^*} = -\frac{1 - \sin \psi_m}{1 + \sin \psi_m}.$$

Par ailleurs, Rowe (1971) a proposé une relation pour décrire l'écoulement plastique dans le cas de l'essai triaxial de compression. Cette relation dite « contrainte-dilataance » s'écrit :

$$\frac{1}{2} \frac{d\varepsilon_1^p}{d\varepsilon_3^p} = -\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_{cv}}{2} \right) \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$$

où φ_{cv} est l'angle de frottement à volume constant. Pour achever la construction du potentiel plastique, P. Vermeer identifie l'expression théorique du rapport des incréments de déformations plastiques et l'expression empirique de Rowe. Puis, en reliant le rapport de contraintes σ_1/σ_3 à l'angle de frottement mobilisé φ_m , on aboutit à la relation suivante entre les angles de frottement et de dilataance :

$$\frac{1 - \sin \psi_m}{1 + \sin \psi_m} = \left(\frac{1 + \sin \varphi_{cv}}{1 - \sin \varphi_{cv}} \right) \left(\frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m} \right)$$

soit finalement, la relation cherchée permettant le calcul de l'angle de dilataance :

$$\sin \psi_m = \frac{\sin \varphi_m - \sin \varphi_{cv}}{1 - \sin \varphi_m \sin \varphi_{cv}}.$$

Malgré la pertinence de l'approche théorique de P. Vermeer, le calcul de la variable « a » pour un chemin de contraintes quelconque conduit à résoudre une équation du troisième degré pour chaque état de contraintes ; autant dire que la durée des calculs risque de devenir très importante dans le cas d'une modélisation par éléments finis d'un ouvrage. Pour cette raison, P. Vermeer a proposé une autre expression pour le potentiel plastique en négligeant certains termes de l'équation du deuxième degré. Cette simplification présente aussi l'avantage de séparer la variable « a » des invariants de contraintes et de la considérer comme une constante pour la dérivation dans la loi d'écoulement. Finalement, le potentiel plastique du mécanisme de cisaillement est écrit par P. Vermeer sous la forme

$$G_c(\sigma_{ij}) = \frac{2}{3} q - \frac{4}{3} p \sin \psi_m.$$

Paramètres de la loi de Vermeer

Finalement, les paramètres de la loi sont les suivants : φ_p , φ_{cv} , ε_0^e , ε_0^c , β et un paramètre lié à l'état initial p_0 . Ce faible nombre constitue un atout important pour l'utilisation de la loi de comportement de Vermeer.

La pression p_0 peut être déterminée de deux manières :

- ❶ soit on considère que cette pression est une pression de référence liée à la déformation de référence ε_0^e ;
- ❷ soit on rattache la pression p_0 à l'état initial des contraintes effectives du sol en place $(\sigma'_{v0}, \sigma'_{h0})$, en écrivant que l'état de contraintes initial est situé sur la surface de charge du mécanisme volumique : $F_v(\sigma'_{ij}, \varepsilon_{kl}^p = 0) = 0$. Dans ce cas, la déformation de référence ε_0^e n'est plus directement liée à la pression p_0 , puisqu'à l'état initial on suppose que les déformations sont nulles. ε_0^e devient un paramètre indépendant de p_0 .

Il est conseillé de relier le paramètre p_0 à l'état initial du sol en place. Dans le cas d'un essai triaxial, la pression p_0 est égale à la pression de confinement appliquée.

Les calculs d'ouvrages avec le progiciel CÉSAR-LCPC ont montré que l'élasticité non linéaire combinée à l'élastoplasticité conduit à des durées de calcul souvent très longues. Aussi, pour réduire ces coûts, il a été proposé de linéariser la partie élastique de la loi de Vermeer. L'élasticité non linéaire originale a été remplacée par une élasticité linéaire. Il a été montré que la différence avec la réponse originale du modèle n'est sensible que pour les très faibles contraintes ou pour des phases de déchargement. En effet, les paramètres de Vermeer sont déterminés avec l'hypothèse que l'état de contraintes initial est sur la surface de charge. Dès la première phase de chargement, la plasticité se développe et rapidement les déformations élastiques deviennent négligeables. Néanmoins, il fallait analyser l'influence de l'élasticité linéaire sur les simulations théoriques. Il restera à justifier cette hypothèse sur des configurations plus complexes. On notera également que cette linéarisation de l'élasticité n'augmente pas le nombre de paramètres de la loi de comportement, car le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν seront estimés à partir des autres paramètres (cf. tableau VIII).

Méthodologie de détermination des paramètres de la loi de Vermeer

La méthodologie proposée consiste à reprendre la démarche adoptée pour le modèle de Nova (Mestat et Arafati, 2000) ; à savoir estimer des tangentes et des asymptotes en certains points géométriquement représentatifs sur les courbes contraintes-déformations déduites d'un essai triaxial de compression axisymétrique drainé avec une phase de déchargement : $(\sigma_1, \sigma_1 - \sigma_3)$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_v)$. Les points de calage sont choisis afin d'encadrer les courbes expérimentales par des tangentes et asymptotes théoriques (tableaux I à III et valeurs A_i sur la figure 2) :

- déchargement complet ($q = 0$ et $dq \leq 0$). Dans ce cas, la courbe théorique est souvent raide et proche d'une droite comme la courbe expérimentale (tableau II) ;
- chargement initial ($q = 0$ et $dq > 0$). Deux cas se présentent : soit l'état de contraintes initial est à l'intérieur du domaine élastique, soit il est sur la surface de charge dans le domaine plastique (tableau II) ;
- cisaillement maximal à la rupture (tableau III) ;
- dilatance à la rupture (tableau III).

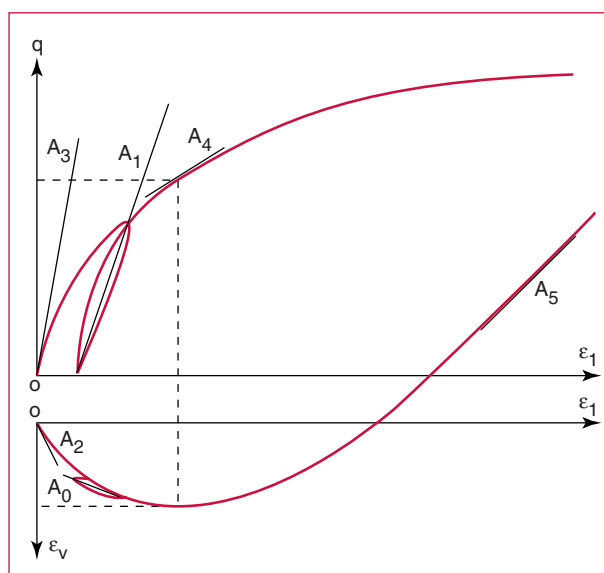


Fig. 2 - Résultats d'un essai triaxial de compression et tangentes significatives aux courbes contraintes-déformations.

Le calcul théorique des tangentes et asymptotes aux courbes triaxiales est fondé sur les relations différentielles exprimant les incréments de déformation en fonction du rapport de contraintes $\eta = q/p$ et de son accroissement (tableau I). Ces équations permettent de calculer les tangentes *théoriques*, en tout point des courbes triaxiales, en considérant les expressions :

$$\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_1} = \frac{d\sigma_1}{d\eta} \frac{d\eta}{d\varepsilon_1^e + d\varepsilon_1^p} \text{ et } \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} = \frac{d\varepsilon_v^e + d\varepsilon_v^p}{d\eta} \frac{d\eta}{d\varepsilon_1^e + d\varepsilon_1^p}.$$

Ensuite, aux points de calage, on identifie les expressions analytiques des quantités $(\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_1}, \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1})$, et les valeurs de ces tangentes estimées sur les courbes expérimentales (tableaux II et III). On obtient ainsi, directement ou indirectement, les valeurs des paramètres. L'étude des expressions théoriques des tangentes aux courbes triaxiales permet de préciser le rôle de chaque paramètre (tableau IV) et de faciliter l'identification lorsqu'un ajustement s'impose.

L'analyse de l'essai de compression isotrope est aussi très utile pour déterminer la valeur des paramètres ε_0^e , ε_0^c et β . En effet, la loi de Vermeer représente cet essai par les relations :

$$\varepsilon_v^e = \varepsilon_0^e \left(\frac{\sigma_n}{p_0} \right)^\beta ; \varepsilon_v^p = \varepsilon_0^c \left(\frac{\sigma_n}{p_0} \right)^\beta \text{ et } \varepsilon_v = (\varepsilon_0^e + \varepsilon_0^c) \left(\frac{\sigma_n}{p_0} \right)^\beta$$

TABEAU I

Simulation théorique d'un essai triaxial axisymétrique drainé : expressions des déformations élastiques et plastiques pour le modèle de Vermeer (1982)

Élasticité	$d\varepsilon_1^e = \frac{1}{2G_s} \left[1 - \frac{1}{3}(1-\beta) \frac{(3+2\eta)^2}{9+2\eta^2} \right] \frac{9\sigma_3}{(3-\eta)^2} d\eta$ $d\varepsilon_3^e = d\varepsilon_2^e = \frac{1}{2G_s} \left[-\frac{1}{3}(1-\beta) \frac{(3+2\eta)(3-\eta)}{9+2\eta^2} \right] \frac{9\sigma_3}{(3-\eta)^2} d\eta$ $\text{avec } G_s = \frac{3p_0}{2\varepsilon_0^e} \left(\frac{1}{3p_0} \frac{\sigma_3}{(3-\eta)} \sqrt{9+2\eta^2} \right)^{1-\beta}$
Plasticité : mécanisme volumique	$d\varepsilon_1^{pv} = \beta \varepsilon_0^c \frac{3p_0}{2\varepsilon_0^e} \frac{1}{G_s} \frac{(3+2\eta)^2}{(9+2\eta^2)(3-\eta)^2} d\eta$ $d\varepsilon_3^{pv} = d\varepsilon_2^{pv} = \beta \varepsilon_0^c \frac{3p_0}{2\varepsilon_0^e} \frac{1}{G_s} \frac{(3+2\eta)}{(9+2\eta^2)(3-\eta)} d\eta$
Plasticité : mécanisme déviatorique	$d\varepsilon_1^{pc} = \left(-2 + \frac{4}{3} \sin \psi_m \right) d\gamma^p$ $d\varepsilon_3^{pc} = d\varepsilon_2^{pc} = \left(1 + \frac{4}{3} \sin \psi_m \right) d\gamma^p$ $\text{avec } \gamma^p = \frac{1}{2G_s} \sqrt{9+2\eta^2} \frac{\eta^2}{(c-\eta)(3-\eta)} \frac{\sigma_3}{(c-\eta)(3-\eta)} \text{ et } \sin \psi_m = \frac{3\eta - (6+\eta) \sin \varphi_{cv}}{6+\eta-3\eta \sin \varphi_{cv}}$

TABLEAU II
Expressions des tangentes initiales aux courbes théoriques

Cas d'un essai de compression drainé	$\left(\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}\right)_{\eta=0}$	$\left(\frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1}\right)_{\eta=0}$
Cas d'un déchargement total ou d'un chargement initial dans le domaine élastique ($\eta = 0$; $dq > 0$ ou $dq < 0$)	$\frac{9\sigma_3}{(2+\beta)\varepsilon_0^e}$	$\frac{3\beta}{(2+\beta)}$
Cas d'un chargement initial amenant dans le domaine plastique ($\eta = 0$ et $dq > 0$)	$\frac{9\sigma_3}{(2+\beta)\varepsilon_0^e + \beta\varepsilon_0^c}$	$\frac{3\beta(\varepsilon_0^e + \varepsilon_0^c)}{(2+\beta)\varepsilon_0^e + \beta\varepsilon_0^c}$

TABLEAU III
Expressions des asymptotes aux courbes théoriques

Rupture de l'éprouvette	$\eta_{rupture} = \frac{6 \sin \varphi_p}{3 - \sin \varphi_p}$
Dilatance à la rupture	$\left(\frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1}\right)_r = \frac{6 \sin \psi_m^{rupture}}{-3 + 2 \sin \psi_m^{rupture}}$ avec $\sin \psi_m^{rupture} = \frac{\sin \varphi_p - \sin \varphi_{cv}}{1 - \sin \varphi_p \sin \varphi_{cv}}$

TABLEAU IV
Rôle des paramètres de Vermeer dans la simulation d'un essai triaxial

Paramètre	Rôle du paramètre
ε_0^e	Paramètre lié à la déformation volumique élastique
ε_0^c	Paramètre lié à la déformation volumique plastique
β	Paramètre lié aux déformations volumiques élastique et plastique
φ_{cv}	Paramètre lié à l'état caractéristique du sable et à la dilatance (rupture)
φ_p	Paramètre lié au cisaillement maximal (rupture) : angle de frottement au pic

Les calculs théoriques sont relativement simples. À partir des tableaux II et III, on peut estimer les paramètres ε_0^e , ε_0^c , β , φ_p et φ_{cv} (tableau V). Les quantités notées A_i représentent les tangentes aux points de calage définis sur la figure 3.

L'ensemble de ces relations permet de déterminer les cinq paramètres adimensionnels de la loi de Vermeer à partir des résultats d'un essai axisymétrique de compression. Lorsque plusieurs essais sont disponibles, les paramètres sont déterminés pour chaque essai. Puis, des valeurs moyennes sont déduites par une simple moyenne arithmétique. Si un cycle de déchargement-rechargement a été réalisé ou si un essai de compression isotrope est disponible, on peut aboutir à plusieurs valeurs pour les paramètres ε_0^e et β . Là encore, la simplicité doit être de mise et conduit à considérer des valeurs moyennes.

La confrontation des simulations théoriques avec les résultats expérimentaux valide ou non les valeurs ainsi estimées. Si la confrontation n'est pas satisfaisante, il convient d'ajuster les valeurs des paramètres pour améliorer les résultats théoriques. La recherche d'une procédure d'optimisation passe par l'analyse du rôle de chaque paramètre dans les simulations.

TABLEAU V

Détermination des valeurs des paramètres de la loi de Vermeer

Essai	Exploitation des courbes	Expression des paramètres
Compression isotrope	Selon la loi de Vermeer, les points élastiques et plastiques forment des droites dans un plan logarithmique	Régressions linéaires dans un diagramme $(\ln \varepsilon_v^e, \ln p')$
Essai triaxial de compression drainé	Partie des courbes en déchargement (points dans le domaine élastique)	$\beta = \frac{2A_1}{3 - A_1}$ $\varepsilon_o^e = \frac{3\sigma_3}{2A_0} (3 - A_1)$
Essai triaxial de compression drainé	Partie des courbes en chargement dans le domaine plastique	$\varepsilon_o^e = \frac{3\sigma_3}{2A_2} (3 - A_3)$ $\beta = \frac{6A_2}{A_o(3 - A_3)} - 2$ $\varepsilon_o^c = \frac{9\sigma_3(A_o - A_2)(3 - A_3)}{2A_2(3A_2 - 3A_o + A_oA_3)}$
	État de rupture	$\sin \varphi_p = \frac{3\eta_{rupture}}{6 + \eta_{rupture}}$
	Asymptote à la courbe de dilatance	$\sin \psi_m^{rupture} = \frac{3A_5}{2(-3 + A_5)}$ $\sin \varphi_{cv} = \frac{\sin \varphi_p - \sin \psi_m^{rupture}}{1 - \sin \varphi_p \sin \psi_m^{rupture}}$

Influence des paramètres sur les simulations

Une étude systématique de l'influence des paramètres de la loi de Vermeer sur les simulations des essais triaxiaux de compression drainés a été réalisée en faisant varier chaque paramètre de + 25 % ou de - 25 %, et en gardant constant les autres. Cette analyse a été effectuée à l'aide du logiciel LOIS-LCPC, développé pour simuler les essais triaxiaux par diverses lois de comportement (Mestat, 1990 ; Arafati, 1996). Les tableaux VI et VII résument les influences de chaque paramètre et les figures 3 à 9 regroupent les résultats. Comme pour la loi de Nova (Mestat et Arafati, 2000), les variations de chaque paramètre modifient au moins une courbe théorique (cisaillement ou volume). Les paramètres ε_o^c , φ_{cv} et φ_p ont une incidence plus significative que d'autres sur les réponses

TABLEAU VI

Influence des paramètres de la loi de Vermeer sur la courbe (ε_1 , q/p)

Paramètres	Types d'influence pour une variation de $\pm 25 \%$
ε_o^c	Peu d'influence sur l'ensemble de la courbe
ε_o^c	Influence notable sur la courbure intermédiaire (entre l'état initial et la rupture)
β , φ_{cv}	Peu d'influence sur l'ensemble de la courbe
φ_p	Influence très importante sur le niveau de contrainte à la rupture
E	Influence relativement faible sur l'ensemble de la courbe
ν	Pas d'influence

en déformations axiales et volumiques. Ceci suggère que leur valeur sera plus facilement identifiable sur des essais triaxiaux de compression. Les variations observées sur les figures doivent aussi être appréciées en tenant compte du niveau de déformation atteint dans les simulations. Dans les cas présentés, les déformations axiales maximales sont voisines de 10 %, ce qui a pour effet d'« écraser » les réponses aux faibles déformations sur les figures. C'est une différence importante par rapport aux réponses fournies par la loi de Nova (Mestat et Arafati, 2000). À titre d'exemple, pour un même essai et un même chemin de contraintes, la figure 10 compare les réponses des deux modèles : la loi de Vermeer présente une réponse beaucoup plus « souple » et régulière que la loi de Nova.

TABLEAU VII
Influence des paramètres de la loi de Vermeer sur la courbe (ε_1 , ε_v)

Paramètres	Types d'influence pour une variation de $\pm 25\%$
ε_0^c	Légère influence sur la position de l'état caractéristique : une augmentation de ε_0^c réduit les déformations plastiques et entraîne une translation de l'asymptote vers les grandes déformations axiales
β , ε_0^c	Influence notable sur la position de l'état caractéristique : une augmentation de β (ou de ε_0^c) conduit à une augmentation de la contractance et du maximum de déformation volumique et à une translation de l'asymptote vers les grandes déformations axiales
φ_{cv}	Influence importante sur la position de l'état caractéristique et sur la valeur de l'asymptote aux grandes déformations
φ_p	Influence très importante sur la valeur de l'asymptote aux grandes déformations, mais peu d'influence sur la position de l'état caractéristique
E , ν	Influence notable sur la position de l'état caractéristique : une augmentation de E (ou de ν) conduit à une diminution de la contractance, un accroissement des déformations volumiques, de la déformation volumique maximale et à une translation de l'asymptote vers les faibles déformations axiales

Principe d'ajustement des paramètres pour la loi de Vermeer

Les premières applications ont montré que la méthodologie de détermination des valeurs des paramètres proposée conduisait à des simulations satisfaisantes des courbes (ε_1 , $\sigma_1 - \sigma_3$). Toutefois, il a fallu dans certains cas corriger le module d'Young tangent au déchargement (pente A_1) afin d'assurer des valeurs positives aux paramètres ε_0^c et ε_0 . Par ailleurs, la position de l'état caractéristique est souvent assez mal décrite (Mestat, 1990). Les ajustements proposés concernent donc en priorité l'état caractéristique.

L'étude de sensibilité précédente et l'analyse des équations du modèle (cf. tableau I) ont démontré que les paramètres φ_p et ε_0^c avaient une influence sur l'ensemble des courbes de comportement de l'essai triaxial en compression drainé.

Une augmentation de l'angle de frottement au pic φ_p provoque :

- des déformations axiales plus faibles ;
- une augmentation des déformations volumiques et notamment de l'extremum de déformation volumique (ou état caractéristique) et une translation de l'asymptote vers les faibles déformations axiales dans le diagramme (ε_1 , ε_v). Le phénomène inverse est observé pour une diminution de l'angle de frottement au pic.

On peut donc généralement, par une légère variation de cet angle (0,5 ou 1 degré), améliorer d'une façon étonnante les simulations théoriques.

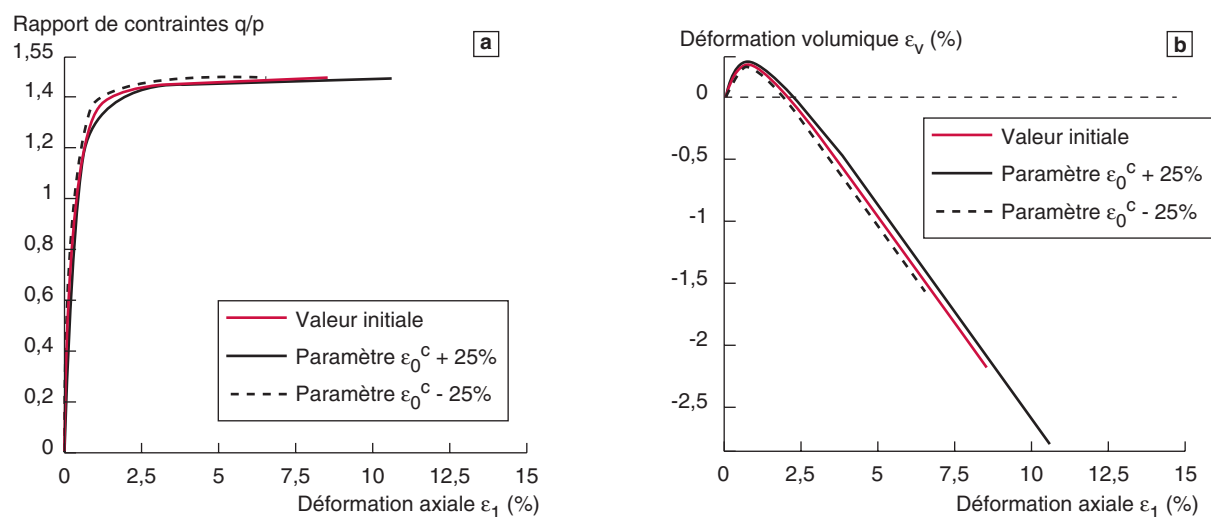


Fig. 3 - Influence d'une variation de ε_0^c sur les courbes $(\varepsilon_1, q/p)$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_v)$.

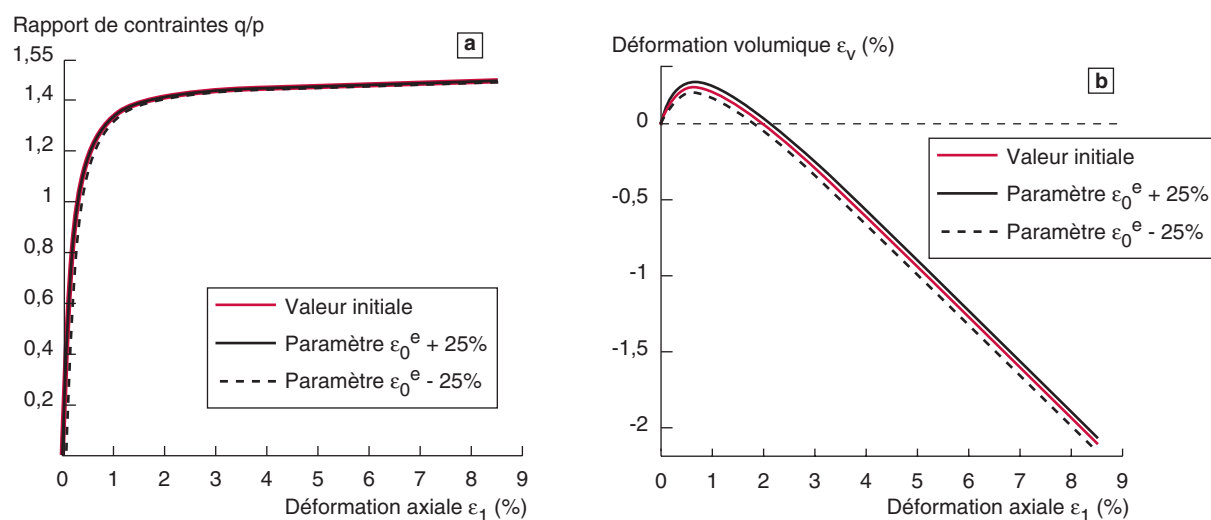


Fig. 4 - Influence d'une variation de ε_0^e sur les courbes $(\varepsilon_1, q/p)$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_v)$.

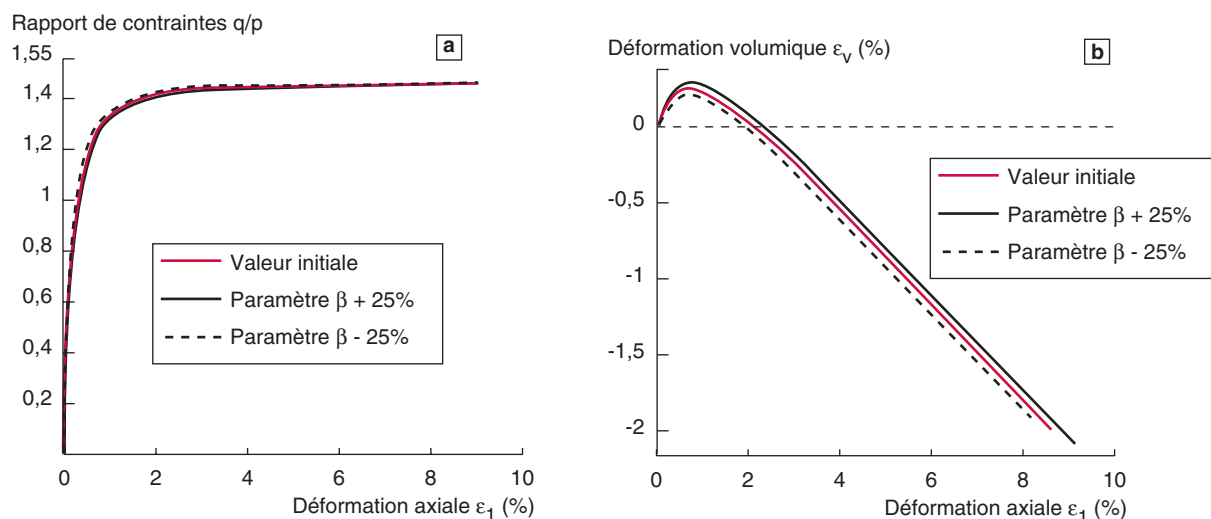


Fig. 5 - Influence d'une variation de β sur les courbes $(\varepsilon_1, q/p)$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_v)$.

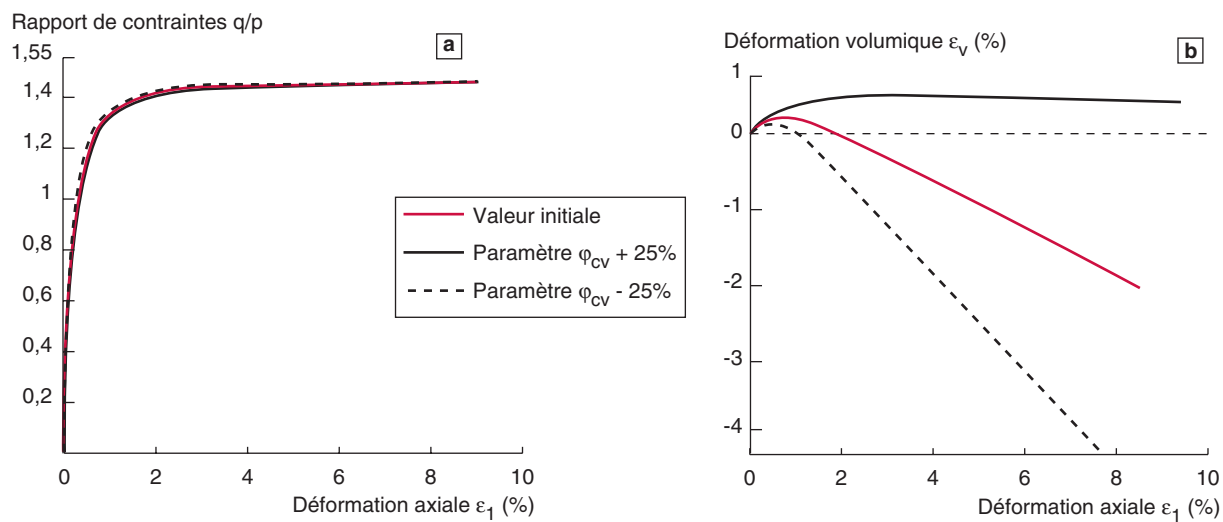


Fig. 6 - Influence d'une variation de φ_{cv} sur les courbes $(\varepsilon_I, q/p)$ et $(\varepsilon_I, \varepsilon_v)$.

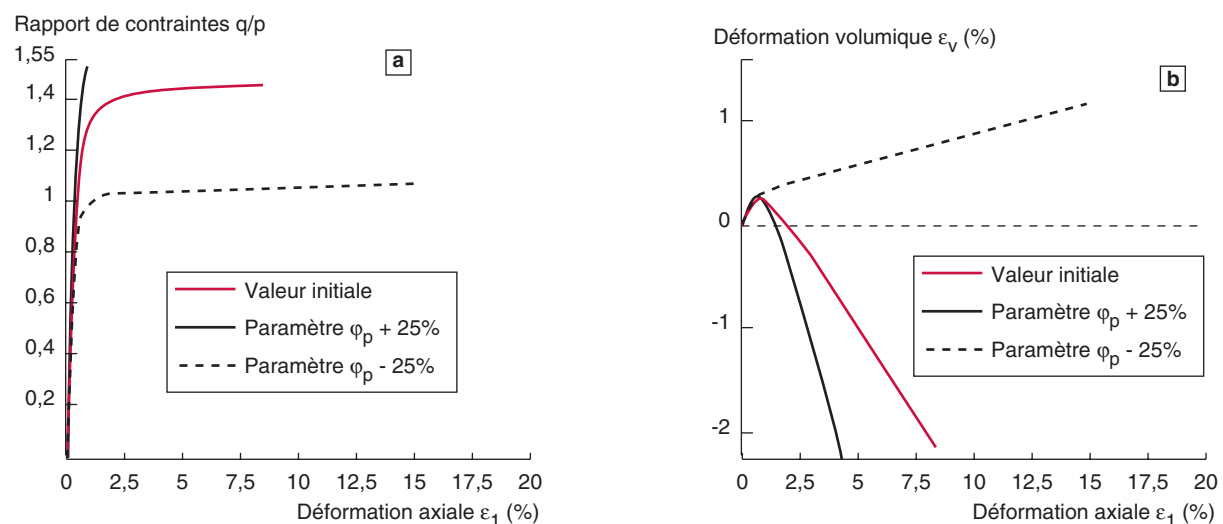


Fig. 7 - Influence d'une variation de φ_p sur les courbes $(\varepsilon_I, q/p)$ et $(\varepsilon_I, \varepsilon_v)$.

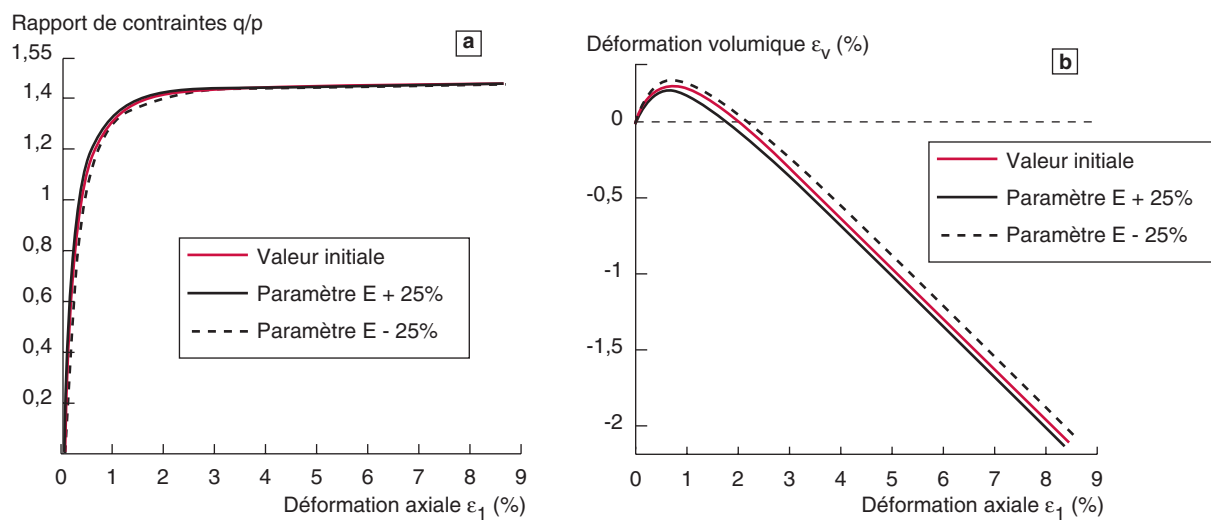


Fig. 8 - Influence d'une variation de E sur les courbes $(\varepsilon_I, q/p)$ et $(\varepsilon_I, \varepsilon_v)$.

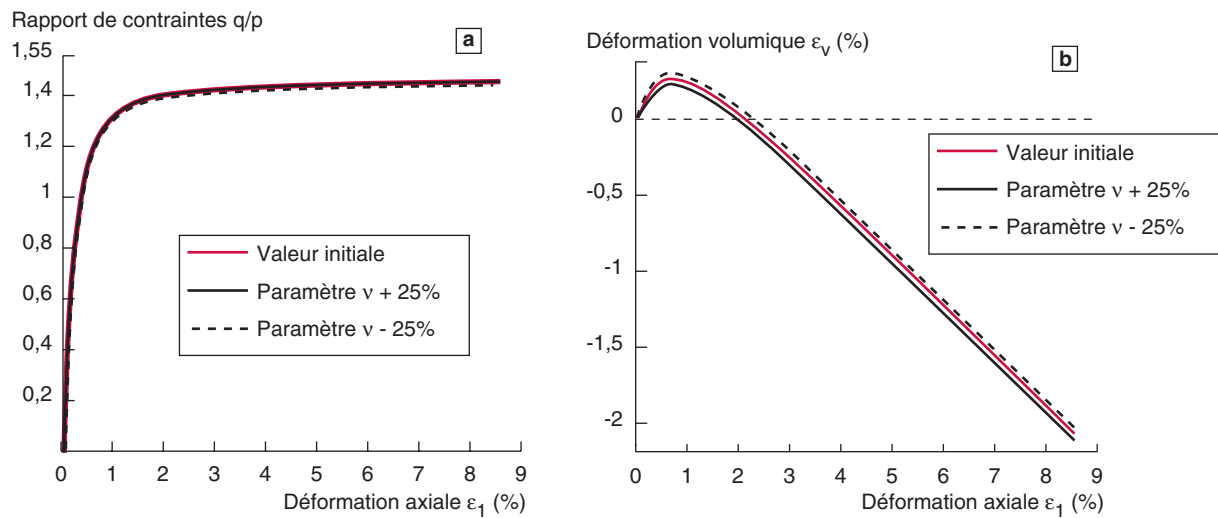


Fig. 9 - Influence d'une variation de ν sur les courbes $(\varepsilon_I, q/p)$ et $(\varepsilon_I, \varepsilon_v)$.

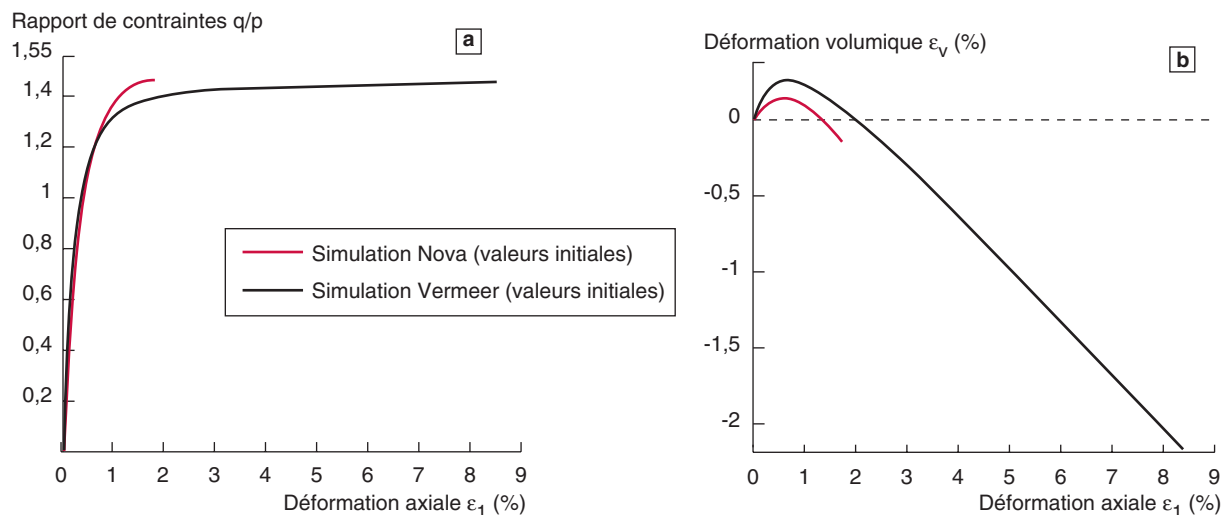


Fig. 10 - Comparaison entre les simulations avec les lois de Nova et de Vermeer.

Pour sa part, le paramètre ε_0^c n'a pas d'effet sur la rupture (niveau de contrainte et pente de dilatance). En revanche, il a une incidence sur le taux de dilatance à l'état caractéristique et sur la position de l'asymptote représentant la dilatance à l'approche de la rupture. Lorsque le paramètre ε_0^c est augmenté, l'extremum de déformation volumique augmente et l'asymptote se décale vers les faibles déformations axiales, et inversement pour une diminution. Cet effet est notable mais bien moins important que celui entraîné par une variation de l'angle de frottement au pic. Il faut parfois multiplier par 10 la valeur de ε_0^c pour améliorer de façon sensible des simulations.

En toute rigueur, il semble délicat de procéder à un calage en modifiant l'angle de frottement au pic, mais c'est le seul paramètre de la loi de Vermeer qui permet, moyennant une petite variation, d'améliorer de manière radicale un ensemble de simulations. Le principe d'ajustement des courbes théoriques est donc fondé sur une modification « légère » de cet angle. Avec un effet moindre, on peut également modifier le paramètre ε_0^c . Le choix entre les deux paramètres tient à l'importance des écarts que l'on veut réduire. Si les écarts sont faibles au départ, il est préférable d'ajuster le paramètre ε_0^c . En revanche, pour resserrer des écarts plus importants, il convient de modifier l'angle de frottement au pic, puis éventuellement d'affiner la concordance en agissant sur ε_0^c . Cette manière de procéder est simple et ne nécessite généralement que quelques allers et retours pour atteindre une simulation satisfaisante.

Enfin, il est à noter que cette procédure ne permet pas toujours d'identifier convenablement les paramètres ε_0^e et β , leur incidence sur la modélisation de l'essai triaxial de compression étant souvent faible. Il est alors recommandé d'analyser en complément des essais de compression isotrope, si ceux-ci sont disponibles.

Correspondances entre les paramètres mécaniques des modèles

Comme ce sont toujours les mêmes tangentes expérimentales qui interviennent dans cette méthodologie, il est possible de relier directement les paramètres de différents modèles entre eux. Par exemple, connaissant les valeurs des paramètres de la loi de Nova, on peut déduire les valeurs des paramètres de la loi de Vermeer, et ceci d'autant plus facilement que cette dernière comporte moins de paramètres. Ces correspondances proviennent de trois types d'identification : celle concernant les paramètres élastiques, celle liée aux paramètres de la rupture et celle décrivant le phénomène de dilatance. Le tableau VIII présente les correspondances établies entre les lois de Vermeer, de Nova (version 1982) et de Mohr-Coulomb.

TABLEAU VIII
Correspondances entre les paramètres des lois de comportement

Nova → Vermeer	Vermeer → Nova	Mohr-Coulomb → Vermeer	Vermeer → Mohr-Coulomb
$\varepsilon_0^e = 3L_o$ $\beta = \frac{B_o}{3L_o}$ $\varepsilon_0^c = 3L_o \frac{\ell - B_o}{B_o}$ $\sin \psi_m = \frac{D}{2}$ $\sin \varphi_p = \frac{3(M + \mu D)}{6 + M + \mu D}$	$L_o = \frac{\varepsilon_0^e}{3}$ $B_o = \beta \varepsilon_0^e$ $\ell = \beta(\varepsilon_0^e + \varepsilon_0^c)$ $M + \mu D = \frac{6 \sin \varphi_p}{3 - \sin \varphi_p}$ $D = 2 \sin \psi_m$	$\beta = \frac{1-2\nu}{1+\nu}$ $\varphi_p = \varphi'$ $\varepsilon_0^e = 3(1+\nu) \frac{\sigma_3}{E_t^0}$ $\sin \psi_m^{rupture} = \frac{3 \sin \psi}{3 - \sin \psi}$	$\nu = \frac{1-\beta}{2+\beta}$ $\varphi' = \varphi_p$ $E_t^0 = \frac{9\sigma_3}{\varepsilon_0^e(2+\beta)}$ $\sin \psi = \frac{3 \sin \psi_m^{rupture}}{3 + \sin \psi_m^{rupture}}$ $c' = 0$

avec $\sin \varphi_{cv} = \frac{\sin \varphi_p - \sin \psi_m^{rupture}}{1 - \sin \varphi_p \sin \psi_m^{rupture}}$; E_t^0 représente le module de déformation tangent à l'état initial.

Dans le cas du modèle élastoplastique parfait de Mohr-Coulomb, il n'est pas possible d'établir de correspondance pour le paramètre ε_0^c puisqu'il n'y a pas d'écrouissage.

Même si les tangentes initiales, extrema et autres asymptotes sont identiques, les simulations des courbes triaxiales sont évidemment différentes selon chaque modèle. Les courbures intermédiaires ne sont pas les mêmes (fig. 10). Aussi ces correspondances constituent-elles seulement une première approche lorsque les valeurs des paramètres de plusieurs modèles sont à estimer sur une même série d'essais. Dans plusieurs applications, on a obtenu de cette manière des valeurs satisfaisantes pour la loi de Vermeer. Si cela est nécessaire, la procédure d'ajustement est ensuite appliquée.

Exemple d'application : étude du sable de Labenne

Dans le cadre général des recherches du LCPC sur le comportement des fondations, une station d'essais a été installée sur le site de Labenne, près de Bayonne. Une série d'essais de chargement y a été réalisée sur des fondations superficielles dans le but d'analyser l'influence des conditions d'exécution sur les valeurs de portance et de tassement. Le sol de Labenne est constitué par un sable de dune (Canépa et Depresles, 1990). Ces essais ont fait l'objet de modélisations numériques qui ont nécessité la détermination des valeurs des paramètres des modèles. Pour cela, des échantillons de sable ont été prélevés et envoyés au Laboratoire régional des Ponts et Chaussées de Rouen afin de réaliser une

série d'essais triaxiaux axisymétriques. Onze essais de compression ont été effectués pour trois densités différentes : dix essais à pression de confinement constante et un essai de compression isotrope.

Pour l'application de la méthodologie proposée, seuls les échantillons moyennement denses ($\gamma = 16,6 \text{ kN/m}^3$) et les échantillons denses ($\gamma = 17,3 \text{ kN/m}^3$) ont été considérés. Le tableau IX indique les pressions de confinement appliquées et la numérotation des essais utilisée dans cet article. Pour chaque essai, les valeurs des paramètres de la loi de Vermeer ont été estimées.

D'une manière générale, les valeurs retenues dès la première estimation conduisent à des simulations théoriques qui concordent bien avec les résultats expérimentaux, en particulier au début et à la fin des courbes de comportement ($\varepsilon_1, \sigma_1 - \sigma_3$). Pour les courbes volumiques ($\varepsilon_1, \varepsilon_v$), une concordance satisfaisante est également observée au début de l'essai jusqu'à l'état caractéristique. Au delà de cet état, une surestimation des déformations apparaît. La simulation de l'état caractéristique est d'autant plus remarquable que les paramètres ont été déterminés aux voisinages de l'état initial et de la rupture. Cette bonne description s'explique par la prise en compte d'une forme approchée de la loi « contrainte-dilatance » de Rowe (1971) dans les équations proposées par Vermeer.

Sable moyennement dense

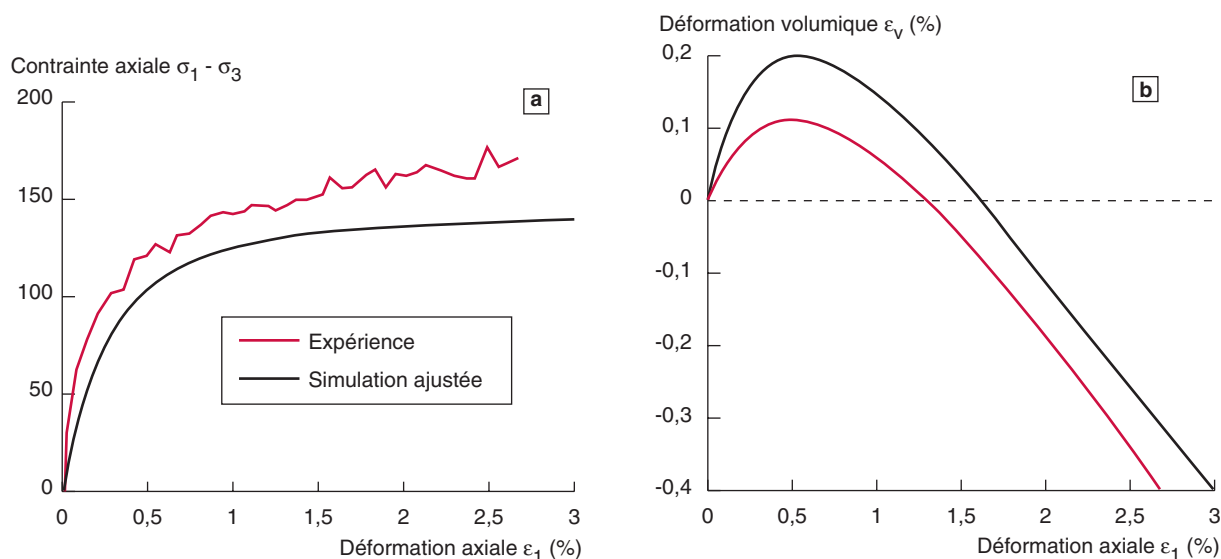


Fig. 11 - Comparaison des simulations théoriques ajustées avec les résultats expérimentaux pour l'essai à $\sigma_3 = 50 \text{ kPa}$.

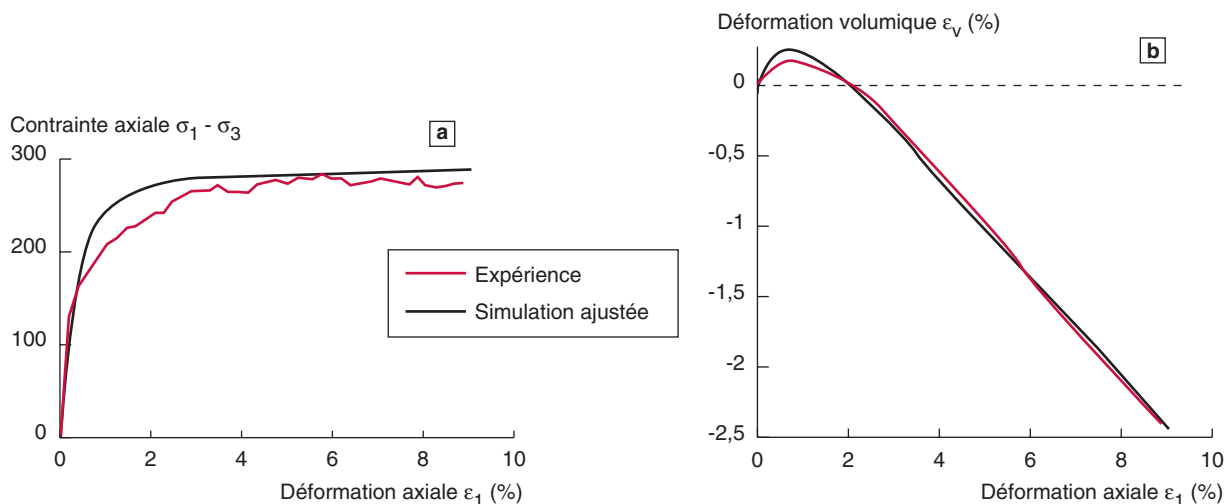


Fig. 12 - Comparaison des simulations théoriques ajustées avec les résultats expérimentaux pour l'essai à $\sigma_3 = 100 \text{ kPa}$.

Aucun ajustement n'a donc été nécessaire pour décrire de manière satisfaisante les essais 3, 4, 6 et 7. En revanche, pour les trois autres essais, de légers ajustements ont semblé nécessaires : le paramètre ε_0^c a été augmenté de 0,001 pour les essais 1 et 5, tandis qu'il était diminué de 0,005 pour l'essai 2. Les simulations ainsi ajustées deviennent excellentes. Le tableau IX regroupe les valeurs des paramètres finalement adoptées pour chaque essai.

Pour le sable moyennement dense et le sable dense, l'étape suivante consiste à considérer la valeur moyenne de chaque paramètre et à simuler l'ensemble des essais relatifs à une densité donnée (essais 1 à 4 ou essais 5 à 7).

❶ Les valeurs moyennes pour le **sable moyennement dense** conduisent à des résultats relativement satisfaisants pour les essais 1 à 4. La valeur de ε_0^c a tout de même été faiblement diminuée (de 0,001) pour mieux décrire l'état caractéristique (fig. 11 à 14).

❷ Pour le **sable dense** (essais 5 à 7), on obtient également de bonnes simulations avec les valeurs de paramètres issues de la première estimation. Néanmoins, la valeur de ε_0^c a été légèrement augmentée (de 0,0003) ainsi que l'angle de frottement au pic (de 0,3 degré) afin de mieux représenter l'état caractéristique et l'allure générale des courbes triaxiales. Le jeu de paramètres moyens ainsi « ajustés » permet d'obtenir des résultats très satisfaisants (tableau X, fig. 15 à 17).

Les figures 11 à 17 mettent aussi en évidence la capacité de la loi de Vermeer à décrire les courbes expérimentales des essais triaxiaux de compression drainés.

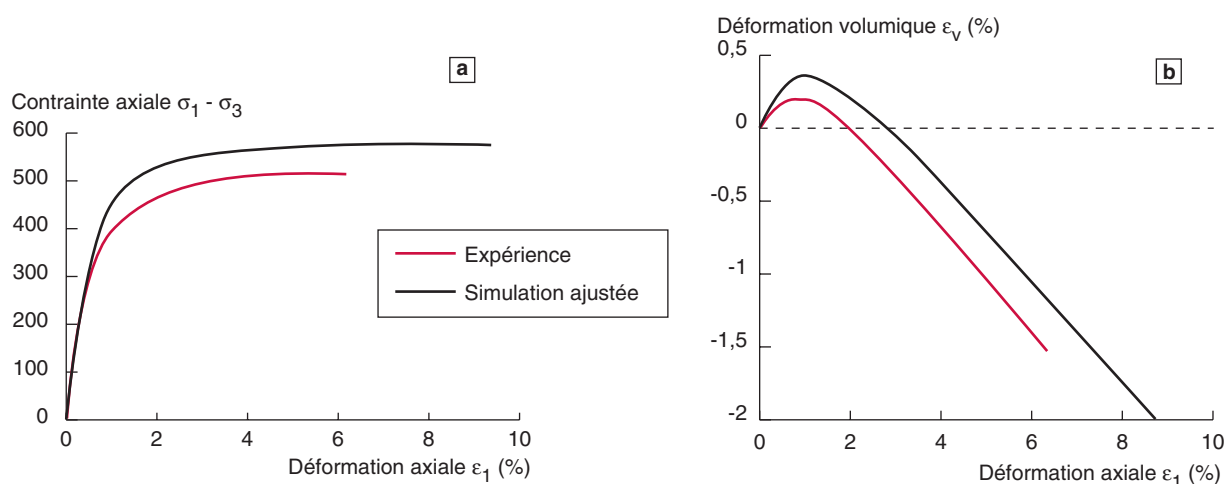


Fig. 13 - Comparaison des simulations théoriques ajustées avec les résultats expérimentaux pour l'essai à $\sigma_3 = 200$ kPa.

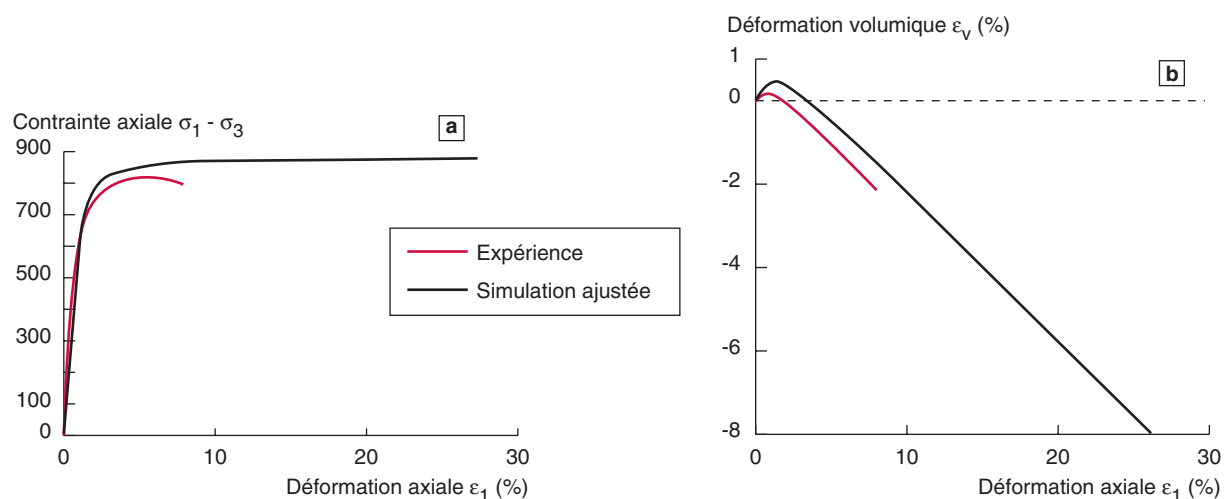


Fig. 14 - Comparaison des simulations théoriques ajustées avec les résultats expérimentaux pour l'essai à $\sigma_3 = 300$ kPa.

TABLEAU IX

Valeurs des paramètres de la loi de Vermeer pour chaque essai (sable de Labenne)

	Sable moyennement dense				Sable dense		
Paramètre	Essai 1 $\sigma_3 = 50$ kPa	Essai 2 $\sigma_3 = 100$ kPa	Essai 3 $\sigma_3 = 200$ kPa	Essai 4 $\sigma_3 = 300$ kPa	Essai 5 $\sigma_3 = 50$ kPa	Essai 6 $\sigma_3 = 100$ kPa	Essai 7 $\sigma_3 = 150$ kPa
ε_0^e	0,00171	0,00603	0,0079	0,0104	0,00178	0,003	0,0043
ε_0^c	0,00034	0,00935	0,00125	0,00138	0,00089	0,00051	0,0037
β	0,468	0,133	0,313	0,144	0,112	0,233	0,163
φ_p (degré)	40	35,9	34,5	35,3	43,1	39	37,5
φ_{cv} (degré)	32,4	28,2	26,6	27,5	31,5	26,9	26,5
E (MPa)	103,5	63,9	95,6	120,3	116,8	132	136
ν	0,17	0,28	0,27	0,38	0,38	0,32	0,3

TABLEAU X

Valeurs moyennes et ajustées des paramètres de la loi de Vermeer pour le sable moyennement dense et le sable dense (sable de Labenne)

	Sable moyennement dense		Sable dense	
Paramètre	Valeur moyenne	Valeur ajustée	Valeur moyenne	Valeur ajustée
ε_0^e	0,00653	0,00653	0,003	0,003
ε_0^c	0,003	0,002	0,0018	0,0021
β	0,265	0,265	0,169	0,169
φ_p (degré)	36,5	36,5	39,9	40,2
φ_{cv} (degré)	28,7	28,7	28,3	28,3
E (MPa)	96	96	128	128
ν	0,28	0,28	0,33	0,33

Synthèse des résultats obtenus sur des sables d'origine diverse

La méthodologie de détermination des paramètres et la procédure d'ajustement proposées ont conduit à d'excellents résultats pour quatre types de sable : sables d'Hostun et de Reid Bedford (Youssef, 1991), sable de Labenne (Mestat, 1992) et sable de Fontainebleau (Abdallah, 1997). Le tableau XI regroupe les valeurs obtenues.

L'analyse de ces valeurs et des valeurs estimées par Vermeer dans ses publications fournit quelques indications sur l'ordre de grandeur de ces paramètres :

- l'angle de frottement au pic φ_p semble compris entre 35 et 45 degrés* ;
- l'angle φ_{cv} varie entre 20 et 30 degrés environ ;
- ε_0^c et ε_0^e sont de l'ordre de 10^{-3} ;
- β est inférieur à 0,5.

* Rappelons que certaines valeurs issues d'un ajustement sur les résultats expérimentaux peuvent être différentes des valeurs de l'angle de frottement interne évaluées à partir du critère de Mohr-Coulomb.

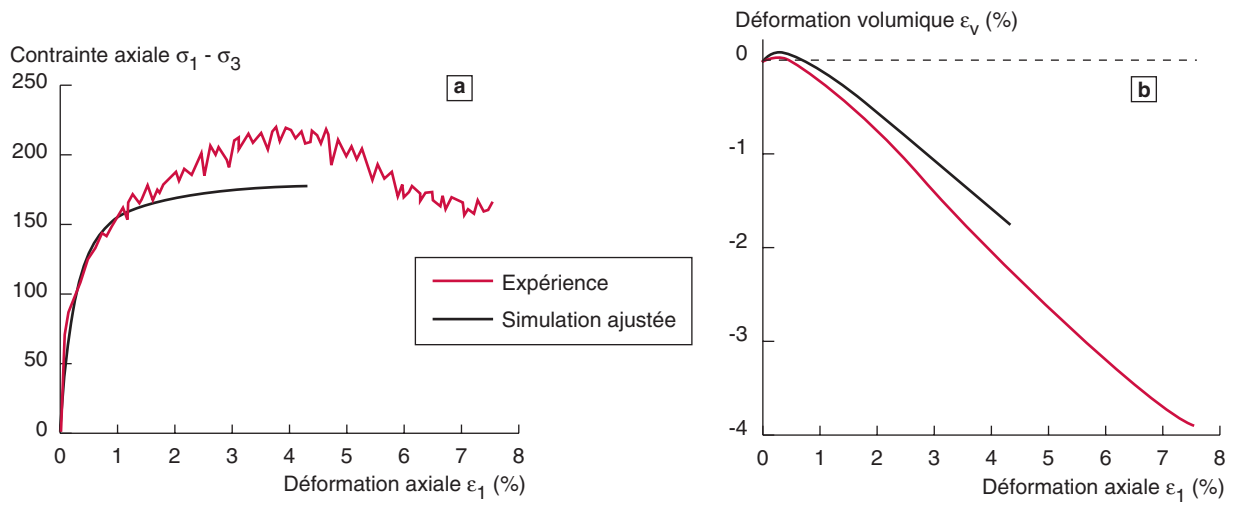


Fig. 15 - Comparaison des simulations théoriques ajustées avec les résultats expérimentaux pour l'essai à $\sigma_3 = 50$ kPa.

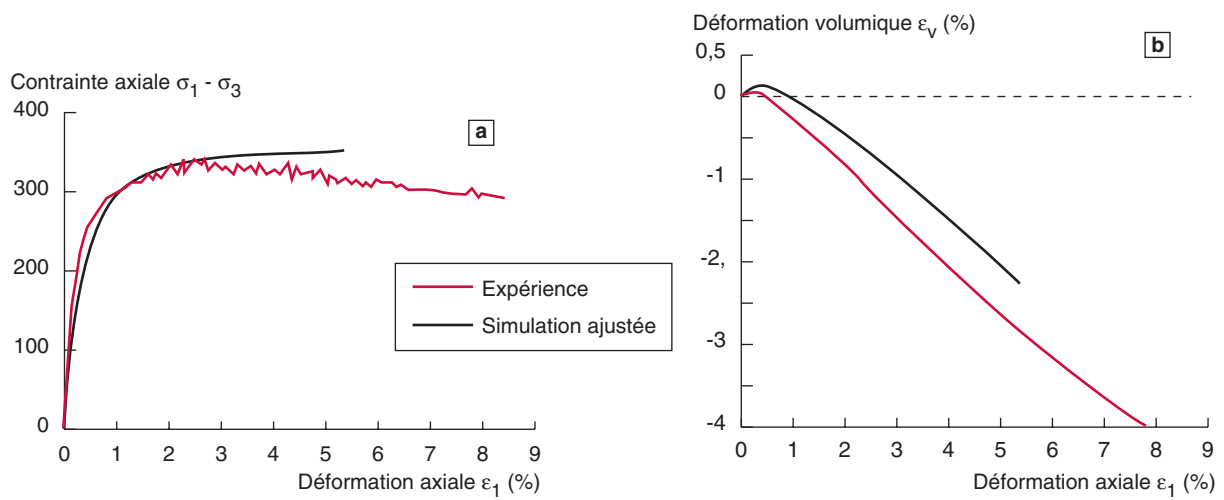


Fig. 16 - Comparaison des simulations théoriques ajustées avec les résultats expérimentaux pour l'essai à $\sigma_3 = 100$ kPa.

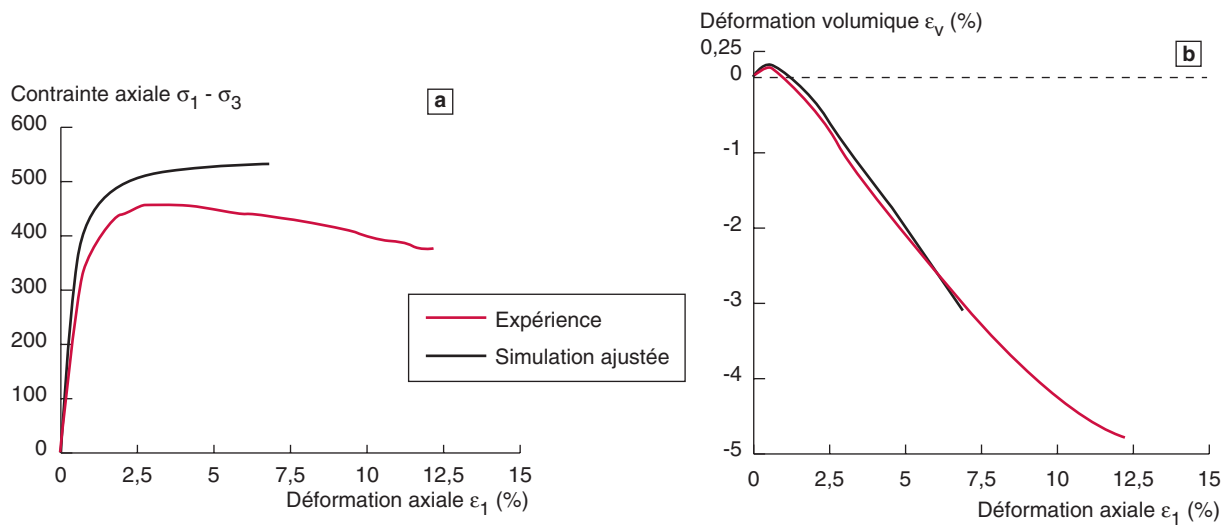


Fig. 17 - Comparaison des simulations théoriques ajustées avec les résultats expérimentaux pour l'essai à $\sigma_3 = 150$ kPa.

TABLEAU XI

Valeurs des paramètres de Vermeer obtenues au LCPC et à l'École centrale de Nantes pour divers sables

Sable	ε_0^e	β	ε_0^c	φ_{cv} (degrés)	φ_p (degrés)
Hostun ($\gamma = 15,5 \text{ kN/m}^3$)	0,0074	0,143	0,0085	27	39,2
Hostun ($\gamma = 16,5 \text{ kN/m}^3$)	0,00372	0,483	0,0025	30,8	39
Reid Bedford ($\gamma = 15,8 \text{ kN/m}^3$)	0,00245	0,419	0,0044	30	35
Labenne ($\gamma = 16,6 \text{ kN/m}^3$)	0,00653	0,265	0,0020	28,7	36,5
Labenne ($\gamma = 17,3 \text{ kN/m}^3$)	0,003	0,169	0,0021	28,3	40,2
Fontainebleau ($\gamma = 16 \text{ kN/m}^3$)	0,0035	0,22	0,005	22,6	35

Cette méthodologie n'est qu'une approche parmi d'autres pour identifier des valeurs de paramètres. Une autre approche pourrait avoir une incidence sur les valeurs des paramètres. Ainsi, des écarts significatifs ont été relevés sur certains paramètres fournis par des procédures différentes. Cette dispersion provient, d'une part, de la faible sensibilité de certains paramètres vis-à-vis de l'essai triaxial de compression et, d'autre part, des effets antagonistes de certains paramètres qui font qu'il n'y a pas unicité de solution. Fort heureusement, cette ambiguïté est levée lorsque deux types d'essais à chemins de contraintes différents sont disponibles (par exemple : un essai triaxial et un essai de compression isotrope, ou lorsqu'une phase de déchargement a été réalisée). Enfin, pour les études d'ouvrage, il ne faut pas oublier de considérer les résultats des essais *in situ* qui reflètent les caractéristiques du sol en place. Des recherches sont donc encore à envisager pour perfectionner la détermination des paramètres de la loi de Vermeer et juger de ses performances dans la modélisation par éléments finis des ouvrages de géotechnique.

Conclusions

Une méthodologie simple et de mise en œuvre rapide a été développée pour déterminer les paramètres de la loi élastoplastique avec écrouissage de Vermeer, introduite dans le progiciel de calcul par éléments finis CÉSAR-LCPC. Elle est fondée sur l'exploitation des essais triaxiaux de compression drainés. Le rôle de chaque paramètre du modèle a été analysé. Des études de sensibilité ont permis de compléter la méthodologie par un principe d'ajustement des simulations théoriques. Les bonnes concordances observées entre les résultats théoriques et expérimentaux montrent le bien-fondé de cette stratégie de détermination et confirment la capacité de la loi de Vermeer à décrire avec peu de paramètres le comportement des sables sous sollicitations monotones. En revanche, ce modèle n'est pas adapté au cas des chargements cycliques.

Des comparaisons entre les résultats des modèles de Mohr Coulomb, de Nova et de Vermeer ont mis en évidence la pertinence de ce dernier. L'intérêt du modèle de Vermeer réside dans son très faible nombre de paramètres par rapport aux autres modèles de plasticité avec écrouissage. Cet avantage permet également d'envisager une détermination des valeurs des paramètres à partir de résultats d'essai *in situ* (comme ceux de l'essai pressiométrique). Cette recherche particulière et la modélisation d'ouvrages réels instrumentés restent à faire. Une nouvelle étape dans la validation et l'utilisation de ce modèle de comportement sera alors franchie.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ABDALLAH N., *Contribution à la modélisation numérique d'une section courante de tunnel à faible couverture*, Thèse de doctorat de l'université de Nantes et de l'École centrale de Nantes, **1997**, 124 pages.
- ARAFATI N., *Contribution à la modélisation du déchargement des massifs de sol*, Thèse de doctorat de l'École nationale des Ponts et Chaussées, **1996**, 232 pages.
- CANÉPA Y., DEPRESLES D., *Fondations superficielles. Essais de chargement de semelles établies sur une couche de sable en place, station expérimentale de Labenne. Influence des conditions d'exécution*, Compte rendu des essais, **1990**, FAER 1.17.02.09.

- HANSEN J. BRINCH, Some stress-strain relationships for soils, *6th International Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, vol. 1, **1965**, pp. 231-234.
- KONDNER R.L., ZELASKO J.S., A hyperbolic stress-strain formulation for sands, *2nd Pan-American Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, vol. 1, **1963**, pp. 289-324.
- MATSUOKA H., NAKAI T., Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses, *Proc. JSCE*, **232**, **1974**, pp. 59-70.
- MESTAT Ph., *Méthodologie de détermination des paramètres des lois de comportement à partir d'essais triaxiaux conventionnels*, Rapport interne LCPC, **1990**, FAER 1.16.21.0.
- MESTAT Ph., *Caractérisation du comportement du sable de Labenne. Détermination des paramètres des lois de Nova et de Vermeer à partir d'essais de laboratoire*, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Division MSGI, Rapport interne, Thème GEO 7, **1992**, 110 pages.
- MESTAT Ph., ARAFATI N., Modélisation des sables avec la loi de Nova : détermination des paramètres et influence sur les simulations, *Bulletin des laboratoires des Ponts et Chaussées*, **225**, mars-avril **2000**, pp. 21-40.
- RIOU Y., CHAMBON P., An elastoplastic analysis of 3D ground movements : numerical and centrifuge models. *Proc. 4th European Conference on Numerical Methods to Geotechnical Engineering – NUMGE98*. Udine, Italy, 14-16 octobre 1998, Springer WienNewYork (Ed), A. Cividini (Ed), **1998**, pp. 181-190.
- RIOU Y., NICOLAS Ch., ABDALLAH N., Incidence de modèles rhéologiques simples sur la simulation d'un ouvrage d'art en service, *Revue Française de Génie Civil*, vol. 2, **6**, **1998**, pp. 667-689.
- ROWE P.W., Theoretical meaning and observed values of deformation parameters for soil, *Proc. Roscoe Memorial Symp. Stress-strain behaviour of soils*, **1971**, pp. 143-194.
- TADJBAKHS S., FRANK R., *Étude par la méthode des éléments finis du comportement élastoplastique de sols dilatants. Application aux pieux sous charge axiale*, Rapport de recherche des LPC, **135**, **1985**, 142 pages.
- VERMEER P., A five constant model unifying well established concepts, *International Workshop on Constitutive Behaviour of Soils*, Grenoble, Balkema, **1982**, pp. 175-197.
- YOUSSEF E., *Étude du comportement des sables sous sollicitations homogènes. Validation d'une méthodologie de détermination des paramètres de comportement de Nova et de Vermeer*, Mémoire de DEA, LCPC, **1991**, FAER 2.24.01.