

# Introduction de la méthode cinématique régularisée dans CESAR-LCPC (module LIMi)

Nicolai DRONIUC  
Jean-Pierre MAGNAN  
Philippe MESTAT  
Pierre HUMBERT

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

## RÉSUMÉ

La méthode cinématique régularisée a été développée au LCPC depuis les années 1970. Elle est actuellement disponible dans le module LIMi du code de calcul CESAR-LCPC. Cet article présente les bases théoriques de la méthode et sa programmation dans le formalisme des calculs en éléments finis. Les étapes de ces travaux sont rappelées, avec de nombreuses références aux publications qui en décrivent les détails, notamment les thèses.

*Domaine* : Sciences de l'ingénieur.

## ABSTRACT

*INTRODUCTION OF THE REGULARIZED KINEMATIC METHOD WITHIN THE CESAR-LCPC COMPUTATION CODE (LIMI MODULE)*

*The regularized kinematic method has been developed at the LCPC facility since the 1970's. It is now available as the LIMi module of the CESAR-LCPC finite element (FE) code. The present paper sets forth the theoretical basis of this method and its implementation within the framework of FE calculations. The steps accomplished to generate this module will be recalled herein, along with many references to publications containing further details, in particular Ph.D. thesis work.*

*FIELD*: Engineering sciences.

## INTRODUCTION

Les calculs de stabilité ont de nombreuses applications en géotechnique : capacité portante des fondations superficielles, portance des pieux, stabilité des pentes, efforts sur les soutènements, stabilité du front de taille des tunnels, etc. Dans tous ces cas, le sol atteint un état de rupture localisée ou plus globale, un mécanisme de rupture se développe et l'état des contraintes à la rupture est déterminé par les paramètres de résistance du sol. Si l'on se place dans le domaine de la plasticité parfaite, où les déformations associées à ces états limites de contraintes peuvent être quelconques, la résolution de ces problèmes nécessite seulement la connaissance de la géométrie de l'ouvrage et des capacités de résistance.

Depuis les années 1950, une nouvelle théorie a fait son apparition pour l'étude des problèmes de stabilité en géotechnique : c'est la théorie de l'analyse limite, avec ses deux approches, l'une statique et l'autre cinématique, qui permettent d'encadrer inférieurement et supérieurement la charge de rupture d'un ouvrage, en prenant en compte une forme simplifiée (la règle de normalité) de la loi d'écoulement plastique.

Cependant, l'ingénieur géotechnicien désirant utiliser l'analyse limite dans les calculs d'un projet était confronté à la difficulté de définir un mécanisme de rupture et de déterminer la charge de rupture qui le provoque. Si l'ouvrage présente des caractéristiques géométriques, mécaniques et de chargement « assez simples », imposer un mécanisme de rupture ne présente pas de difficultés remarquables (par exemple, une fondation superficielle, sous charge verticale centrée, posée sur un sol horizontal). Cependant, la majorité des ouvrages géotechniques présente des complexités qui peuvent être liées soit à la géométrie (comportement tridimensionnel, présence de différentes couches de sol, etc.), soit aux caractéristiques mécaniques (présence de différentes couches de sol) ou encore aux chargements (par exemple l'inclinaison ou l'excentrement des charges appliquées aux fondations, les forces d'écoulement, etc.), et l'intuition de l'ingénieur géotechnicien peut ne pas suffire pour imposer un mécanisme de rupture réaliste.

La méthode cinématique régularisée, développée depuis plus de trente ans au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, peut répondre à cette question : grâce à une technique dite de

« régularisation » sur le champ des vitesses cinématiquement admissibles, il n'est plus nécessaire d'imposer des mécanismes de rupture, la recherche est faite de manière automatique.

Ce premier article présente les bases théoriques de la méthode cinématique régularisée et sa résolution par la méthode des éléments finis dans le cadre du programme LIM1 du code de calcul CESAR-LCPC. Dans un second article, on présentera un exemple d'application simple dont on connaît la solution analytique (stabilité d'une pente infinie) et une application à un cas réel (stabilité du remblai A du site expérimental de Sallèdes).

## L'ANALYSE LIMITE EN GÉOTECHNIQUE

### Développement de l'analyse limite au LCPC

À partir des années 1950, la référence étant les travaux de Drucker et Prager [1], l'application de l'analyse limite en mécanique des sols a fait l'objet d'un nombre croissant de recherches. Ces applications ont suivi les étapes du développement de l'analyse limite appliquée aux calculs des structures en général, mais aussi les étapes du développement de la théorie de la plasticité et de la méthode des éléments finis.

Au niveau international, on peut notamment citer les contributions majeures des professeurs Meyerhof, Chen, Sloan, Michalowski (voir par exemple [2, 3, 4, 18, 25]).

En France, les premiers travaux dédiés aux calculs des charges limites de rupture remontent au début des années 1960. Dans les actes du séminaire de plasticité organisé à l'École Polytechnique en 1961, Radenkovic publie des résultats théoriques concernant l'unicité de l'état des contraintes à la limite de l'écoulement plastique, ainsi que les deux théorèmes, statique et cinématique, de l'analyse limite. Il fait aussi des remarques sur l'extension de l'analyse limite aux problèmes de stabilité en mécanique des sols, en différenciant les « matériaux standard » obéissant à la loi d'écoulement plastique associée (principe du travail plastique maximal de Hill), et les « matériaux non standard », n'obéissant pas à cette loi (loi d'écoulement plastique non-associée) [5, 6].

À partir des années 1970, Salençon [7-9] a consacré un grand nombre de travaux à l'analyse limite et à son application en mécanique des sols. Les notions de « chargement dépendant de  $n$  paramètres », « chargement potentiellement supportable » ou « chargement effectivement supportable » par un ouvrage, ont constitué des notions fondamentales dans le développement de l'analyse limite dans les années 1980-1990 au LCPC.

L'approche cinématique de l'analyse limite permet de trouver la borne supérieure de la charge limite de rupture d'un ouvrage, par la construction d'une suite de vitesses de déplacement cinématiquement admissibles minimisant une fonctionnelle qui est la différence entre la puissance résistante maximale et la puissance des efforts extérieurs. Pour la résolution des équations de l'approche cinématique de l'analyse limite, les suites  $u$  des vitesses de déplacement cinématiquement admissibles doivent être bornées et doivent appartenir à des ensembles de fonctions permettant d'extraire des sous-suites qui convergent pour des topologies convenables [10]. Lorsque la plastification (ou bien l'écoulement plastique) intervient sur une partie  $\Gamma_u$  de la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  ( $\Omega$  étant le domaine occupé par un ouvrage) ou à l'intérieur de  $\Omega$  (surface de glissement), on est dans le cas d'un champ de vitesses de déplacement présentant des discontinuités.

Pour éviter d'avoir à traiter des discontinuités des champs de vitesses de déplacement, il est possible d'utiliser des techniques dites de régularisation. Sur la base des travaux de Moreau [11, 12], Nayroles [13], Frémond et Salençon [14] et Salençon [9], Friâa et Frémond ont développé une technique de régularisation viscoplastique basée sur l'utilisation de la loi de Norton-Hoff généralisée [15]. Dans cette approche, les champs de vitesses de déplacement sont continus sur  $W$  et, pour trouver les bornes des charges limites, il suffit de considérer des espaces fonctionnels de Sobolev et, plus précisément des espaces de type  $W^{1,1}$  (ensemble des fonctions  $u$  sommables sur  $\Omega$  et qui admettent des dérivées partielles, au sens des distributions, de premier ordre également sommables sur  $\Omega$ ). La thèse de Friâa (1979) contient toutes les bases de l'analyse cinématique régularisée, qui ouvre la porte de calculs numériques libérés des aspects associés à la gestion des discontinuités des champs de contraintes ou déformations dans les matériaux [16]. Les premières applications numériques de l'analyse cinématique régularisée ont été effectuées dès l'année suivante dans le cadre de la thèse de Guennouni (1982) [17, 18]. Ensuite, quatre thèses de doctorat ont été consacrées au développement de la méthode cinématique régularisée :

① Jiang (1992) a construit le module LIMI de CESAR-LCPC, précisé certaines méthodes de résolution numérique et traité de nombreux exemples exploratoires, qui ont donné confiance dans les capacités de la méthode [19, 20].

② Sassi (1996) a exploré l'application de l'analyse cinématique régularisée aux études de stabilité de pentes, puis à la stabilité de fondations superficielles en bord de talus [21]. Les études de pentes ont montré qu'il était nécessaire de tenir compte des pressions interstitielles dans les calculs d'analyse limite, ce qui fut fait par Droniuc (2001) [22]. Les études de fondations en bord de pente ont confronté pour la première fois de façon systématique les résultats de LIMI avec des analyses classiques fondées sur l'optimisation de mécanismes de rupture explicites (thèse de Garnier, [23]).

③ Antao (1997) a perfectionné les procédures numériques de LIMI, introduit des méthodes de résolution directe et plus rapide pour certains calculs et exploré l'application de l'analyse cinématique régularisée aux tunnels [24].

④ Droniuc (2001) a encore amélioré les méthodes de résolution numérique, diversifié les modèles de résistance utilisables et amené le module LIMI de CESAR-LCPC à un état diffusable [22]. Cette dernière période a vu notamment l'application de LIMI à des problèmes dont la solution n'était pas connue (ancres à succion, fondations à jupe pour les constructions offshore) et une comparaison systématique des solutions numériques de LIMI avec toutes les solutions développées depuis près d'un siècle pour la portance des fondations superficielles [25].

## Définitions de base pour l'analyse limite

On considère un ouvrage qui occupe un domaine  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^N$  ( $N$  étant la dimension de l'espace, par exemple  $N = 3$  pour le cas tridimensionnel) et l'on désigne par  $\Gamma$  la frontière de  $\Omega$ . Les efforts intérieurs en chaque point  $\mathbf{x}$  du domaine  $\Omega$  sont représentés par un tenseur  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ , que l'on identifie à un élément de  $\mathbf{R}^m$ .

La capacité de résistance du sol constituant l'ouvrage (en tout point  $\mathbf{x}$  du domaine  $\Omega$ ) est définie par un ensemble convexe  $C(\mathbf{x})$  de  $\mathbf{R}^m$ . L'ensemble  $C(\mathbf{x})$  est fermé et contient l'origine ; par définition, le matériau ne peut supporter que les efforts intérieurs à ce domaine, désignés par  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in C(\mathbf{x})$ . La signification directe de  $C(\mathbf{x})$  est la suivante : l'ensemble  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in C(\mathbf{x})$  représente le critère de rupture (Tresca, pour la rupture des massifs de sols à court terme, Mohr-Coulomb pour la rupture des massifs de sols à long terme, etc.).

On remarque ici que les résultats obtenus par le calcul à la rupture sont indépendants de la loi de comportement : les seules notions qui interviennent sont le critère de rupture et la loi d'écoulement plastique (qui relie les contraintes au taux de déformation plastique).

On considère les ensembles suivants : l'ensemble des vitesses cinématiquement admissibles, noté  $V$  ; l'ensemble des efforts extérieurs, que l'on désigne par  $F$  (ensemble dual de  $V$ ) ; l'ensemble des vitesses de déformation  $D$  ; l'ensemble des efforts intérieurs  $S$  (ensemble dual de  $D$ ).

La dualité entre les ensembles  $V$  et  $F$  s'écrit sous la forme :  $(\mathbf{f}, \mathbf{v})$ , pour  $\mathbf{f} \in F$  et  $\mathbf{v} \in V$ , où  $(\mathbf{f}, \mathbf{v})$  désigne la puissance des efforts extérieurs  $\mathbf{f}$ , pour la vitesse de déplacement  $\mathbf{v}$ .

La dualité entre les ensembles  $D$  et  $S$  s'écrit sous la forme :  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{d})$ , pour  $\boldsymbol{\sigma} \in S$  et  $\mathbf{d} \in D$ , où  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{d})$  représente la puissance des efforts intérieurs  $\boldsymbol{\sigma}$  dans la vitesse de déformation  $\mathbf{d}$ .

L'ensemble  $C(\mathbf{x})$  est défini par :  $C(\mathbf{x}) = \{ \boldsymbol{\sigma} \in S \mid \forall \mathbf{x} \in \Omega, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in C(\mathbf{x}) \}$ .

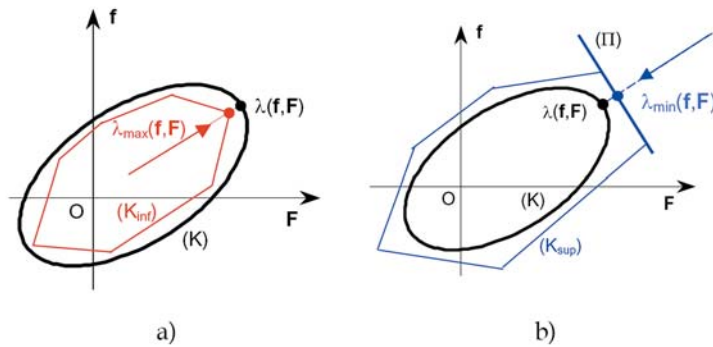
## Approche statique et approche cinématique

### Théorème 1 (statique)

S'il existe un champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ , défini en tout point  $\mathbf{x}$  de  $\Omega$ , statiquement et plastiquement admissible qui équilibre les chargements  $(\mathbf{f}, \mathbf{F})$ , alors l'ouvrage est stable sous ces chargements :

$$\lambda_{\max} = \max_{\lambda \geq 0} \{ \lambda \mid (\mathbf{f} + \lambda \mathbf{f}, \mathbf{F} + \lambda \mathbf{F}) \text{ soit équilibré par } \boldsymbol{\sigma} \in C \} \quad (1)$$

L'approche statique est une conséquence directe du principe des puissances virtuelles ; elle permet l'approximation de  $K$  par l'intérieur, par la construction de  $K_{\text{inf}}$ , ce qui va dans le sens de la sécurité de l'ouvrage. Sur la figure 1a, on donne une interprétation géométrique de la relation (1), dans le cas d'un processus de chargement à deux paramètres ( $n = 2$ ) (cette représentation a été utilisée pour la première fois par Salençon, [8]).



□ **Figure 1**

Approche statique (a) et approche cinématique (b) : interprétation géométrique, d'après [8].

### Théorème 2 (cinématique)

S'il existe un champ de vitesses cinématiquement admissibles, tel qu'on ait :  $J(\mathbf{v}) = P(\mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) < 0$ , on peut affirmer qu'il y a incompatibilité entre l'équilibre quasi-statique du système sous le chargement  $(\mathbf{f}, \mathbf{F})$  et les capacités de résistance du matériau. On peut écrire alors :

$$\exists \mathbf{v} \in V, \text{ tel que } J(\mathbf{v}) < 0 \Rightarrow (\mathbf{f}, \mathbf{F}) \notin K$$

Cette seconde approche de l'analyse limite résulte de la dualisation de l'approche statique par l'intermédiaire du principe des puissances virtuelles [18]. La puissance résistante maximale  $P(\mathbf{v})$  et la puissance des efforts extérieurs  $L(\mathbf{v})$  sont données respectivement par les relations :

$$P(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \pi(\mathbf{d}) \, d\Omega \quad L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_F} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_F \quad (2)$$

correspondant à un champ de vitesses de déplacement cinématiquement admissibles  $\mathbf{v}$ .  $\pi(\mathbf{d})$  est la fonction d'appui définie par :  $\pi(\mathbf{d}) = \sup\{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \mid \boldsymbol{\sigma} \in C\}$ .

Autrement dit, cette méthode consiste à trouver une valeur  $\lambda_{\min}$  du coefficient  $\lambda$ , telle que :

$$\lambda_{\min} = \min_{\lambda \geq 0} \left\{ \lambda \mid \exists \mathbf{v}, P(\mathbf{v}) - \lambda L(\mathbf{v}) \leq 0, \mathbf{v} \text{ cinématiquement admissible}, \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \text{ sur } \Gamma_v \right\} \quad (3)$$

La figure 1b donne l'interprétation géométrique immédiate de la relation (3), dans le cas d'un processus de chargement à deux paramètres. Le domaine  $K$  est inclus dans le demi-espace  $(P)$  contenant l'origine, et délimité par le plan d'équation :

$$P(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \text{ pour tout } \mathbf{v} \in V$$

On aboutit à une approche par l'extérieur de  $K$  et on désigne par  $K_{\text{sup}}$  ce domaine obtenu par l'intersection des demi-espaces  $(\Pi_i)$  définis dans un processus de chargement à  $n$  paramètres :

$$K_{\text{sup}} \subset \bigcap_{i=1}^k \Pi_i \quad (4)$$

On dispose ainsi de deux méthodes pour approcher le domaine  $K$  des chargements potentiellement supportables. Dans le cas d'un processus de chargement à  $n$  paramètres, par la méthode statique on détermine un domaine  $K_{\text{inf}}$  et, par la méthode cinématique, un domaine  $K_{\text{sup}}$  qui vérifient la relation d'inclusion suivante :

$$K_{\text{inf}} \subseteq K \subseteq K_{\text{sup}} \quad (5)$$

Comme le domaine  $K$  est convexe, tout chargement situé sur le segment qui relie deux chargements vérifiant le théorème statique est situé à l'intérieur de  $K$ , d'où la convexité du domaine  $K_{\text{inf}}$ . Pour sa part, le domaine  $K_{\text{sup}}$  est construit par des demi-espaces qui tendent à se rapprocher par l'extérieur du domaine  $K$ , donc c'est un convexe [16].

## Régularisation de l'approche cinématique de l'analyse limite

On suppose qu'à l'instant  $t_0$  l'ouvrage est dans un état naturel. À partir de l'instant  $t_1 > t_0$ , on lui applique des efforts extérieurs définis par une distribution volumique  $\mathbf{f}$  dans  $\Omega$ , et une distribution surfacique  $\mathbf{F}$  sur une partie  $\Gamma_F$  de la frontière  $\Gamma$ . Par ailleurs, on impose à l'ouvrage un déplacement  $\mathbf{u}$  sur la partie  $\Gamma_u$  de  $\Gamma$ , complémentaire de  $\Gamma_F$  ( $\Gamma_u \cup \Gamma_F = \Gamma$ ). En outre, on néglige les efforts thermiques et on suppose également que l'application des efforts extérieurs est suffisamment lente pour ne pas tenir compte des effets d'inertie, c'est-à-dire que l'évolution est « isotherme » et « quasi-statique », et on se place dans le cadre classique des petites déformations.

On cherche un champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  et un champ de vitesses de déplacement  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , définis sur  $\Omega$  (où  $\Omega = \Omega \cup \Gamma$ ), vérifiant :

- l'équation d'équilibre :  $\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0$  ;
- les conditions aux limites statiques :  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}$  sur  $\Gamma_F$  ;
- les conditions aux limites sur les vitesses de déplacement :  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$  sur  $\Gamma_u$  ;
- la loi de comportement du matériau de Norton-Hoff généralisée :  $\boldsymbol{\sigma} \in \partial \Psi_p(\mathbf{d})$  ou  $\mathbf{d} \in \partial \Psi_p^*(\boldsymbol{\sigma})$

où les vitesses de déformation plastique  $\mathbf{d}$  sont obtenues par :  $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{v} + \text{grad}^T \mathbf{v})$  et  $\partial$  désigne le sous-différentiel.

La loi de Norton-Hoff généralisée est définie par les potentiels duaux suivants, qui sont des fonctions continues sur leur domaine d'existence :

$$\Psi_p(\mathbf{d}) = \frac{1}{p} \lambda^{1-p} \{\pi(\mathbf{d})\}^p, \text{ si } d_{ii} = 0 \text{ et } \Psi_p(\mathbf{d}) = +\infty \text{ si } d_{ii} \neq 0$$

$p$  et  $\lambda$  sont deux réels strictement positifs. La fonction duale s'écrit :

$$\Psi_p^*(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{q} \lambda \{g(\boldsymbol{\sigma})\}^q$$

où  $q$  est tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (cas particulier de l'inégalité de Hölder [26]) ;  $g(\boldsymbol{\sigma})$  est la fonction jauge du convexe  $C$ , définie par :  $g(\boldsymbol{\sigma}) = \inf\{\mu > 0 / \boldsymbol{\sigma} \in \mu C\}$ .

Dans les relations précédentes, les variables  $\mathbf{x}$  et  $t$  ont été omises (et seront omises dans la suite) afin de simplifier l'écriture. Ces équations définissent un problème d'écoulement plastique.

La formulation variationnelle de ce problème est fondée sur la notion de dualité entre les forces et les déplacements, d'une part, et entre les contraintes et les déformations, d'autre part. Plus précisément, l'espace  $V$  des vitesses cinématiquement admissibles s'identifie à un espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$ , muni de la norme correspondante, tandis que l'espace  $F$  des forces extérieures est son dual. L'espace  $D$  des vitesses de déformation est un espace  $L^p(\Omega)$  et l'espace  $S$  des contraintes statiquement et plastiquement admissibles est son dual  $L^q(\Omega)$ .

Le résultat obtenu est le suivant : le problème d'écoulement est équivalent à deux problèmes duaux (qu'on va désigner par (P) et (P\*)), analogues aux principes de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire bien connus en élasticité [16].

(P) Parmi tous les champs de vitesses cinématiquement admissibles, trouver un champ de vitesses  $\mathbf{v}$  qui rend minimale la fonctionnelle :

$$J_p(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \Psi_p(\mathbf{d}) d\Omega - \left( \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_F} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\Gamma_F \right) \quad (6)$$

(P\*) Parmi tous les champs de contraintes statiquement admissibles, trouver un champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ , qui rend minimale la fonctionnelle :

$$J_p^*(\boldsymbol{\sigma}) = \int_{\Omega} \Psi_p^*(\boldsymbol{\sigma}) d\Omega - \int_{\Gamma_u} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\Gamma_u \quad (7)$$

On considère les hypothèses suivantes :

(H<sub>1</sub>) Le convexe  $C$  est fermé.

(H<sub>2</sub>) On note  $S^r$  ( $r \geq 2$ ) l'espace vectoriel des tenseurs symétriques d'ordre  $r$  sur  $\mathbf{R}^r$ . Il existe une boule  $B(0, \rho)$  dans  $S^r$  de centre l'origine et de rayon  $\rho > 0$ , telle que :  $B(0, \rho) \subset C$ , dans un point  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Dans la présente étude, on s'intéresse à la régularisation de l'approche cinématique de l'analyse limite et pour cela on rappelle les résultats suivants [12], concernant l'existence d'une solution du problème (P).

### Théorème 3

Si  $\Omega$  est un domaine ouvert régulier,  $\mathbf{v} \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^p(\Omega)$ ,  $\mathbf{f} \in L^q(\Omega)$  et  $\mathbf{F} \in L^q(\Gamma_f)$ , l'hypothèse (H<sub>2</sub>) est vérifiée,  $\Gamma_v$  et de mesure non nulle, et  $\Psi_p$  convexe, alors le problème (P) admet une solution unique.

Autrement dit, l'appartenance des fonctions du problème d'écoulement plastique aux espaces considérés ci-dessus permet de trouver la solution du problème et de prouver son unicité. L'interprétation mécanique de ce résultat est la suivante : parmi tous les champs de vitesses de déplacement cinématiquement admissibles, le champ de déplacement réel  $\mathbf{v}$  est celui qui minimise la puissance totale, somme de la puissance des efforts intérieurs et de la puissance des efforts extérieurs. Les hypothèses supplémentaires ajoutées dans le théorème 3 sont des hypothèses de régularité sur le domaine  $\Omega$  et sur les données  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{v}$ . Elles ne sont pas très contraignantes puisqu'elles sont souvent vérifiées en pratique.

*Remarque.* Le théorème 3 ne couvre pas le cas d'un sol caractérisé par un critère de rupture de Mohr-Coulomb et dont la cohésion est nulle. En fait, le théorème est vrai si le convexe  $C$  contient l'origine et si la fonction d'appui  $\pi(\mathbf{d})$  n'est pas toujours égale à zéro.

On suppose que le matériau occupant le domaine ouvert  $\Omega$  est caractérisé par la loi de Norton-Hoff généralisée, associée au convexe des contraintes admissibles  $C$ . Si on lui applique un chargement  $(\mathbf{f}, \mathbf{F})$ , on obtient son écoulement défini par un champ de vitesses de déplacement admissibles  $\mathbf{v}$ . Il est possible de montrer que, lorsque la loi de Norton-Hoff généralisée tend vers la loi rigide parfaitement plastique (quand la viscosité  $p$  tend vers 1), les convexes  $K_p$  tendent vers  $K$  [12]. Cela est assuré par le théorème 4.

### Théorème 4

La famille des convexes  $(K_p)_{p>1}$  est décroissante avec  $p$ , c'est-à-dire que :

$$p' \geq p > 1 \Rightarrow K_{p'} \supset K_p. \text{ De plus : } \mathbf{K} = \bigcap_{p>1} K_p$$

Notons par  $J_p(\mathbf{v}) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\Psi_p(\mathbf{d})|^p - L(\mathbf{v})$ , avec  $L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\Gamma_f$ , la différence entre la puissance dissipée par le matériau de Norton-Hoff et la puissance fournie par les forces extérieures  $(\mathbf{f}, \mathbf{F})$ , dans le champ des vitesses cinématiquement admissibles  $\mathbf{v}$ . Un écoulement solution du problème cinématique régularisé minimise  $J_p(\mathbf{v})$  sur l'espace  $V$  des vitesses.

$$\text{On introduit la fonction jauge du convexe } K_p : G_p(\mathbf{f}, \mathbf{F}) = \left\{ -\frac{P}{(p-1) \int_{\Omega} d\Omega} \inf_{\mathbf{v} \in V} [J_p(\mathbf{v})] \right\}^{1-\frac{1}{p}} \quad (8)$$

Sous l'hypothèse de convexité des ensembles  $C$  et  $K$ , Friâa [16] a démontré les résultats suivants.

### Théorème 5

Si le convexe  $K_p$  est fermé dans  $\mathbf{R}^N$ , alors le chargement  $(\mathbf{f}, \mathbf{F})$  est potentiellement supportable si et seulement si :

$$\sup_{p>1} \sup_{\mathbf{v}_{np}} \left\{ -\frac{P}{(p-1) \int_{\Omega} d\Omega} \inf_{\mathbf{v} \in V} [J_p(\mathbf{v})] \right\}^{1-\frac{1}{p}} \leq 1 \quad (9)$$

où  $\mathbf{v}_{np}$  est une suite minimisante de  $J_p(\mathbf{v})$  sur l'espace  $V$  des vitesses cinématiquement admissibles.

## Méthode de calcul

La caractérisation des chargements supportables par le théorème 5 est plus maniable que la caractérisation cinématique classique, du point de vue des applications pratiques. Cette caractérisation conduit à l'algorithme suivant :

➤ soit  $(\mathbf{f}, \mathbf{F})$  un chargement donné : construire, pour un coefficient de viscosité  $p$  fixé, une suite  $\mathbf{v}_{np}$  minimisante de  $J_p(\mathbf{v})$  ;

$$\text{➤ calculer : } \beta = \sup_{p>1} \sup_{\mathbf{v}_{np}} \left\{ -\frac{P}{(p-1) \int_{\Omega} d\Omega} \inf_{\mathbf{v} \in V} [J_p(\mathbf{v})] \right\}^{1-\frac{1}{p}} \text{ est supportable} \quad (10)$$

$$\text{➤ conclure : } \begin{cases} \text{si } \beta \leq 1 (\mathbf{f}, \mathbf{F}) \text{ est supportable} \\ \text{si } \beta > 1 (\mathbf{f}, \mathbf{F}) \text{ n'est pas supportable} \end{cases} \quad (11)$$

La suite des vitesses cinématiquement admissibles  $\mathbf{v}_{np}$  minimisant la puissance totale est le champ des vitesses cinématiquement admissibles qui correspond à l'écoulement plastique libre [18].

## Détermination pratique des charges de rupture

Le domaine convexe des chargements supportables ( $K$ ) peut être déterminé soit par l'approche statique, par la construction de  $K_{inf}$ , soit par l'approche cinématique, par la construction de  $K_{sup}$  (cf. Fig. 1) et on a la relation d'inclusion suivante entre ces domaines :

$$K_{inf} \subseteq K \subseteq K_{sup} \quad (12)$$

Les définitions de  $K_{inf}$  et  $K_{sup}$  sont fondées sur la convexité de la fonction de charge  $f(\boldsymbol{\sigma})$ , sous l'hypothèse du travail plastique maximal de Hill et, de plus, si l'on est dans le cas d'un matériau caractérisé par un critère de rupture de Von Misès ou de Tresca, on a l'égalité dans la relation ci-dessus, en tenant compte des hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$  [16].

Si un matériau est caractérisé par un critère de rupture de Mohr-Coulomb, par exemple, les hypothèses considérées pour les critères de Von Misès ou de Tresca ne sont pas suffisantes pour montrer l'équivalence des approches statique et cinématique. Frémond et Friâa (1978) ont montré qu'il est possible d'avoir l'équivalence entre les deux approches, sous certaines conditions, comme on peut le voir dans la formulation des deux théorèmes suivants [15].

### Théorème 6

Si 0 est intérieur au domaine des contraintes admissibles  $C$ , pour une topologie compatible avec la dualité, alors on a l'équivalence entre les approches statique et cinématique.

### Théorème 7

Si le domaine des contraintes admissibles  $C$  est borné, alors on a l'équivalence entre les approches statique et cinématique.

Deux conséquences pratiques de ces théorèmes peuvent être formulées :

- ❶ la borne supérieure obtenue par la méthode cinématique régularisée est, à la limite, égale à la charge de rupture de l'ouvrage, plus précisément la charge de rupture qui correspond à un écoulement plastique libre [18] ;
- ❷ le théorème 7 entraîne l'équivalence de la méthode statique et de la méthode cinématique à condition que le domaine convexe  $C$  soit borné. L'introduction d'un critère de rupture dans l'approche cinématique régularisée nécessite alors la définition d'une troncature, de telle manière que les champs de contraintes statiquement et plastiquement admissibles soient presque partout bornés [18, 27].

Le choix d'une troncature s'appuie sur trois aspects [22] :

- ❶ la convexité du domaine local des contraintes admissibles obtenu par troncature ;
- ❷ la simplicité dans la formulation mathématique de la fonction de dissipation plastique ;
- ❸ la régularité de la fonction de dissipation plastique associée au critère.

La première condition découle du principe du travail plastique maximal et les deux dernières ne sont pas nécessaires, mais sont utiles, car elles permettent un traitement numérique plus simple.

## Prise en compte de l'eau dans les problèmes de stabilité

En écrivant l'équation de la conservation de la masse du fluide en écoulement dans un massif de sol et la loi de Darcy qui gouverne l'écoulement en milieu poreux indéformable, on obtient l'équation d'écoulement sous la forme :

$$\operatorname{div}[\mathbf{k} \operatorname{grad}(h)] = \frac{\partial n}{\partial t} \quad (13)$$

où  $\mathbf{k}$  désigne le tenseur de perméabilité du sol ;  $h$ , la charge hydraulique ;  $n$ , la porosité du sol et  $t$  le temps. Dans le cas d'un écoulement permanent, la variable « temps » n'apparaît plus dans l'équation précédente et on peut écrire l'équation d'écoulement sous la forme :  $\Delta h = 0$ , où  $\Delta$  désigne l'opérateur de Laplace.

Pour un sol saturé, le principe des puissances virtuelles peut s'écrire sous la forme suivante, compte tenu de sa formulation en contraintes effectives :

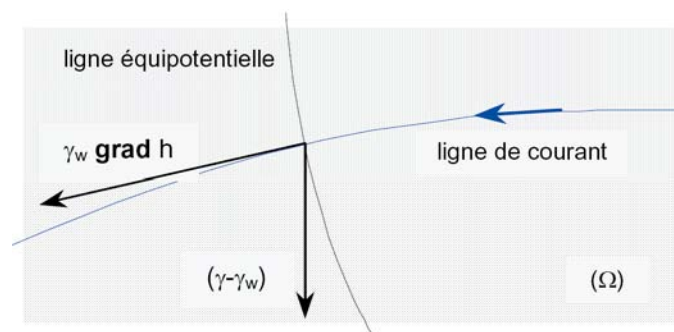
$$\int_{\Omega} \pi(\mathbf{d}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}' : \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_F} \mathbf{F}' : \mathbf{v} d\Gamma_F \quad (14)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}'$  est le tenseur des contraintes effectives ;  $\mathbf{v}$ , le champ des vitesses de déplacement ;  $\mathbf{d}$ , le champ des vitesses de déformation ;  $\mathbf{f}'$ , l'ensemble des forces volumiques (forces de pesanteur, forces de poussée d'Archimède pour les parties du sol sous la nappe, forces d'écoulement hydraulique, etc.) et  $\mathbf{F}'$ , les forces de surface appliquées sur la partie  $\Gamma_F$  du contour  $\Gamma$ .

Le taux de dissipation plastique est donné par :  $\pi(\mathbf{d}) = \sup_{\boldsymbol{\sigma}' \in C'} \{\boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{d}\}$  (15)

où  $C'$  désigne l'ensemble convexe des contraintes admissibles du sol (critère de rupture), en contraintes effectives.

La prise en compte de l'influence de l'eau sur la stabilité d'un ouvrage est donc faite en contraintes effectives. Dans ce cas, après l'évolution des pressions interstitielles, la distribution des surpressions interstitielles correspond à un réseau d'écoulement hydraulique défini par la vitesse d'écoulement de l'eau. La connaissance du champ des charges hydrauliques permet de déterminer les forces d'écoulement : l'influence de l'eau sur la stabilité d'un massif de sol est alors prise en compte comme une donnée relative au chargement dans un problème de stabilité en contraintes effectives (Fig. 2).



□ Figure 2

Effet d'un écoulement hydraulique dans un sol saturé (forces d'écoulement et déjaugage)



## RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE L'APPROCHE CINÉMATIQUE RÉGULARISÉE PAR LA MÉTHODE DU LAGRANGIEN AUGMENTÉ

Le problème cinématique régularisé se réduit à la minimisation d'une fonctionnelle qui est la différence des puissances intérieure et extérieure sur un ouvrage dont le matériau est caractérisé par la loi de comportement de Norton-Hoff généralisée.

Ce problème peut être écrit sous la forme :  $\min_{\mathbf{v} \in V} [F(\mathbf{B}\mathbf{v}) + G(\mathbf{v})]$  (16)

où  $V$  est un espace de Hilbert, et  $\mathbf{B}$  une application linéaire de  $V$  sur un autre espace de Hilbert  $H$ , c'est-à-dire :  $\mathbf{B} \in L(V, H)$ .

Les applications  $F$  et  $G$  sont dans ce cas :

➤ la puissance des efforts intérieurs :  $F(\mathbf{B}\mathbf{v}) = \frac{1}{P} \int_{\Omega} [\pi(\mathbf{B}\mathbf{v})]^P d\Omega$  (17)

➤ la puissance des efforts extérieurs :  $G(\mathbf{v}) = - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Gamma_F} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\Gamma_F$  (18)

On suppose que  $F$  et  $G$  sont des fonctionnelles convexes, semi-continues inférieurement sur  $H$  et  $V$ , respectivement. L'idée principale de cet algorithme est :

trouver :  $\min_{\mathbf{v} \in V} [F(\mathbf{q}) + G(\mathbf{v})]$  (19)

où  $(\mathbf{v}, \mathbf{q}) \in V \times H$ , tel que  $\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{q} = 0$ .

$\mathbf{q}$  est une variable supplémentaire liée à  $\mathbf{v}$  par la condition  $\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{q}$ . Ainsi, on a découpé  $F$  et simplifié le caractère non-linéaire de l'équation (16).

Soit  $(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}) \in V \times H \times H$ . On définit le lagrangien classique  $L$  associé à la relation (19) par la relation suivante :

$$L(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}) = F(\mathbf{q}) + G(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} \boldsymbol{\mu} : (\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{q}) d\Omega \quad (20)$$

Le lagrangien augmenté associé au lagrangien classique ci-dessus est donné par :

$$L_r(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}) = F(\mathbf{q}) + G(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} \boldsymbol{\mu} : (\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{q}) d\Omega + \frac{r}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{q}|^2 d\Omega \quad (21)$$

Le dernier terme de la fonctionnelle  $L_r$  est le terme « augmenté » ou « pénalisateur », qui permet de retrouver la solution exacte du problème, quand elle existe, sans faire tendre le coefficient  $r$  vers l'infini par valeurs positives, comme dans la méthode classique. Le coefficient  $r$  est déterminé de façon à ce que le dernier terme de l'équation (21, à droite) soit du même ordre que le terme  $F(\mathbf{q})$ , puissance des efforts intérieurs [22].

La notion de base dans la méthode du lagrangien est la notion de point-selle. On dit que  $(\mathbf{u}_p, \mathbf{w}_p, \boldsymbol{\lambda}_p) \in V \times H \times H$  est un point-selle de la fonction  $L : V \times H \times H \rightarrow \mathbf{R}$  s'il vérifie :

$$L(\mathbf{u}_p, \mathbf{w}_p, \boldsymbol{\mu}) \leq L(\mathbf{u}_p, \mathbf{w}_p, \boldsymbol{\lambda}_p) \leq L(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}_p) \quad (22)$$

pour tout  $(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}) \in V \times H \times H$ . Si  $(\mathbf{u}_p, \mathbf{w}_p, \boldsymbol{\lambda}_p)$  est un point-selle de  $L$  sur  $V \times H \times H$ , alors  $(\mathbf{u}_p, \mathbf{w}_p, \boldsymbol{\lambda}_p)$  est un point-selle de  $L_r$  et réciproquement.

Pour calculer les points-selles de  $L_r$  on peut utiliser différents algorithmes, notamment ceux dus à Arrow, Harwicz et Uzawa [28] et à Glowinski, Lions et Trémolières [29]. L'algorithme présenté ci-dessous est l'un des algorithmes les plus utilisés [30]. La différence consiste à échanger les rôles des variables  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{q}$ , pour qu'elles aient des rôles symétriques, ce qui donne une relaxation avec un seul balayage du système d'inéquations à résoudre, et a comme conséquence une réduction importante de la durée des calculs [22]. L'algorithme de la méthode d'Uzawa adopté se présente sous la forme suivante :

### Algorithme d'Uzawa ou algorithme externe

- initialisation de  $\mathbf{W}_p^0$  et  $\boldsymbol{\lambda}_p^1$  choisis arbitrairement dans  $H$  ;
- $\mathbf{W}_p^{n \square 1}$  et  $\boldsymbol{\lambda}_p^n$  étant connus, on calcule successivement  $\mathbf{u}_p^n$ ,  $\mathbf{w}_p^n$  et  $\boldsymbol{\lambda}_p^{n+1}$  par :

$$\text{calcul de } \mathbf{u}_p^n : L_r(\mathbf{u}_p^n, \mathbf{w}_p^{n-1}, \boldsymbol{\lambda}_p^n) \leq L_r(\mathbf{v}, \mathbf{w}_p^{n-1}, \boldsymbol{\lambda}_p^n), \forall \mathbf{v} \in V(\mathbf{u}_p^n \in V); \quad (23)$$

$$\text{calcul de } \mathbf{w}_p^n : L_r(\mathbf{u}_p^n, \mathbf{w}_p^n, \boldsymbol{\lambda}_p^n) \leq L_r(\mathbf{u}_p^n, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}_p^n), \forall \mathbf{q} \in H(\mathbf{w}_p^n \in H); \quad (24)$$

$$\text{mise à jour du multiplicateur lagrangien } \boldsymbol{\lambda}_p^{n+1} : \boldsymbol{\lambda}_p^{n+1} = \boldsymbol{\lambda}_p^n + \rho_n (\mathbf{B}\mathbf{u}_p^n - \mathbf{w}_p^n), \rho_n > 0$$

## Méthode de relaxation par blocs ou algorithme interne

La résolution à chaque itération des inéquations (23) et (24) est faite par la méthode de relaxation par blocs, en tenant compte du fait que ces inéquations sont caractérisées par le système :

$$\begin{cases} L_r(\mathbf{u}_p^n, \mathbf{w}_p^{n-1}, \boldsymbol{\lambda}_p^n) = \min L_r(\mathbf{v}, \mathbf{w}_p^{n-1}, \boldsymbol{\lambda}_p^n), \forall \mathbf{v} \in V \\ L_r(\mathbf{u}_p^n, \mathbf{w}_p^n, \boldsymbol{\lambda}_p^n) = \min L_r(\mathbf{u}_p^n, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}_p^n), \forall \mathbf{q} \in H \\ \mathbf{u}_p^n \in V, \mathbf{w}_p^{n-1} \in H \end{cases} \quad (25)$$

La convergence de l'algorithme ci-dessus est assuré par un théorème, dont la preuve détaillée est donnée par Glowinski et Le Tallec [31].

## RÉSOLUTION PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS. MODULE LIM1 DE CESAR-LCPC

### Position du problème

Le problème à résoudre est défini en termes de variables et fonctions continues sur leur domaine de définition. Pour la résolution numérique par la méthode des éléments finis, les espaces de définition de ces variables et fonctions sont approchés par des espaces discrets  $V_{kh}$  et  $H_{kh}$ . Soit  $T_h$  une discrétisation du domaine  $\Omega$ . On considère un espace d'éléments finis conformes  $\Omega_k$  de degré  $k \geq 1$ , de diamètre maximal  $h$ , dont l'union constitue  $\Omega$ . Les éléments finis vérifient les règles classiques d'assemblage : l'intersection de deux éléments  $K_1$  et  $K_2$  est soit vide, soit constituée d'un sommet commun à  $K_1$  et  $K_2$ , soit constituée d'un côté commun à  $K_1$  et  $K_2$ . On fait aussi l'hypothèse que tout domaine élémentaire  $\Omega_k$  contient une boule fixe de rayon  $\beta h$ , où  $0 < \beta \leq 1$  et  $h \in \mathbf{R}$ .

Cette discrétisation permet de définir un espace d'éléments finis  $V_{kh}$ , approchant  $V$ , constitué de fonctions continues définies sur  $\bar{\Omega}$ , soit :

$$V_{kh} = \left\{ \mathbf{v}_h \mid \mathbf{v}_h \in C^0(\bar{\Omega}), \mathbf{v}_h|_K \in P_k(K), \forall K \in T_h \text{ et } \mathbf{v}_h|_\Gamma = \mathbf{v}_0 \right\} \quad (26)$$

où  $P_k(K)$  désigne l'espace des polynômes de degré  $k_p \leq k$  sur l'élément  $K$ .

L'ensemble  $H$  est approché par des éléments finis similaires à ceux de l'approximation de  $V$ , en supprimant les conditions de raccord entre les éléments finis, ce qui permet de traiter localement la partie non-linéaire du problème :

$$H_{kh} = \left\{ \mathbf{q}_h \mid \mathbf{q}_h|_K = \text{constante}, \forall K \in T_h \right\} \quad (27)$$

L'espace  $V_{kh}$  est un espace classique d'approximation de  $H_0^1(\Omega)$  par la méthode des éléments finis. On suppose que les fonctions de  $V_{kh}$  sont caractérisées par  $N_h$  scalaires, appelés degrés de liberté. En ce qui concerne l'espace  $H_{kh}$ , le choix est de considérer les valeurs prises par les fonctions de  $H_{kh}$  aux points d'intégration. Si l'on désigne par  $P_h$  le nombre des points d'intégration, alors les composantes des vecteurs  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{q}$  et  $\boldsymbol{\lambda}$  de  $\mathbf{R}^{N_h}$  et  $\mathbf{R}^{P_h}$  correspondent aux degrés de liberté associés à  $\mathbf{v}_h \in V_{kh}$ ,  $\mathbf{q}_h \in H_{kh}$  et  $\boldsymbol{\lambda}_h \in H_{kh}$ , respectivement.

La définition de  $H_{kh}$  ne s'applique que pour  $k = 1$ , le nombre des variables locales augmentant rapidement dans le cas contraire et l'espace auquel elles appartiennent étant difficile à définir. Cette remarque conduit à définir des variables  $\mathbf{q}_{kh}$  constantes dans chaque élément.

On introduit l'opérateur  $\mathbf{B}$  et la matrice constante  $\mathbf{A}$  tels que :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \quad (28)$$

ce qui permet d'écrire :  $d : d = \mathbf{v}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{v}$ .

On note aussi :

$$\mathbf{q} = \{q_{11}, q_{22}, q_{33}, 2q_{12}, 2q_{23}, 2q_{13}\}^T \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}, 2\lambda_{12}, 2\lambda_{23}, 2\lambda_{13}\}^T \quad (30)$$

Alors le problème cinématique régularisé peut être écrit sous la forme équivalente :

$$L_r(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}) = F(\mathbf{q}) + G(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{q}) d\Omega + \frac{r}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{q})^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{q}) d\Omega \quad (31)$$

ce qui est plus facile pour la formulation du problème discrétisé par la suite.

On désigne par  $l$  le nombre des nœuds dans l'élément  $K$ , par  $\mathbf{u}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ) les vitesses de déplacement des nœuds de  $K$ , et par  $N_K$  la fonction d'interpolation sur  $K$ . Les inconnues dans la formulation discrète du problème, pour chaque élément, peuvent être caractérisées par  $\mathbf{u}_K$ ,  $\mathbf{q}_K$ , et  $\boldsymbol{\lambda}_K$ , où les vitesses de déplacement  $\mathbf{u}_K$  sont définies par :

$$\mathbf{u}_K = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_l)^T \quad (32)$$

et on peut écrire :

$$\mathbf{B}\mathbf{v}_{hK} = \mathbf{B}\mathbf{N}_K \mathbf{u}_K \quad (33)$$

Comme on utilise des éléments de degré un, les vecteurs sont constants dans chaque élément. Le lagrangien augmenté discrétisé s'écrit alors sous la forme :

$$L_{rh}(\mathbf{u}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{P} \sum_{K \in D_h} \int [\pi(\mathbf{q}_K)]^P d\Omega - \sum_{K \in D_h} \int \mathbf{f} \cdot \mathbf{N}_K \mathbf{u}_K d\Omega - \sum_{K \in D_h} \int_{K \cap \Gamma_F} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_K \mathbf{u}_K d\Omega + \frac{r}{2} \sum_{K \in D_h} \int (\mathbf{B}\mathbf{N}_K \mathbf{u}_K - \mathbf{q}_K)^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B}\mathbf{N}_K \mathbf{u}_K - \mathbf{q}_K) d\Omega + \sum_{K \in D_h} \int (\boldsymbol{\lambda}_K^T)^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B}\mathbf{N}_K \mathbf{u}_K - \mathbf{q}_K) d\Omega \quad (34)$$

## Problème global

En appliquant la variante de l'algorithme d'Uzawa présentée précédemment, on a les deux algorithmes suivants pour la résolution du lagrangien augmenté par la méthode des éléments finis.

### Algorithme externe

On choisit arbitrairement  $\boldsymbol{\lambda}^0 \in \mathbf{R}^{P_h}$ ,

pour  $n \geq 0$ , on détermine  $\mathbf{u}^n$ ,  $\mathbf{q}^n$ ,  $\boldsymbol{\lambda}^{n+1}$  par :

$$L_r(\mathbf{u}^n, \mathbf{q}^n, \boldsymbol{\lambda}^n) \leq L_r(\mathbf{u}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}^n), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^{N_k} \text{ et } \forall \mathbf{q} \in \mathbf{R}^{P_h} \quad (35)$$

et on actualise  $\lambda$  :

$$\lambda_K^{n+1} = \lambda_K^n + \rho_r (\mathbf{BN}_K \mathbf{u}_K^n - \mathbf{q}_K^n) \text{ et } K \in D_h, \text{ et } K \in D_h \quad (36)$$

La résolution de l'équation (36) est effectuée par la méthode de relaxation par blocs, qui comporte les algorithmes suivants :

à partir de la valeur initiale  $\mathbf{q}^{n,0} = \mathbf{q}^n$ , la minimisation sur la variable  $\mathbf{u}$  de  $L_{rh}(\mathbf{u}, \mathbf{q}^{n,m}, \lambda^n)$  conduit à la résolution du système d'équations linéaires suivant :

$$\mathbf{rMu}^{n,m} - \sum_{K \in D_h} \int_K \{ \mathbf{N}_K^T \mathbf{f} + \mathbf{N}_K^T \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{N}_K \} d\Omega - \sum_{K \in D_h} \int_{K \cap \Gamma_F} \mathbf{N}_K^T \mathbf{F} d\Omega = 0 \quad (37)$$

où  $\mathbf{M}$  est une matrice telle que :  $\mathbf{M} = \sum_{K \in D_h} \int_K \mathbf{N}_K^T \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{N}_K d\Omega$  (38)

### Algorithme interne

pour obtenir  $\mathbf{q}^{n, m+1}$ , on minimise  $L_{rh}(\mathbf{u}^{n,m}, \mathbf{q}, \lambda^n)$  par rapport à  $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^{Ph}$ , ce qui conduit à la minimisation de la fonction suivante pour chaque élément :

$$J_p(\mathbf{q}_K) = \frac{1}{p} \int_K [\pi(\mathbf{q}_K)]^p d\Omega + \frac{r}{2} \int_K (\mathbf{BN}_K \mathbf{u}_K^{n,m} - \mathbf{q}_K)^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{BN}_K \mathbf{u}_K^{n,m} - \mathbf{q}_K) d\Omega - \int_K \lambda_K^n \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}_K d\Omega \quad (39)$$

On a montré ci-dessus que les variables  $\mathbf{q}$  sont définies comme constantes sur chaque élément, et donc on peut choisir des polynômes du premier degré pour la variable  $\mathbf{u}$ . Cela permet d'écrire la relation (39) sous la forme :

$$J_p(\mathbf{q}_K) = \frac{1}{p} [\pi(\mathbf{q}_K)]^p + \frac{r}{2} (\mathbf{BN}_K \mathbf{u}_K^{n,m} - \mathbf{q}_K)^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{BN}_K \mathbf{u}_K^{n,m} - \mathbf{q}_K) - \lambda_K^n \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}_K \quad (40)$$

La minimisation de cette expression est faite localement, élément par élément. Ainsi, le caractère non-linéaire est traité uniquement au niveau local, d'où l'intérêt de la décomposition du problème initial par la technique du lagrangien augmenté. Ce problème local concerne le calcul des vitesses de déformation.

Le second problème, global, fait intervenir les vitesses de déplacement. C'est un problème de minimisation quadratique associé à l'opérateur laplacien, qui se réduit à un système linéaire associé à la matrice  $\mathbf{M}$ . La construction de la matrice  $\mathbf{M}$  est semblable à la construction d'une matrice de rigidité usuelle. Elle présente les propriétés suivantes : c'est une matrice symétrique, définie positive et elle ne change pas au cours du processus itératif, ce qui permet une seule triangulation au début du calcul du minimum de la fonctionnelle  $J_p(\mathbf{v})$  [18, 22].

### Problème local

La minimisation locale de la fonctionnelle  $J_p(\mathbf{q}_K)$  est faite pour chaque élément fini  $K$ . Si le problème est tridimensionnel, par exemple, l'espace dans lequel on travaille est  $\mathbf{R}^9$ . Le Tallec [32] a proposé un théorème qui permet de réduire la dimension des espaces, pour des problèmes bidimensionnels ou tridimensionnels, en utilisant un processus de diagonalisation des matrices.

Pour cela, on définit les matrices suivantes :

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathfrak{q}_{11} & \mathfrak{q}_{12} & \mathfrak{q}_{13} \\ \mathfrak{q}_{12} & \mathfrak{q}_{22} & \mathfrak{q}_{23} \\ \mathfrak{q}_{13} & \mathfrak{q}_{23} & \mathfrak{q}_{33} \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{12} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{13} & \omega_{23} & \omega_{33} \end{pmatrix} \quad (41)$$

où  $\omega = \mathbf{BN}_K \mathbf{u}_K$  (42)

Avec ces notations, le problème local peut être réécrit sous la forme :

$$J_p(\mathbf{q}_K) = J_p(\mathbf{\Sigma}) = \frac{1}{p} [\pi(\mathbf{\Sigma})]^p + \frac{r}{2} (\mathbf{\Psi} - \mathbf{\Sigma}) : (\mathbf{\Psi} - \mathbf{\Sigma}) - \mathbf{\Lambda} : \mathbf{\Sigma} \quad (43)$$

et la fonctionnelle est donc définie sur un espace symétrique  $\mathbf{R}^{3 \times 3}$ .

## Théorème 8

Si la fonction  $[\pi(\boldsymbol{\Sigma})]^p$  est convexe et isotrope, alors la solution  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  est donnée par :

$$\boldsymbol{\Sigma}_0 = \mathbf{Y}^T \boldsymbol{\Sigma}^d \mathbf{Y} \quad (44)$$

où  $\mathbf{Y}$  est une matrice orthogonale de  $\mathbf{R}^{N \times N}$  ( $N = 2$  ou  $3$ ) dont les colonnes sont les vecteurs propres normalisés de la matrice :

$$\mathbf{S} = \mathbf{r}\Psi + \Lambda \quad (45)$$

(la première colonne correspond à la plus grande valeur propre et ainsi de suite) et  $\boldsymbol{\Sigma}^d$  est la matrice diagonale de  $\mathbf{S}$  sur  $\mathbf{R}^{N \times N}$ , solution du problème suivant :

$$\text{minimiser } J_q(\boldsymbol{\Sigma}^d) = \frac{1}{p} [\pi(\boldsymbol{\Sigma}^d)]^p + \frac{r}{2} \boldsymbol{\Sigma}^d : \boldsymbol{\Sigma}^d - \mathbf{S}^d : \boldsymbol{\Sigma}^d \text{ sur } \boldsymbol{\Sigma}^d \quad (46)$$

où  $\mathbf{S}^d$  désigne la matrice diagonale de  $\mathbf{S}$ .

Autrement dit, si  $d_i$  et  $A_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) sont les termes diagonaux des matrices  $\boldsymbol{\Sigma}^d$  et  $\mathbf{S}^d$ , respectivement, le théorème permet d'écrire le problème local de la manière suivante :

$$\min_{d_1, \dots, d_N} J_p(d_1, \dots, d_N) = \min_{d_1, \dots, d_N} \left\{ \frac{1}{p} [\pi(d_1, \dots, d_N)] + \frac{r}{2} d_i \cdot d_i - A_i \cdot d_i \right\} \quad (47)$$

où

$$(d_1, \dots, d_N) \in \mathbf{R}^N, \text{ et } d_1 \geq \dots \geq d_N \quad (48)$$

Comme la fonction  $J_p$  est une fonction continue et strictement convexe de  $(d_1, \dots, d_N)$ , elle présente une solution unique, mais elle n'est pas toujours différentiable. Dans ce cas, il faut diviser le domaine de définition des variables (qui n'est autre que le domaine convexe  $C$  des contraintes admissibles) en plusieurs parties dans lesquelles  $J_p$  est différentiable et d'autres dans lesquelles elle ne l'est pas.

À l'aide des outils de la théorie de l'optimisation des fonctionnelles convexes (les théorèmes de projection sur le domaine des contraintes), on peut trouver un point stationnaire pour chaque partie et donc un point qui minimise la fonction. Cette technique, basée sur un théorème de projection classique de la théorie de l'optimisation, a été utilisée dans cette recherche, en remplacement de certaines méthodes proposées par Guennouni (1982) ou Jiang (1992) comme la méthode de Newton-Raphson par exemple, ce qui a permis une amélioration des bornes supérieures des charges limites et une réduction importante du temps de calcul. La méthode de projection utilisée et son application à la minimisation de la fonctionnelle  $J_p$  sont détaillées dans des publications récentes (voir par exemple [18] et [22]).

## CONCLUSIONS

Après un développement long et délicat, reposant sur une base mathématique étendue, la méthode cinématique régularisée a atteint le stade où un outil de calcul opérationnel permet de l'appliquer aux ouvrages les plus complexes. Le module LIM1 est actuellement dans la version recherche de CESAR-LCPC et sera prochainement inclus dans la version diffusée. Un très important effort de validation des résultats de ce module a été réalisé depuis quelques années tant par rapport à des solutions théoriques exactes, à des solutions approchées (bornes supérieures et inférieures connues) qu'à des cas réels (essais à la rupture sur modèle réduit représentatif ou essais à la rupture en vraie grandeur). Un exemple de cet effort de validation est présenté dans l'article suivant dans le cas de l'étude de la stabilité des pentes.

### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] DRUCKER D.C., PRAGER W., Soil mechanics and plastic analysis, *Quarterly Applied Mathematics*, **10**, 1952, pp. 157-165.
- [2] MEYERHOF G.G., *The bearing capacity and settlement of foundations. Selected papers*. Tech. Press, Technical University of Nova Scotia, Halifax, Canada, 1982, 424 pages.
- [3] CHEN W.F., *Limit analysis and soil plasticity*. Elsevier, Amsterdam, 1975, 638 pages.

- [4] SLOAN S.W., Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming, *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 13, **1989**, pp. 263-282.
- [5] RADENKOVIC D., *Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb à dilatation non-standardisée*, CR Académie des Sciences de Paris, tome **286**, **1961**, pp. 4103-4104.
- [6] RADENKOVIC D., *Théorie des charges limites. Extension à la mécanique des sols*, Comptes Rendus du Séminaire de Plasticité, École Polytechnique, 1961, Notes techniques dans la série des Bulletins des Services techniques du Ministère de l'Air, **1962**, pp. 129-142.
- [7] SALENÇON J., *La théorie des charges limites dans la résolution des problèmes de plasticité en déformation plane*, Thèse de Doctorat d'État ès-Sciences Mathématiques, Faculté des Sciences de l'Université de Paris, **1969**, 124 pages.
- [8] SALENÇON J., *Théorie des charges limites, Plasticité et Viscoplasticité*, Séminaire de Laboratoire de Mécanique des Solides, École Polytechnique, Paris, 27-29 septembre **1972**, pp. 205-229.
- [9] SALENÇON J., *Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols*, Eyrolles, **1974**, 178 pages.
- [10] TEMAM R., *Problèmes mathématiques en plasticité*, Gauthier Villars, Paris, **1983**, 390 pages.
- [11] MOREAU J.-J., *Fonctionnelles convexes. Séminaires sur les équations aux dérivées partielles*, Collège de France, Paris, **1966**, 92 pages.
- [12] MOREAU J.-J., *La notion de sur-potentiel et les liaisons unilatérales en élastostatique*, CR Académie des Sciences de Paris, série A, tome **267**, **1968**, pp. 954-957.
- [13] NAYROLES B., Essai de théorie fonctionnelle des structures rigides plastiques parfaites, *Journal de Mécanique*, vol. 9, **3**, **1970**, pp. 491-506.
- [14] FRÉMOND M., SALENÇON J., *Limit analysis by finite element method*, Plasticity and Soils Mechanics, Cambridge, **1973**, pp. 297-309.
- [15] FRÉMOND M., FRIÂA A., *Analyse limite. Comparaison des méthodes statiques et cinématiques*, CR Académie des Sciences Paris, tome **286**, série A, **1978**, pp. 107-110.
- [16] FRIÂA A., *La loi de Norton-Hoff généralisée en plasticité et viscoplasticité*, Thèse de Doctorat d'État, Université Pierre et Marie Curie, Paris, **1979**, 174 pages.
- [17] GUENNOUNI T.A., *Matériau de Norton-Hoff pour divers critères de la plasticité de la mécanique des sols*, Thèse de Doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, **1982**, 112 pages.
- [18] DRONIUC N., MAGNAN J.-P., HUMBERT P., MESTAT Ph., *Bases théoriques et mise en œuvre de la méthode cinématique régularisée*, Études et Recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées, **GT 76**, **2003**, 146 pages.
- [19] JIANG G.L., *Application de l'analyse limite à l'étude de stabilité des massifs de sol*, Thèse de Doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, **1992**, 205 pages.
- [20] JIANG G.L., Regularized method in limit analysis, *Journal of Engineering Mechanics*, vol. **120**, **6**, **1994**, pp. 1179-1197.
- [21] SASSI K., *Contribution à l'étude des mécanismes de déformation des pentes instables*, Thèse de Doctorat de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, **1996**, 433 pages.
- [22] DRONIUC N., *Développements et applications géotechniques du calcul à la rupture par la méthode des éléments finis*, Thèse de Doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, **2001**, 340 pages.
- [23] GARNIER D., *Analyse par la théorie du calcul à la rupture des facteurs de réduction de la capacité portante des fondations superficielles*, Thèse de Doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, **1995**, 210 pages.
- [24] ANTAO A.S., *Analyse de la stabilité des ouvrages souterrains par une méthode cinématique régularisée*, Thèse de Doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, **1997**, 216 pages.
- [25] MAGNAN J.-P., DRONIUC N., CANÉPA Y., *Les méthodes de calcul de la portance des fondations superficielles*, Symp. Int. FONDSUP 2003, vol. 2, Presses de l'ENPC/LCPC, Paris, **2004**, pp. 79-154.
- [26] DRONIUC N., *Aspects mathématiques de l'analyse limite*, Rapport interne, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris, **2003**, 132 pages.
- [27] FRIÂA A., *Le matériau de Norton-Hoff généralisé et ses applications en analyse limite*, Compte Rendu Académie des Sciences Paris, tome **286**, série A, **1978**, p. 286.
- [28] ARROW K.J., HURWICZ, L., UZAWA H., *Studies in nonlinear programming*, Stanford University Press, Axelsson O. édition, **1958**.
- [29] GLOWINSKI R., LIONS J.-L., TRÉMOLIÈRES R., *Analyse numérique des inéquations variationnelles*, Dunod-Bordas, Paris, **1976**.
- [30] FORTIN M., GLOWINSKI R., *Lagrangiens Augmentés. Application à la résolution de problèmes aux limites*, Dunod, Paris, **1982**, 147 pages.
- [31] GLOWINSKI R., LE TALLEC P., *Augmented Lagrangian and operator – splitting methods in non linear mechanics*, Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, **1989**, pp. 125-148.
- [32] LE TALLEC P., Numerical solution of viscoplastic flow problems by augmented Lagrangian, *IMA Journal of Numerical Analysis*, **6**, **1986**, pp. 185-219.