

# Répartition des contraintes dans les armatures actives et passives d'une poutre en béton partiellement précontraint par post-tension, avec câbles injectés au coulis de ciment. Modélisation, évaluation réglementaire

**Radu PASCU**  
Université Technique de Construction de Bucarest

**François TOUTLEMONDE**  
Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

## RÉSUMÉ

Une caractéristique importante du comportement des structures en béton partiellement précontraint est la différence de variation de contrainte dans les armatures actives et passives, sous l'effet du chargement, après fissuration, en raison de la différence d'adhérence de ces armatures avec le coulis ou le béton environnant. Ce phénomène, pris en compte dans l'Eurocode 2, a des conséquences significatives sur la résistance en fatigue et l'ouverture des fissures.

Dans cette étude, un programme de calcul permettant d'accéder au glissement relatif entre l'acier et le béton ainsi qu'aux contraintes dans les deux types d'armatures est présenté. Les valeurs calculées sont en accord avec les valeurs issues de la littérature. Cependant, pour des valeurs différentes de la résistance du coulis ou du béton, une modification de la formule de l'Eurocode 2 permettant de vérifier la contrainte dans les aciers vis-à-vis de l'état limite de fatigue serait à envisager.

DOMAINE : *Ouvrages d'art.*

## ABSTRACT

**DISTRIBUTION OF STRESSES IN BOTH THE ACTIVE AND PASSIVE REINFORCEMENTS OF A CONCRETE BEAM POST-TENSIONING WITH BONDED TENDONS: MODELING AND EVALUATION BY DESIGN CODES**

*One important feature characterizing the behavior of partially-prestressed concrete is the variable stress increase within the prestressing tendons and passive reinforcements after cracking, due to their differing bond properties. This phenomenon implies significant consequences on both fatigue behavior and crack width and has been acknowledged in the Eurocode 2 specifications.*

*This paper presents a computer code for calculating the slip between concrete and reinforcement, along with the stresses in both types of reinforcement. Computed values are then compared with experimental data from the literature.*

*The numerical results obtained fit well with experimental data. Eurocode 2 stipulations for reinforcement stress assessment at the fatigue limit state would have to be modified should grout and concrete strengths differ.*

*FIELD: Structural Engineering.*

## Introduction

Les structures en béton partiellement précontraint présentent un certain nombre d'avantages techniques et économiques par rapport aux structures dimensionnées en précontrainte totale. Elles posent cependant des problèmes spécifiques vis-à-vis de leur comportement en service. Dans la mesure où l'élément est supposé fissuré en service, l'ouverture des fissures doit être maîtrisée, et l'adhérence des armatures passives, supérieure à celle des armatures de précontrainte, joue alors tout son rôle. Cependant, dans une section fissurée, la variation des contraintes sous l'effet du chargement est plus importante que dans une section non fissurée, d'où une plus grande sensibilité à la fatigue.

Une caractéristique importante des structures partiellement précontraintes est donc la différence de variation de contrainte dans les armatures actives et passives, sous l'effet du chargement, après fissuration, en raison de la différence d'adhérence de ces armatures avec le coulis ou le béton environ-

---

*Cet article constitue la version française d'un article paru dans le « Bulletin scientifique de l'université de construction de Bucarest », n° 2002 / 2.*

nant. Cette différence a d'importantes conséquences sur la tenue en fatigue et la maîtrise de l'ouverture des fissures pour les éléments en béton partiellement précontraint.

Ce phénomène, relaté notamment par Trost et *al.* [1], est à la base des formules du Code Modèle 1990 [2] et de l'Eurocode 2 [3, 4]. Des recherches complémentaires ont été réalisées à l'université d'Aix-la-Chapelle [5, 6] et au LCPC [7].

Dans cette étude, on présente un programme de calcul permettant d'accéder au glissement relatif entre l'acier et le béton ainsi qu'aux contraintes dans les deux types d'armatures, pour un élément partiellement précontraint fissuré en service. Les valeurs calculées sont comparées à des valeurs issues de la littérature, et la validité des formules de l'Eurocode 2 est précisée.

## Prise en compte réglementaire

L'effet d'un comportement différent, en termes d'adhérence, des armatures passives et des aciers de précontrainte est pris en compte dans l'Eurocode 2 [3, 4] à la fois pour l'état limite ultime (ELU) de fatigue, et pour l'état limite de service (ELS) de fissuration. Les formules de l'Eurocode 2 sont directement issues de celles données par le Code Modèle 1990 [2].

### ELU de fatigue

D'après l'Eurocode 2 [3, 4], la contrainte dans l'armature passive (calculée en supposant une même loi d'adhérence pour tous les types d'aciers) doit être multipliée par le facteur :

$$\eta = \frac{A_s + A_p}{A_s + \xi_1 A_p} \quad (1)$$

où :

- $\xi_1 = \sqrt{\xi \frac{d_s}{d_p}}$
- $\xi$  = rapport d'adhérence entre un câble injecté et un acier HA (*cf.* tableau I),
- $d_s$  = diamètre maximal des aciers passifs,
- $d_p$  = diamètre équivalent pour les armatures de précontrainte,
- $A_s$  = aire des aciers passifs,
- $A_p$  = aire des armatures de précontrainte.

Dans le tableau I qui donne les valeurs de  $\xi$  à prendre en compte, les valeurs expérimentales fournies par Tue [8] sont les plus fortes, tandis que les valeurs du Code Modèle 1990 sont les plus faibles. Au vu de cette dispersion, on s'attend donc également à une forte dispersion des valeurs de contraintes.

**TABLEAU I**  
Valeurs de  $\xi$  pour des câbles ou armatures de précontrainte

Type d'acier de précontrainte	Tue [8]		Eurocode 2		Code Modèle 1990
	1 <sup>re</sup> fissuration	Fissuration stabilisée	≤ C50/60	≥ C55/67	
Fils lisses	0,49	0,43	0,3	0,15	0,2
Torons	0,60	0,56	0,5	0,25	0,4
Fils crantés			0,6	0,30	0,6
Barres filetées	0,72	0,72	0,7	0,35	1,0

### ELS de fissuration

Seule la partie 2 de l'Eurocode 2 [3] fournit, dans sa version actuelle, des formules pour le calcul des contraintes locales dans les armatures prenant en compte la différence d'adhérence entre aciers actifs et passifs. Si  $\sigma_{II}$  est la contrainte en stade II fissuré, calculée en supposant l'adhérence parfaite

de tous les types d'armature, et  $f_{ctm}$  la résistance moyenne en traction du béton, ces formules s'écrivent :

$$\sigma_{s,cr} = \sigma_{II} + 0,4 \cdot f_{ctm} \cdot \left( \frac{1}{\text{eff}\rho_p} - \frac{1}{\text{eff}\rho_{tot}} \right) \quad (2)$$

$\sigma_{s,cr}$  étant la contrainte dans les aciers passifs en fissuration stabilisée

$$\Delta\sigma_{p,cr} = \sigma_{II} - 0,4 \cdot f_{ctm} \cdot \left( \frac{1}{\text{eff}\rho_{tot}} - \frac{\xi_1^2}{\text{eff}\rho_p} \right) \quad (3)$$

$\Delta\sigma_{p,cr}$  étant la variation de contrainte dans les armatures de précontrainte, en fissuration stabilisée avec :

➤  $\text{eff}\rho_p = \frac{A_s + \xi_1^2 \cdot A_p}{A_{c,eff}}$ ,

➤  $\text{eff}\rho_{tot} = \frac{A_s + A_p}{A_{c,eff}}$ ,

➤  $A_{c,eff} = 2,5 \cdot b \cdot (h-d)$

$b$  étant la largeur de la section,

$h$  sa hauteur et  $d$  la distance du centre de gravité des aciers à la fibre la plus comprimée.

On peut montrer que ces formules sont issues du Code Modèle 1990 (équations 7.4-12 et 7.4-13, avec le coefficient  $\beta$  pris égal à 0,6, ce qui correspond aux chargements de courte durée).

## Modélisation

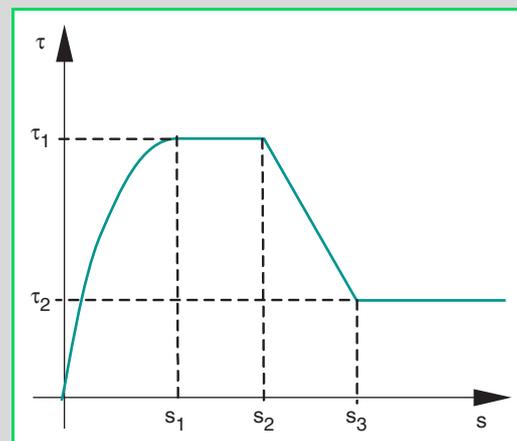
L'adhérence entre le béton et les armatures est un ensemble de phénomènes complexes. De nombreuses descriptions et modélisations en ont été proposées. Une présentation détaillée des mécanismes et des modèles de calcul est donnée en [9].

L'un des modèles les plus répandus est fondé sur une relation locale contrainte d'adhérence/glissement, proposée à l'origine par Rehm [10]. Il a l'avantage d'utiliser directement les résultats expérimentaux issus d'essais d'arrachement pour lesquels l'armature est scellée sur de courtes longueurs.

Plusieurs formulations mathématiques ont été proposées pour décrire les résultats, allant de simples relations  $\tau = \text{constante}$  à des lois polynomiales ou des fonctions puissance. On a utilisé dans cette étude la loi illustrée sur la figure 1. Cette loi est décrite dans une première partie par la fonction puissance proposée par le Code Modèle 1990 [2], avec dans toute la suite des contraintes exprimées en MPa :

$$\tau = \tau_1 \cdot (s/s_1)^\alpha \quad (4)$$

Fig. 1 - Relation  $\tau - s$  (cisaillement – glissement) d'après le Code Modèle1990 [2].



En l'absence de frettage, les valeurs suivantes sont recommandées ( $f_{ck}$  étant la résistance caractéristique du béton en compression, en MPa) :

$$s_1 = s_2 = 0,6 \text{ mm}, s_3 = 1,0 \text{ mm},$$

$$\tau_1 = 2 \cdot f_{ck}^{1/2}, \tau_3 = 0,3 \cdot f_{ck}^{1/2}, \alpha = 0,4.$$

### Modèle du tirant fissuré en béton précontraint

En écrivant les équations d'équilibre, de compatibilité géométrique, et les lois de comportement (la relation  $\tau - s$  peut être assimilée à la loi de comportement de l'interface) pour un tronçon de longueur  $dx$  (fig. 2a et 2b), on obtient l'équation différentielle du glissement  $s$ , fonction de la distance  $x$  à la fissure.

Les lois de comportement s'écrivent en effet :

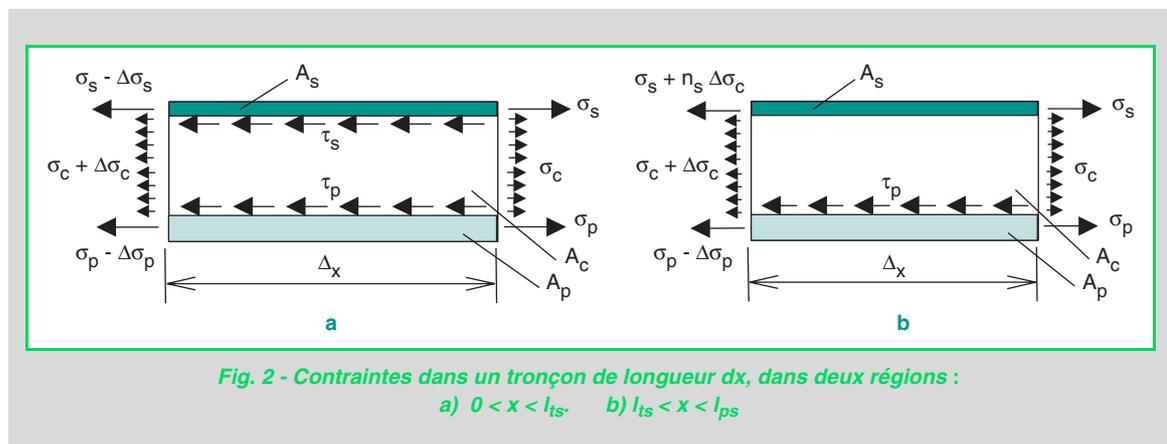
- armature passive (indice s) :  $\sigma_s(x) = E_s \cdot \varepsilon_s(x)$  (5)
- acier de précontrainte (indice p) :  $\sigma_p(x) = E_p \cdot \varepsilon_p(x)$  (6)
- béton (indice c) :  $\sigma_c(x) = E_c \cdot \varepsilon_c(x)$  (7)
- interface adhérente acier-béton :  $\tau(x) = f(s(x))$  (8)

Comme l'adhérence des aciers de précontrainte dans le coulis est moins bonne que celle des aciers de béton armé, leur longueur d'ancrage  $l_{tp}$  sera supérieure à celle de ces derniers :

$$l_{tp} > l_{ts} \quad (9)$$

En conséquence, il est nécessaire de distinguer deux régions :

- ❶ la zone  $0 < x < l_{ts}$  où les efforts des deux types d'armature sont progressivement transmis au béton par adhérence ;
- ❷ la zone  $l_{ts} < x < l_{tp}$  où seul l'effort de l'armature de précontrainte est transmis par adhérence.



#### Zone $0 < x < l_{ts}$ où les deux types d'armatures mobilisent l'adhérence

Les équations d'équilibre s'écrivent :

- pour l'armature de précontrainte :

$$d\sigma_p(x) \cdot A_p = \tau_p(x) \cdot U_p \cdot dx \quad (10)$$

- pour l'armature passive :

$$d\sigma_s(x) \cdot A_s = \tau_s(x) \cdot U_s \cdot dx \quad (11)$$

- pour le béton :

$$d\sigma_c(x) \cdot A_c = \tau_s(x) \cdot U_s \cdot dx + \tau_p(x) \cdot U_p \cdot dx \quad (12)$$

avec

- $U_s$  = périmètre des aciers passifs,
- $U_p$  = périmètre des câbles de précontrainte. Pour ces derniers (et notamment dans les applications numériques à la fin de l'article), lorsqu'il y a plusieurs fils ou torons, on a suivi l'Eurocode 2 ([3, 4] fondé sur [1, 5, 6]), qui prescrit de calculer  $U_p$  comme le périmètre d'une armature de section circulaire de diamètre équivalent  $d_p = 1,6\sqrt{A_p}$ , soit  $U_p = 1,6\pi\sqrt{A_p}$ .

Par élimination de  $\tau$  entre (10), (11) et (12), on peut aussi écrire l'équilibre global du tronçon :

$$d\sigma_s(x) \cdot A_s + d\sigma_p(x) \cdot A_p = d\sigma_c(x) \cdot A_c \quad (13)$$

L'écriture des compatibilités géométriques permet de définir les glissements des deux types d'armatures :

$$ds_s = (\varepsilon_s - \varepsilon_c) \cdot dx \quad (14)$$

$$ds_p = (\varepsilon_p - \varepsilon_c) \cdot dx \quad (15)$$

À partir des équations (10) à (15), on obtient finalement :

$$\frac{d^2s_s}{dx^2} = \frac{1}{E_s} \left( \frac{U_s}{A_s} (1 - n_s \rho_s) \cdot f(s_s) - \frac{U_p}{A_c} \cdot \rho_s \cdot f(s_p) \right) \quad (16)$$

$$\frac{d^2s_p}{dx^2} = \frac{1}{E_p} \left( \frac{U_p}{A_p} (1 - n_p \rho_p) \cdot f(s_p) - \frac{U_s}{A_c} \cdot \rho_p \cdot f(s_s) \right) \quad (17)$$

en ayant posé :  $n_s = E_s/E_c$     $\rho_s = A_s/A_c$     $n_p = E_p/E_c$     $\rho_p = A_p/A_c$

### **Zone $l_{fs} < x < l_{fp}$ où seule l'armature de précontrainte s'ancre progressivement**

Les équations d'équilibre s'écrivent :

- pour l'armature de précontrainte :

$$d\sigma_p(x) \cdot A_p = \tau_p(x) \cdot U_p \cdot dx \quad (18)$$

- équilibre global, en tenant compte du fait que la déformation de l'armature passive est identique à celle du béton :

$$d\sigma_p(x) \cdot A_p = d\sigma_c(x) \cdot A_c + n_s \cdot d\sigma_c(x) \cdot A_s \quad (19)$$

- compatibilité géométrique :

$$ds_p = (\varepsilon_p - \varepsilon_c) \cdot dx \quad (20)$$

En intégrant les lois de comportement, on tire l'équation différentielle du glissement :

$$\frac{d^2s_p}{dx^2} = - \frac{1}{E_p} \cdot \frac{U_p \cdot f(s_p)}{A_p} \left( 1 + \frac{n_p \rho_p}{1 + n_s \rho_s} \right) \quad (21)$$

### **Résolution numérique du système d'équations différentielles**

La résolution analytique des systèmes d'équations différentielles qui précèdent est rarement possible. Au contraire, une intégration numérique pas à pas est d'exécution relativement facile à l'aide d'un programme informatique. Un tel programme a été développé dans l'environnement de programmation Scilab [11], en utilisant la forme discrétisée des équations (16), (17) et (21) de la partie 4.

### **Zone $0 < x < l_{fs}$ où les deux types d'armatures mobilisent l'adhérence**

Pour cette zone où la contrainte varie, en fonction de la distance à la fissure, dans les deux types d'armatures, on définit ci-dessous les incréments de contrainte  $\Delta\sigma$  et de glissement  $\Delta s$  liés au pas de discrétisation spatiale  $\Delta x$  entre les positions  $i$  et  $i + 1$  :

$$\Delta s_{s,i} = (\sigma_{s,i} - n_s \sigma_{c,i}) \Delta x / E_s \quad (22)$$

$$\Delta s_{p,i} = (\sigma_{p,i} - n_p \sigma_{c,i}) \Delta x / E_p \quad (23)$$

$$s_{s,i+1} = s_{s,i} - \Delta s_{s,i} \quad (24)$$

$$s_{p,i+1} = s_{p,i} - \Delta s_{p,i} \quad (25)$$

$$\tau_{s,i} = -(f(s_{s,i}) + f(s_{s,i+1})) / 2 \quad (26)$$

$$\tau_{p,i} = -(f(s_{p,i}) + f(s_{p,i+1})) / 2 \quad (27)$$

$$\Delta \sigma_{s,i} = \tau_{s,i} \cdot \Delta x \cdot U_s / A_s \quad (28)$$

$$\Delta \sigma_{p,i} = \tau_{p,i} \cdot \Delta x \cdot U_p / A_p \quad (29)$$

$$\Delta \sigma_{c,i} = -\tau_{s,i} \cdot \Delta x \cdot U_s / A_c - \tau_{p,i} \cdot \Delta x \cdot U_p / A_c \quad (30)$$

$$\sigma_{s,i+1} = \sigma_{s,i} + \Delta \sigma_{s,i} \quad (31)$$

$$\sigma_{p,i+1} = \sigma_{p,i} + \Delta \sigma_{p,i} \quad (32)$$

$$\sigma_{c,i+1} = \sigma_{c,i} + \Delta \sigma_{c,i} \quad (33)$$

### **Zone $l_{ts} < x < l_{tp}$ où seule l'armature de précontrainte s'ancre progressivement**

Pour cette zone où la contrainte varie, en fonction de la distance à la fissure, dans l'armature de précontrainte seulement, on définit ci-dessous les incréments de contrainte  $\Delta \sigma$  et de glissement  $\Delta s$  liés au pas de discrétisation spatiale  $\Delta x$  entre les positions  $i$  et  $i + 1$ , en intégrant un calcul « en section homogénéisée » pour l'armature passive au sein du béton, avec coefficient d'équivalence  $n_s$  :

$$\Delta s_{p,i} = (\sigma_{p,i} - n_p \sigma_{c,i}) \Delta x / E_p \quad (34)$$

$$s_{p,i+1} = s_{p,i} - \Delta s_{p,i} \quad (35)$$

$$\tau_{p,i} = -(f(s_{p,i}) + f(s_{p,i+1})) / 2 \quad (36)$$

$$\Delta \sigma_{p,i} = \tau_{p,i} \cdot \Delta x \cdot U_p / A_p \quad (37)$$

$$\Delta \sigma_{c,i} = -\tau_{p,i} \cdot \Delta x \cdot U_p / (A_c (1 + n_s \rho_s)) \quad (38)$$

$$\sigma_{p,i+1} = \sigma_{p,i} + \Delta \sigma_{p,i} \quad (39)$$

$$\sigma_{s,i+1} = \sigma_{s,i} + n_s \Delta \sigma_{c,i} \quad (40)$$

$$\sigma_{c,i+1} = \sigma_{c,i} + \Delta \sigma_{c,i} \quad (41)$$

### **Solution obtenue**

Le programme permet d'accéder aux contraintes dans les deux types d'armatures, au glissement relatif acier passif – béton et câble – coulis ainsi qu'à la dérivée première du glissement (fig. 3).

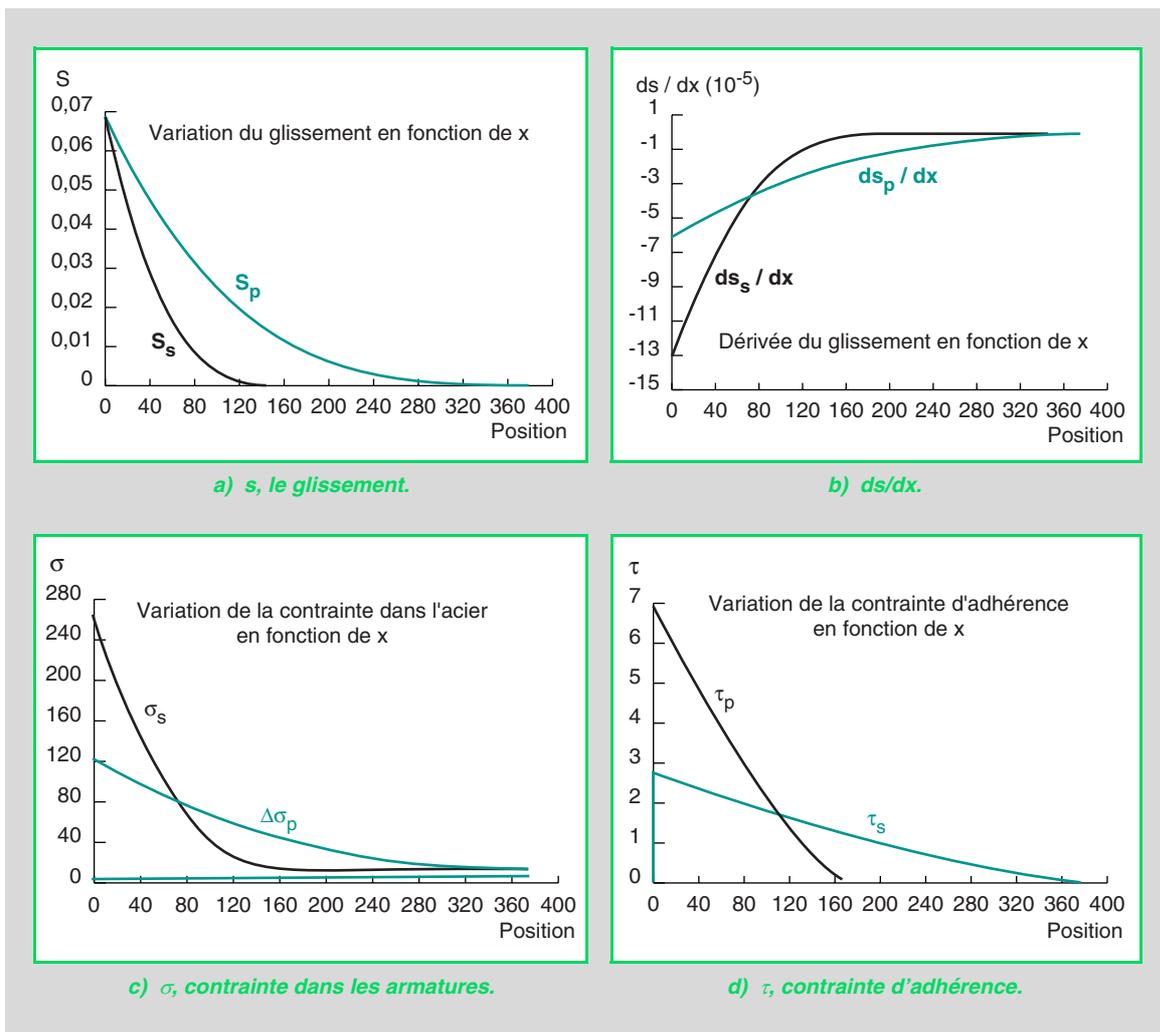
La résolution se fait par itérations, selon le schéma suivant : on utilise une valeur approchée initiale du glissement et des contraintes dans les armatures, pour intégrer le glissement le long de l'élément ; on vérifie alors les conditions aux limites à l'extrémité opposée. Si elles ne sont pas satisfaites, un nouveau jeu de valeurs est choisi pour le glissement et les contraintes dans la section fissurée et on recommence l'intégration. En pratique, il suffit de déterminer deux valeurs initiales, si l'on fait l'hypothèse que le glissement de l'armature passive et celui de l'armature de précontrainte sont identiques dans la section origine (au droit de la fissure) et si l'on tient compte de l'équilibre des efforts entre les deux types d'armatures dans la section fissurée. Ces hypothèses s'écrivent en effet :

$$s_{p,0} = s_{s,0} = s_0 \quad (42)$$

$$\delta \sigma_{s,0} = (A_p / A_s) \delta \sigma_{p,0} \quad (43)$$

où  $\delta \sigma_{s,0}$  (respectivement  $\delta \sigma_{p,0}$ ) désigne la variation de contrainte dans les armatures passives (respectivement actives), due à la différence d'adhérence, par rapport à la contrainte calculée en faisant l'hypothèse classique d'adhérence parfaite en stade II.

Fig. 3 - Variation calculée le long de l'élément, et pour chaque type d'armatures, de :



La vérification des conditions aux limites conduit à distinguer deux cas (fig. 4) :

- la première fissuration,
- la fissuration stabilisée.

#### Première fissuration (fig 4a)

La première fissure apparaît lorsque l'effort de traction atteint la charge de fissuration :

$$F = F_{cr} = A_c f_{ct} (1 + \rho_s n_s + \rho_p n_p) \quad (44)$$

Les conditions aux limites sont alors les suivantes :

$$\text{– pour } x = l_{ts} : s_s = 0 \text{ et } ds_s/dx = 0 \quad (45a,b)$$

$$\text{– pour } x = l_{tp} : s_p = 0 \text{ et } ds_p/dx = 0 \quad (46a,b)$$

$$\text{Il est intéressant de noter que pour } x = l_{tp} : \sigma_c = f_{ct} \quad (47)$$

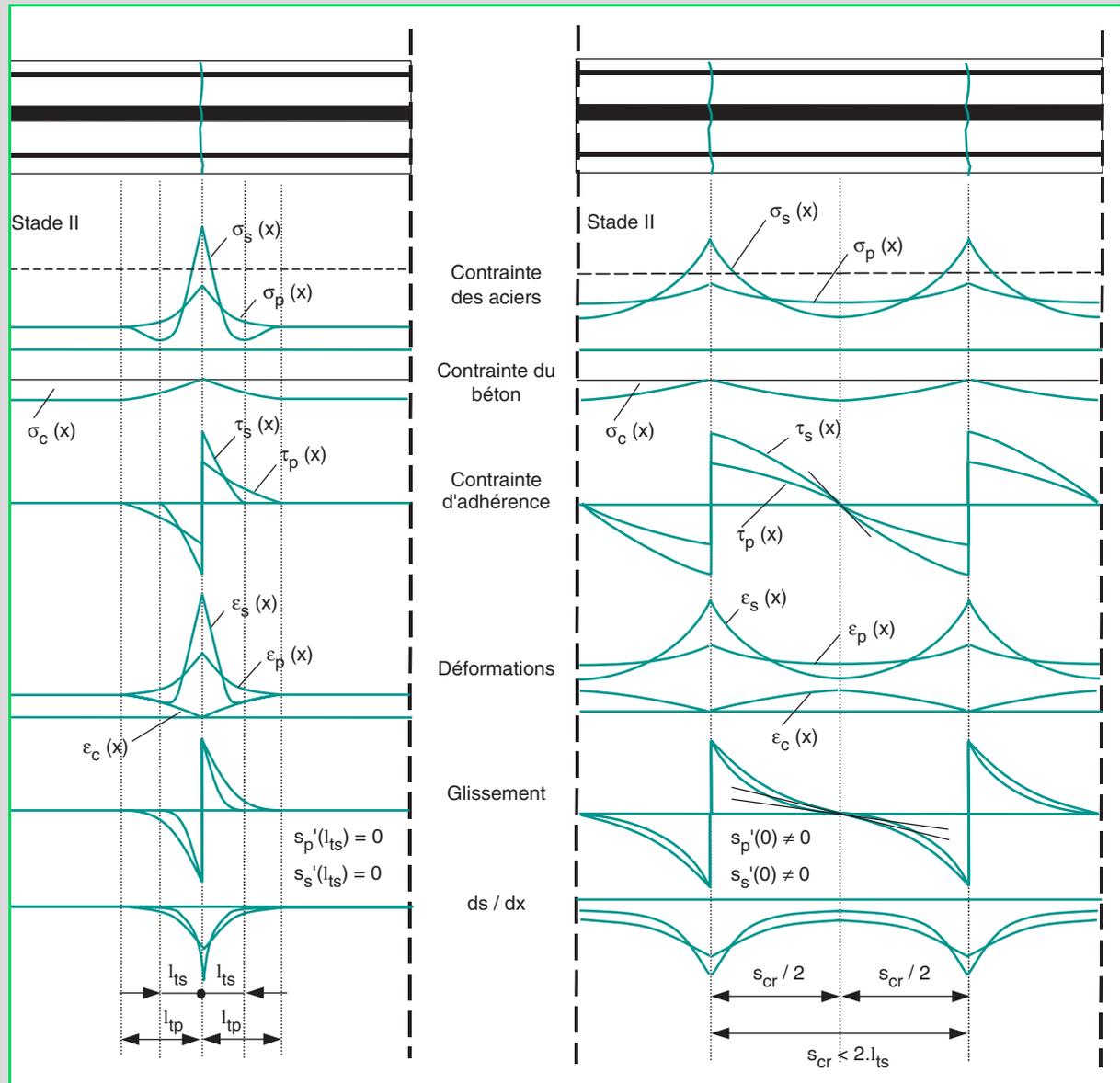
#### Fissuration stabilisée (fig. 4b)

La distance entre deux fissures est  $s_{cr} \leq 2l_{ts}$ .

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\text{– pour } x = s_{cr}/2 : s_s = 0 \text{ et } s_p = 0 \quad (48a,b)$$

Fig. 4 – Répartition des contraintes dans un tirant précontraint fissuré.



a) Première fissuration,

b) Fissuration stabilisée.

Noter, pour la représentation ci-dessus uniquement,  $\sigma_c < 0$  en compression (mais  $\epsilon_c > 0$  en contraction).

Il est intéressant de noter que pour  $x = s_{cr}/2$ , le glissement admet une dérivée non nulle :

$$ds_s/dx \neq 0 \text{ et } ds_p/dx \neq 0 \tag{49a,b}$$

### Effet des charges permanentes

Les charges permanentes, ou maintenues pendant une longue durée, produisent un fluage de l'adhérence. Le phénomène est reconnu par le Code Modèle 1990, où une fonction de fluage est proposée pour une armature directement scellée dans le béton. Le glissement à l'instant  $t$  (exprimé en heures), noté  $s_p$ , est déduit de courbes isochrones reliées entre elles par un coefficient de fluage de l'adhérence  $\phi_b(t)$  (fig. 5).

$$s_t = s_0(1 + \phi_b(t)) \tag{50}$$

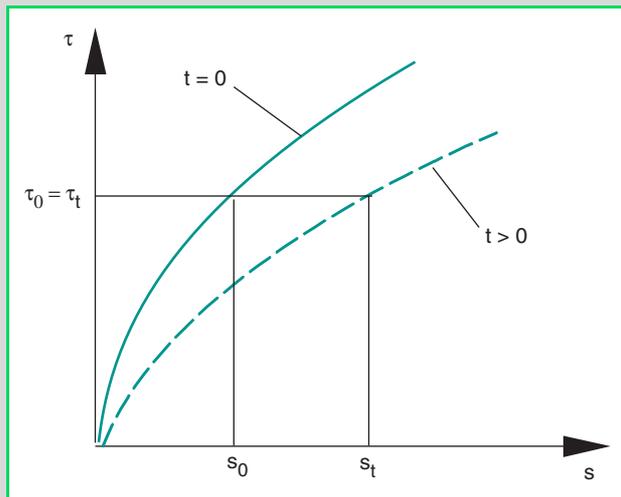


Fig. 5 - Effets de fluage sur la courbe  $\tau - s$ , d'après [2].

avec

$$\varphi_{b,s}(t) = (1 + 10t)^{0,080} - 1 \quad (51)$$

Pour un tirant précontraint, on a été conduit à faire l'hypothèse que l'adhérence des câbles de précontrainte injectés au coulis subit de la même façon un fluage, décrit par une fonction de même forme mathématique :

$$\varphi_{b,p}(t) = a_g(1 + 10t)^{0,080} - 1 \quad (52)$$

Comme le fluage d'un coulis est généralement plus important que celui du béton, on aura  $a_g > 1$ .

Si, à l'instant  $t = 0$ , la contrainte de cisaillement caractéristique de l'adhérence est notée  $\tau$ , le glissement correspondant  $s_0$ , et qu'à chaque instant  $t > 0$ , pour la même contrainte tangente le glissement  $s_t$  est donné par l'équation (50), on peut écrire la relation  $\tau - s$  à tout instant  $t > 0$ .

En utilisant la loi puissance donnée en [2] pour la partie ascendante de la courbe, on obtient :

$$\tau = \tau_1 \left( \frac{s_0}{s_t} \right)^\alpha = \frac{1}{(1 + \varphi_b(t))^\alpha} \cdot \tau_1 \left( \frac{s_0}{s_t} \right)^\alpha \quad (53)$$

## Comparaison avec les résultats expérimentaux

Les résultats expérimentaux de Rudolf sur des tirants en béton précontraint [6] ont été utilisés pour valider la méthode de calcul développée et le programme permettant la résolution. Seuls les corps d'épreuve avec torons de précontrainte ont été retenus. Leurs principales caractéristiques sont données dans le tableau II. Comme la résistance en traction du béton obtenue par fendage diffère parfois significativement de la résistance en traction déduite de la charge de fissuration du tirant, c'est cette dernière valeur qui a été retenue comme donnée d'entrée pour le calcul.

### Comportement sous charges instantanées

Les résultats des expérimentations sont comparés aux grandeurs calculées pour les chargements instantanés (tableau III). Le ratio  $r_s$  entre la contrainte calculée dans l'armature passive et la contrainte en stade II (calculée dans l'hypothèse d'une adhérence parfaite) est en bon accord avec l'expérience si l'on multiplie le facteur  $\xi = 0,5$  par le rapport des résistances en compression du coulis et du béton.

Les ouvertures de fissure calculées sont généralement supérieures aux valeurs expérimentales.

Pour les corps d'épreuve ayant une résistance en compression du béton de 50 à 60 MPa, les valeurs de  $r_s$  calculées sont en bon accord avec l'expérience, si l'on utilise la valeur de l'Eurocode  $\xi = 0,5$ .

**TABLEAU II**

**Principales caractéristiques des tirants testés par Rudlof [6]**

Corps d'épreuve		K7	K8	K9	K10	K13	K14	K19	K20	K25	K26	K27	K28
<b>Armatures passives</b>	Type	4HA10	4HA10	4HA12	4HA16	4HA16	4HA12	4HA10	4HA12	4HA10	4HA16	4HA8	4HA14
	As (mm <sup>2</sup> )	314	314	452	804	804	452	314	452	314	804	201	616
<b>Câbles de précontrainte</b>	Type	3T15	3T15	3T15	3T15	3T15	3T15	3T15	3T15	3T15	3T15	3T15	3T15
	Ap (mm <sup>2</sup> )	420	420	420	420	420	420	420	420	420	420	420	420
<b>Béton</b>	Ap/As	1,34	1,34	0,93	0,52	0,52	0,93	1,34	0,93	1,34	0,52	2,09	0,68
	fc (MPa)	51,6	56,8	60,3	53,5	109,5	104,7	103,4	103,4	50,4	55,8	68,0	70,1
	E (GPa)	34,4	35,7	–	35,5	42,5	43,0	40,2	40,2	33,9	34,2	38,4	36,3
	fct,sp (MPa)	2,46	–	2,95	2,23	4,02	4,02	4,07	4,07	2,27	–	2,64	2,63
	fct = 0,9 fct,sp	2,21	–	2,66	2,01	3,62	3,62	3,66	3,66	2,04	2,04	2,38	2,37
	Fcr (kN)	120	120	120	155	130	160	145	150	100	110	105	120
	fct cr (MPa)	2,28	2,29	2,25	2,80	2,40	3,05	2,79	2,84	1,90	1,98	2,03	2,22
	diff fct (%)	2,9	– 13,9	– 15,2	39,7	– 33,7	– 15,7	– 24,0	– 22,4	– 7,2	– 3,1	– 14,4	– 6,3
	fc (MPa)	59,9	63,5	64,8	57,9	49,9	53,7	55,4	55,4	57,3	63,0	53,4	59,4
	<b>Coulis</b>	E (GPa)	14,4	15,6	16,9	19,5	15,6	15,7	14,4	14,4	17,0	16,6	15,5
	fct,b (MPa)	9,40	8,89	9,55	8,89	8,03	8,66	9,48	9,48	9,52	9,59	8,62	8,00

**TABLEAU III**

**Comparaison des valeurs expérimentales et issues du calcul, pour les chargements instantanés**

Corps d'épreuve	Expérience		Valeurs calculées							À noter
	w (mm)	r <sub>s</sub>	s <sub>0</sub>	σ <sub>II</sub>	σ <sub>s</sub>	σ <sub>p</sub>	w (mm)	r <sub>s</sub>	r <sub>p</sub>	
<b>K7</b>	0,109	1,32	0,070	163,6	225,5	117,3	0,140	1,38	0,72	ξ = 0,4
			0,062	163,6	207,9	130,5	0,124	1,27	0,80	ξ = 0,6
			0,065	163,6	215,9	124,5	0,130	1,32	0,76	ξ = 0,5
<b>K8</b>	0,112	1,33	0,065	163,6	215,9	124,5	0,130	1,32	0,76	ξ = 0,5
<b>K9</b>	0,085	1,19	0,049	139,3	169,4	107,0	0,098	1,22	0,77	ξ = 0,5
<b>K10</b>	0,075	1,01	0,046	126,5	139,4	101,7	0,092	1,10	0,80	ξ = 0,5 ; f <sub>ct</sub> = 2,8
			0,033	99,4	109,6	79,9	0,066	1,10	0,80	ξ = 0,5 ; f <sub>ct</sub> = 2,2
<b>K13</b>	0,084	1,41	0,028	106,2	117,3	85,0	0,056	1,10	0,80	ξ = 0,5
			0,032	106,2	126,4	67,6	0,064	1,19	0,64	ξ = 0,25
<b>K14</b>	0,133	1,41	0,071	183,6	248,7	113,7	0,142	1,35	0,62	ξ = 0,25
<b>K19</b>	0,136	1,50	0,081	197,9	297,3	123,5	0,162	1,50	0,62	ξ = 0,25
<b>K20</b>	0,152	1,70	0,065	171,8	232,3	106,6	0,129	1,35	0,62	ξ = 0,25
<b>K25</b>	0,101	1,28	0,051	136,5	180,1	103,9	0,102	1,32	0,76	ξ = 0,5
<b>K26</b>	0,052	1,07	0,028	89,9	99,0	72,3	0,056	1,10	0,80	ξ = 0,5
<b>K27</b>	0,102	1,55	0,069	168,8	265,6	122,5	0,138	1,57	0,73	ξ = 0,4
<b>K28</b>	0,068	1,12	0,038	115,9	137,2	84,8	0,076	1,18	0,73	ξ = 0,4

La valeur calculée de l'ouverture des fissures,  $w_{cr}$ , est généralement plus grande que la valeur observée expérimentalement, à l'exception du tirant K10. Dans ce cas, cependant, une partie des résultats expérimentaux manque de cohérence : la charge de fissuration est aussi élevée que pour les tirants en béton à hautes performances, et le module d'Young du coulis est le plus élevé de toute la série.

Pour les corps d'épreuve où  $f_c \approx 70$  MPa (le coulis étant resté identique), on obtient un bon accord avec l'expérience en adoptant la valeur  $\xi = 0,4$ .

Pour les corps d'épreuve en béton à hautes performances ( $f_c \approx 105$  MPa), un bon accord a été obtenu avec  $\xi = 0,25$ , pour les tirants K14 et K19, mais pas pour les corps d'épreuve K13 et K20. Pour K20, il faut noter que la valeur de  $r_s$  est supérieure à celle de K19, alors que la quantité d'aciers passifs est supérieure pour K20 (452 mm<sup>2</sup> au lieu de 314).

Au total, on conclut que, pour le cas idéal des tirants en béton partiellement précontraint par post-tension, avec câbles injectés au coulis de ciment, l'intégration de la relation  $\tau - s$  du Code Modèle 1990, avec les valeurs de  $\xi$  proposées par l'Eurocode 2, donne une estimation correcte des contraintes dans les armatures actives et passives. L'accord avec l'expérience est cependant amélioré en multipliant la valeur de  $\xi$  par le rapport des résistances en compression du coulis et du béton.

## Comportement sous charges soutenues

On a effectué les calculs du comportement sous charge soutenue, uniquement dans les cas où un bon accord avait été obtenu entre le calcul et l'expérience pour les chargements instantanés. Dans trois cas la charge a été maintenue sur une période de 700 heures environ et dans les trois autres cas pendant 150 heures environ (tableau IV, 2<sup>e</sup> colonne).

Dans l'équation (52) on a adopté  $a_g = 2$ , selon la suggestion de [5].

La comparaison des résultats de calcul avec les valeurs expérimentales est présentée dans le tableau IV. La valeur des contraintes dans les armatures est relativement bien prédite, tandis que l'ouverture des fissures est généralement surestimée. La description de l'évolution du glissement avec le temps, sous contrainte de cisaillement permanente, fournie par les courbes isochrones et la fonction de fluage du Code Modèle 1990, semble permettre une estimation satisfaisante du comportement des tirants sous charges soutenues ou permanentes.

**TABLEAU IV**  
**Comparaison des valeurs expérimentales et issues du calcul,**  
**sous charge soutenue**

Corps d'épreuve	Expérience			Calcul						
	Temps (h)	w (mm)	$r_s$	$s_0$	$\sigma_{II}$	$\sigma_s$	$\sigma_p$	w (mm)	$r_s$	$r_p$
K7	715	0,142	1,44	0,093	164	239,7	106,7	0,186	1,47	0,65
K9	813	0,115	1,28	0,068	138	182,4	89,21	0,135	1,33	0,65
K19	670	0,172	1,63	0,112	198	323,2	104,1	0,224	1,63	0,53
K25	168	0,141	1,37	0,069	137	198,3	90,27	0,138	1,45	0,66
K26	145	0,075	1,24	0,036	89,9	104,7	61,43	0,072	1,17	0,68
K27	143	0,130	1,69	0,096	169	296,7	107,6	0,191	1,76	0,64

## Comparaison avec l'Eurocode 2

Les valeurs de  $r_s$  issues de l'expérience et celles obtenues par le modèle mis en œuvre dans notre programme de calcul sont rapprochées des valeurs indiquées par l'Eurocode 2 (équation 1 de cet article) pour la justification des armatures vis-à-vis de l'état limite ultime de fatigue (tableau V). La formule de l'Eurocode 2 fournit généralement des valeurs sécuritaires, en surestimant les contraintes dans les aciers passifs. Seuls les corps d'épreuve K13 et K20 font exception, mais on a déjà noté que les valeurs expérimentales sont particulièrement élevées pour ces tirants, sans raison évidente.

**TABLEAU V**  
**Comparaison des valeurs de  $r_s$  issues de l'expérimentation et du calcul,**  
**avec les valeurs réglementaires**

Corps d'épreuve	As (mm <sup>2</sup> )	Ap (mm <sup>2</sup> )	Ap/As	Expérience		Modèle		EC2 (éq. 1)
				$r_s$	$r_{s,t}$	$r_s$	$r_{s,t}$	$\eta$
<b>K7 (<math>\xi = 0,5</math>)</b>	314	420	1,34	1,32	1,44	1,32	1,47	1,54
<b>K8 (<math>\xi = 0,5</math>)</b>	314	420	1,34	1,33	1,41	1,32		1,54
<b>K9 (<math>\xi = 0,5</math>)</b>	452	420	0,93	1,19	1,28	1,22	1,33	1,38
<b>K10 (<math>\xi = 0,5</math>)</b>	804	420	0,52	1,01	1,16	1,10		1,21
<b>K13 (<math>\xi = 0,25</math>)</b>	804	420	0,52	1,41	1,53	1,19		1,29
<b>K14 (<math>\xi = 0,25</math>)</b>	452	420	0,93	1,41	1,49	1,35		1,51
<b>K19 (<math>\xi = 0,25</math>)</b>	314	420	1,34	1,50	1,63	1,50	1,63	1,71
<b>K20 (<math>\xi = 0,25</math>)</b>	452	420	0,93	1,70	1,81	1,35		1,51
<b>K25 (<math>\xi = 0,5</math>)</b>	314	420	1,34	1,28	1,37	1,32	1,45	1,54
<b>K26 (<math>\xi = 0,5</math>)</b>	804	420	0,52	1,07	1,24	1,10	1,17	1,21
<b>K27 (<math>\xi = 0,4</math>)</b>	201	420	2,09	1,55	1,69	1,57	1,76	1,79
<b>K28 (<math>\xi = 0,4</math>)</b>	616	420	0,68	1,12	1,25	1,18		1,28

En tout état de cause, l'Eurocode 2 donne dans sa version actuelle uniquement deux valeurs de  $\xi$ , selon la résistance du béton. On peut penser qu'une expression plus lissée serait préférable. Par ailleurs, seule la résistance du béton est prise en compte, alors que la résistance du coulis semble manifestement devoir intervenir dans la valeur du coefficient  $\xi$ . C'est pourquoi un terme multiplicatif prenant explicitement en compte la résistance du coulis d'une part, et celle du béton d'autre part, serait à prévoir.

## Conclusions et perspectives de recherche

Dans un tirant en béton partiellement précontraint par post-tension et fissuré, les contraintes dans les armatures passives comme dans les câbles injectés peuvent être correctement prévues à partir de la résolution de l'équation différentielle décrivant l'adhérence et des lois d'adhérence fournies par le Code Modèle 1990. La loi de fluage de l'adhérence du Code Modèle 1990 permet également une bonne évaluation de la redistribution des efforts dans les armatures, pour une structure soumise à des charges permanentes. Le rapport, donné par l'Eurocode 2, entre la contrainte d'adhérence pour les torons, et celle des aciers HA, devrait, si l'on a besoin de précision, être modulé par un facteur multiplicatif intégrant l'effet de la qualité du coulis autour des câbles d'une part et du béton autour des armatures d'autre part. Des calculs complémentaires sont nécessaires pour calibrer ce terme correctif.

L'ouverture des fissures se trouve moins bien prévue par cette modélisation ; cependant, l'ouverture calculée est généralement plus grande que la valeur expérimentale relevée, ce qui va dans le sens de la sécurité.

Par rapport aux enjeux initiaux de ce travail, il est maintenant nécessaire, dans une étape ultérieure, de modéliser l'effet de charges cycliques de façon à qualifier la prévision de tenue en fatigue. L'approche, calibrée ici dans un cas relativement idéal de tirants adaptés à des expérimentations en laboratoire, devrait également être étendue au minimum au cas des poutres en flexion, en s'appuyant notamment sur les résultats des expérimentations réalisées au LCPC [7].

Les résultats de la présente étude sont également de nature à justifier la modélisation de l'adhérence, le cas échéant par une loi ou par un élément d'interface, dans le code aux éléments finis CESAR-LCPC.

- [1] TROST H., CORDES H., HAGEN H., THORMÄHLEN U., Teilweise Vorspannung – Verbundfestigkeit von Spanngliedern und ihre Bedeutung für Rissbildung und Rissbreitebeschränkung, *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, (310), 1980, 140 pages.
- [2] CEB-FIP, CEB-FIP Model Code 1990, *Bulletin CEB*, 213-214, 1993.
- [3] *prEN 1992-1* (Final draft April 2002) : Eurocode2 : *Design of Concrete Structures – Part 1 : General rules and rules for buildings*, CEN, Bruxelles, 2002.
- [4] *prEN 1992-2* (First draft January 2002) : Eurocode2 : *Design of Concrete Structures – Part 2 : Bridges*, CEN, Bruxelles, 2002.
- [5] EMPELMANN M., *Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stabtragswerken aus Konstruktionsbeton unter Besonderer Berücksichtigung von Betriebsbeanspruchungen*, Thèse de doctorat, IMB RWTH, Aachen, 1995, 291 pages.
- [6] RUDLOF, M., *Zur Spannungsumlagerung zwischen Spannstahl und Betonstahl bei Spannbeton mit nachträglichem Verbund*, Thèse de doctorat, IMB RWTH, Aachen, 1998, 294 pages.
- [7] BOLUSSET D., SCHALLER I., Fatigue Behavior of Partially Prestressed T-Girders with Post-Tensioned Strands in One Duct, *Challenges for concrete in the next millenium*, 13<sup>e</sup> Congrès de la FIP, 23-29 mai, Amsterdam, Stoelhorst & den Boer eds, Balkema, 1998, pp. 527-530.
- [8] TUE N., *Zur Spannungsumlagerung im Spannbeton bei der Rissbildung unter statischer und wiederholter Belastung*, Thèse de doctorat, Darmstadt, 1992.
- [9] Bond of reinforcement in concrete, *Bulletin FIB*, 10, 2000.
- [10] REHM G., Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton, *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton* (138), 1961, pp. 1-59.
- [11] INRIA : SCILAB, Programme en accès libre sur le site [www-rocq.inria.fr/scilab/](http://www-rocq.inria.fr/scilab/)