

# Modélisation de la réponse au vent des grands ponts par la méthode des éléments finis

Alberto PATRON  
Christian CRÉMONA

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

## RÉSUMÉ

Une modélisation par éléments finis de la réponse au vent turbulent des ponts souples prenant en compte les interactions aéroélastiques entre l'écoulement de l'air et le mouvement de la structure et incluant le cas de matrices d'amortissements structurales non proportionnelles est présentée. Un soin particulier est apporté à l'introduction de la turbulence au travers des fonctions dites d'admittance aérodynamique. La stabilité aéroélastique est considérée et un algorithme de calcul des vitesses critiques de flottement est proposé. La théorie linéaire des vibrations aléatoires est introduite pour évaluer la réponse au vent turbulent dans le domaine de la fréquence. Dans le domaine du temps, les forces aéroélastiques sont modélisées par l'intermédiaire de fonctions indicielles. Les méthodes et algorithmes développés ont été implantés dans CESAR-LCPC. Une étude numérique de la réponse au vent sur un modèle de pont est présentée.

DOMAINE : Sciences de l'ingénieur.

## ABSTRACT

MODELING THE WIND RESPONSE OF LARGE BRIDGES BY USE OF THE FINITE ELEMENT METHOD

A finite element model of the response of flexible bridges to turbulent winds that takes into account the aeroelastic interactions between air flow and structural movement, encompassing the case of non-proportional structural damping matrices, is presented. Special attention has been paid to introducing turbulence via so-called aerodynamic admittance functions. Aeroelastic stability will be considered herein and an algorithm for computing critical flutter speeds proposed. The linear theory of random vibrations will then be used for evaluating the response to turbulent wind over the frequency domain. Within the time domain, aeroelastic forces are modeled by means of indicial functions. The equations describing fluid-structure system movement are thus to be integrated numerically over time. The various methods developed have been included in a dedicated CESAR-LCPC computation code module and their application to the study of wind response on a complete bridge model will be shown.

FIELD: Engineering sciences.

## INTRODUCTION

Avec l'amélioration des méthodes de calcul, des matériaux et des techniques de construction, les ponts à câbles ont connu une révolution sans précédent au cours des dernières décennies. Cette évolution s'est traduite par une augmentation des portées, entraînant une plus grande flexibilité et aussi un risque accru par rapport aux actions dynamiques. Ce n'est qu'à partir de l'effondrement spectaculaire du pont de Tacoma aux États-Unis en 1940, que l'on commença à s'intéresser aux effets dynamiques produits par le vent sur les grands ponts.

Les premières recherches ont concerné l'étude de la stabilité par rapport aux phénomènes aéroélastiques. Ces effets se développent sur une structure souple lorsque les déplacements et les forces aérodynamiques interagissent. Des phénomènes très complexes surviennent car la structure en oscillation perturbe l'écoulement et, par conséquent, les forces générées sur elle-même. Ce type de problématique a été abordé depuis les années vingt dans l'aéronautique. Plusieurs formulations analytiques ont été proposées dans ce contexte. Malheureusement, à la différence des ailes d'avion, les sections de tablier de pont sont des *corps mal-profilés*, ce qui rend impossible l'application directe de ces théories. Ce sont notamment les travaux de Bleich [1], Bisplinghoff [2] et Scanlan [3] qui ont permis d'établir des modèles décrivant les forces aéroélastiques pour les tabliers de pont. La différence fondamentale de ces modèles par rapport à ceux de l'aéronautique vient du fait qu'ils font largement appel à des paramètres expérimentaux de la section concernée.

Dans les années soixante, on a commencé à étudier la réponse dynamique de la structure sous la turbulence du vent, par l'intermédiaire de la théorie des vibrations aléatoires. Les premières applications de cette théorie à l'étude des ponts souples soumis au vent sont dues à Davenport [4]. L'approche consiste à analyser l'effet des turbulences (caractérisé par sa fonction de densité spectrale) comme un chargement stochastique qui met en vibration la structure. Habituellement, la structure est considérée comme ayant un amortissement dit « classique ». Cette hypothèse permet de découpler l'équa-

tion du mouvement (en utilisant la base des modes propres non-amortis) *en un ensemble d'équations modales indépendantes*. Il est alors possible d'évaluer séparément la densité spectrale de puissance et l'écart-type de la réponse de chaque mode. Ces deux problématiques (l'étude de la stabilité et l'évaluation de la réponse à la turbulence) furent donc développées indépendamment et l'interaction entre les deux phénomènes fut longtemps négligée.

Dans la pratique actuelle, l'étude des effets dynamiques du vent sur les ponts est divisée en deux parties : la vérification de la stabilité aéroélastique d'une part et l'évaluation de la réponse de la structure sous l'effet de la turbulence du vent d'autre part. Le comportement aéroélastique du système fluide-structure est évalué grâce à des essais en soufflerie et, si nécessaire, la section du pont est profilée afin d'assurer la stabilité aéroélastique. Puis, la réponse au vent turbulent est étudiée. L'influence des forces aéroélastiques sur la réponse à la turbulence est prise en compte de manière forfaitaire par l'introduction d'un *amortissement* dit *aérodynamique* superposé à l'amortissement de chaque mode [5]. Or, dans la plupart des structures, *les équations modales sont couplées* par les termes d'amortissement et, dans le cas des grands ponts dans un écoulement d'air, par des termes aéroélastiques. D'un point de vue général, les effets aéroélastiques peuvent être vus comme des termes correctifs à l'amortissement et la rigidité du pont. Les caractéristiques dynamiques sont alors perturbées : *les fréquences d'oscillation et les déformées modales sont dites « aéroélastiquement modifiées »*. L'utilisation de la superposition modale à l'aide des modes propres classiques n'est alors plus possible.

Durant ces vingt dernières années, de nombreuses méthodes ont été proposées pour considérer de façon plus réaliste les effets de l'interaction fluide-structure dans la réponse à la turbulence, soit dans le domaine de la fréquence [6-8], soit dans le domaine du temps [9, 10]. Le travail présenté ici s'inscrit dans le prolongement de ces recherches en utilisant les capacités offertes par les moyens de calcul informatique actuels. On propose donc une approche générale et unifiée pour l'étude de la réponse dynamique temporelle et spectrale des ponts souples soumis à la turbulence du vent en tenant compte des forces aéroélastiques. Dans cet article, la première partie est dédiée à la description et à la modélisation mathématique des forces générées par un écoulement d'air turbulent sur un tablier de pont. On s'intéresse particulièrement aux forces produites par la turbulence et aux forces auto-entretenues, pour lesquelles des formulations dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel sont données. La deuxième partie est consacrée à l'étude numérique de la tenue au vent des ponts souples. Les équations de la dynamique du système couplé fluide-structure sont établies. Ensuite, la vérification de la stabilité de la structure est présentée en introduisant une méthode pour la détermination des vitesses critiques de flottement. La réponse à la turbulence est enfin introduite au travers de deux démarches : la première consiste à réaliser un calcul purement fréquentiel du système d'équations modales « aéroélastiquement couplées » ; la deuxième résout, dans le domaine temporel, les équations de la dynamique du système.

La mise en œuvre numérique de ces développements a été réalisée au sein du module EOLE du code de calcul par éléments finis CESAR-LCPC. Afin d'illustrer les différents aspects de l'approche proposée, les résultats de calcul obtenus pour le modèle aux éléments finis du pont Vasco de Gama (Lisbonne, Portugal) sont présentés dans une troisième partie.

## FORCES GÉNÉRÉES PAR LE VENT TURBULENT SUR UN TABLIER DE PONT

### Modélisation du vent turbulent

La vitesse d'un vent turbulent est classiquement modélisée comme la superposition d'un terme moyen et d'un terme fluctuant. Ainsi dans un repère cartésien (Ox, Oy, Oz) avec l'axe « x » parallèle à la direction du vent moyen, la vitesse en un point P de l'espace s'écrit :

$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} \bar{U}(P) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u(P, t) \\ v(P, t) \\ w(P, t) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

où  $\bar{U}(P)$  est la vitesse moyenne du vent (parallèle à l'axe x du repère) et  $u(P, t)$ ,  $v(P, t)$  et  $w(P, t)$  sont les fluctuations turbulentes de la vitesse du vent selon les directions x, y et z (Fig. 1).

La nature aléatoire des fluctuations turbulentes de la vitesse du vent fait de la théorie des processus stochastiques un outil adapté pour sa représentation. Dans ce contexte, les paramètres qui permettent de caractériser le vent turbulent, ainsi que sa variabilité spatio-temporelle, sont les écarts-types de

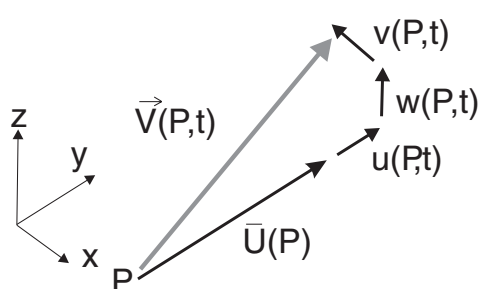


Figure 1  
Composantes de la vitesse du vent turbulent.

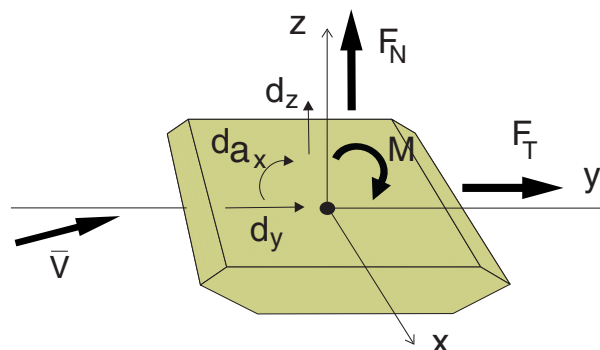


Figure 2  
Composantes de la force produite par le vent turbulent.

fluctuations turbulentes de la vitesse ( $\sigma_u$ ,  $\sigma_v$ ,  $\sigma_w$ ), les échelles de turbulence, les densités spectrales et interspectrales de puissance de chaque composante, et les coefficients de cohérence. Ces paramètres sont déterminés à partir des mesures de vitesses du vent sur le site de la structure étudiée. Le détail sur la définition et l'estimation de ces paramètres peut être trouvé dans Biétry [11].

## Forces produites par le vent sur le tablier

La présence d'un corps dans un écoulement d'air modifie localement la trajectoire et la vitesse de l'écoulement. Ces modifications dépendent de la forme du corps, de la vitesse de l'air et du niveau de turbulence du vent. Les perturbations induites par la présence du corps dans l'écoulement entraînent également la formation d'un champ de pression autour de celui-ci. De l'intégration de ce champ de pression résulte un torseur des efforts aérodynamiques, qui est généralement divisé en trois composantes : une force dite de traînée  $F_T$ , dont la direction est parallèle à celle du vent moyen, une force dite de portance  $F_N$  perpendiculaire à celle de traînée et un moment de torsion  $M$  (Fig. 2).

Pour un tablier de pont placé dans un écoulement d'air turbulent, il est possible d'approcher les forces générées par le vent sur la section, par la somme des forces statiques correspondant au vent moyen, des forces auto-entretenues et de celles dues à la turbulence. Cette somme est justifiée par une linéarisation au premier ordre des effets du vent [7]. Les forces éoliennes s'expriment alors :

$$\{f(\vec{V}, P, t)\} = \overbrace{\{f^S(\vec{U}, P)\}}^{\text{Statiques}} + \overbrace{\{f^A(\vec{U}, \vec{d}, \dot{\vec{d}}, P, t)\}}^{\text{Aéroélastiques}} + \overbrace{\{f^T(\vec{U}, \vec{V}', P, t)\}}^{\text{Turbulence}} \quad (2)$$

où  ${}^t\{f(\vec{V}, t)\} = \{F_T(\vec{V}, t), F_N(\vec{V}, t), M(\vec{V}, t)\}$  représente le vecteur des forces générées par le vent sur la structure ;  $\{f^S(\vec{U})\}$ , le vecteur des forces statiques du vent moyen ;  $\{f^A(\vec{U}, \vec{d}, \dot{\vec{d}}, t)\}$ , le vecteur des forces aéroélastiques (ou auto-entretenues) ;  $\{f^T(\vec{U}, \vec{V}', t)\}$ , le vecteur des forces générées par la turbulence du vent ;  $\vec{V}'$ , le vecteur contenant les fluctuations turbulentes de la vitesse du vent ;  $\vec{d}'$  et  $\dot{\vec{d}}$ , respectivement les vecteurs de déplacement et de vitesse de la structure.

### Forces statiques

Les composantes des efforts aérodynamiques statiques au point P le long du tablier s'expriment :

$$\{f^S(\vec{U}, P)\} = P\{C\} \quad (3)$$

avec  $p = \frac{1}{2}\rho B\bar{U}^2$ ,  ${}^t\{f^S(\vec{U}, P)\} = \{F_T^S(\vec{U}, P, t), F_N^S(\vec{U}, P, t), M^S(\vec{U}, P, t)\}$ ;  ${}^t\{C\} = \{C_T, C_N, BC_M\}$

où  $\rho$  est la masse volumique de l'air,  $B$  une dimension caractéristique de la section (en général la largeur),  $C_T$ ,  $C_N$ , et  $C_M$  sont les coefficients aérodynamiques de traînée, portance et moment, qui sont fonction de l'angle d'incidence du vent, et mesurés lors d'essais en soufflerie.

## Forces aéroélastiques

Dans l'équation (2), les termes dus à la turbulence tiennent compte des fluctuations de la vitesse et de l'angle d'incidence du vent par rapport au tablier au « repos », tandis que les termes aéroélastiques sont liés aux forces aérodynamiques produites par le mouvement du tablier. Ces forces peuvent s'exprimer soit dans le domaine du temps, soit dans le domaine de la fréquence.

Les premières formulations permettant de prendre en compte les phénomènes aéroélastiques sont issues de l'aéronautique et font intervenir des *fonctions* dites *indicielles*. Ces fonctions permettent d'exprimer l'incidence d'une perturbation dans le signal des déplacements sur le signal des forces aérodynamiques. La prise en compte, à un instant  $t$ , de l'historique des déplacements sur la valeur du signal des forces se fait alors par un produit de convolution. Des formulations analogues à celles développées pour les ailes d'avion ont été proposées par Bleich [1], Bisplinghoff [2], Lin [7] et Scanlan [12] pour les tabliers de pont. La différence fondamentale de ces modèles par rapport à ceux de l'aéronautique vient du fait qu'ils sont fondés sur des paramètres expérimentaux de la section concernée. Le vecteur contenant les trois composantes de la force aéroélastique au point  $P$  le long de l'élément, s'exprime alors par :

$$\{f^A(t, P)\} = [\chi] \{\dot{d}(t, P)\} + [C_0] \{d(t, P)\} + \int_0^t [C_1(t-\tau)] \{\dot{d}(\tau, P)\} d\tau + \int_0^t [C_2(t-\tau)] \{d(\tau, P)\} d\tau \quad (4)$$

avec  $\{f^A(t, P)\} = \{F_T^A(t, P), F_N^A(t, P), M^A(t, P)\}$

$$\{d(t, P)\} = \{d_y(t, P), d_z(t, P), d_{\alpha_x}(t, P)\}, \quad \{\dot{d}(t, P)\} = \{\dot{d}_y(t, P), \dot{d}_z(t, P), \dot{d}_{\alpha_x}(t, P)\}$$

$$[\chi] = p \begin{bmatrix} \chi_{T0,p} & \chi_{T0,h} & \chi_{T0,\alpha} \\ \chi_{N0,p} & \chi_{N0,h} & \chi_{N0,\alpha} \\ B\chi_{M0,p} & B\chi_{M0,h} & B\chi_{M0,\alpha} \end{bmatrix}, \quad [C_0] = p \begin{bmatrix} c_{0,Tp} & c_{0,Th} & c_{0,T\alpha} \\ c_{0,Np} & c_{0,Nh} & c_{0,N\alpha} \\ Bc_{0,Mp} & Bc_{0,Mh} & Bc_{0,M\alpha} \end{bmatrix}$$

$$[C_1(t-\tau)] = p \begin{bmatrix} c_{1,Tp} e^{c_{2,Tp}\beta(t-\tau)} & c_{1,Th} e^{c_{2,Th}\beta(t-\tau)} & c_{1,T\alpha} e^{c_{2,T\alpha}\beta(t-\tau)} \\ c_{1,Np} e^{c_{2,Np}\beta(t-\tau)} & c_{1,Nh} e^{c_{2,Nh}\beta(t-\tau)} & c_{1,N\alpha} e^{c_{2,N\alpha}\beta(t-\tau)} \\ Bc_{1,Mp} e^{c_{2,Mp}\beta(t-\tau)} & Bc_{1,Mh} e^{c_{2,Mh}\beta(t-\tau)} & Bc_{1,M\alpha} e^{c_{2,M\alpha}\beta(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

$$[C_2(t-\tau)] = p \begin{bmatrix} c_{3,Tp} e^{c_{4,Tp}\beta(t-\tau)} & c_{3,Th} e^{c_{4,Th}\beta(t-\tau)} & c_{3,T\alpha} e^{c_{4,T\alpha}\beta(t-\tau)} \\ c_{3,Np} e^{c_{4,Np}\beta(t-\tau)} & c_{3,Nh} e^{c_{4,Nh}\beta(t-\tau)} & c_{3,N\alpha} e^{c_{4,N\alpha}\beta(t-\tau)} \\ Bc_{3,Mp} e^{c_{4,Mp}\beta(t-\tau)} & Bc_{3,Mh} e^{c_{4,Mh}\beta(t-\tau)} & Bc_{3,M\alpha} e^{c_{4,M\alpha}\beta(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

où  $\beta = \bar{U}/B$  ;  $d_j$  et  $\dot{d}_j$  ( $j = y, z, \alpha_x$ ) sont respectivement les composantes du déplacement et de la vitesse au point  $P$  du tablier.  $\chi_{i0,k}$  et  $c_{j,ik}$  ( $i = N, T, m$  ;  $j = 0, \dots, 4$  ;  $k = p, h, \alpha$ ) sont les coefficients des fonctions indicielles de la section. Ces coefficients sont déterminés, soit expérimentalement, soit à partir des coefficients instationnaires de la section [13].

Dans la formulation fréquentielle, les forces aéroélastiques s'expriment comme fonctions des déplacements et de la dérivée première de ceux-ci. Ces forces dépendent également des coefficients réels mesurés lors d'un essai en soufflerie sur la section en oscillation, lesquels sont fonction de la vitesse du vent et de la fréquence d'oscillation [3]. Ainsi le vecteur contenant les trois composantes des forces aéroélastiques en un point quelconque de l'axe du tablier s'écrit :

$$\{f^A(\omega, P)\} = [a(\omega)] \{\dot{d}(\omega, P)\} + [b(\omega)] \{d(\omega, P)\} \quad (5)$$

où on a posé

$$[a(\omega)] = p \begin{bmatrix} P_1^*(K) & P_5^*(K) & BP_2^*(K) \\ H_5^*(K) & H_1^*(K) & BH_2^*(K) \\ BA_5^*(K) & BA_1^*(K) & B^2 A_2^*(K) \end{bmatrix}; \quad [b(\omega)] = p \begin{bmatrix} P_4^*(K) & P_6^*(K) & BP_3^*(K) \\ H_6^*(K) & H_4^*(K) & BH_3^*(K) \\ BA_6^*(K) & BA_4^*(K) & B^2 A_3^*(K) \end{bmatrix}$$

où  $\omega$  est la fréquence d'oscillation,  $K = B\omega/\bar{U}$  est la fréquence réduite,  $H_i^*(K)$ ,  $P_i^*(K)$  et  $A_i^*(K)$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) sont des coefficients adimensionnels dits instationnaires ou de Scanlan, mesurés lors d'un essai en soufflerie sur une maquette mobile représentant une section du tablier.

### Forces dues à la turbulence

L'hypothèse de quasi-stationnarité permet de considérer que les forces instantanées produites par le vent turbulent sur un tronçon du tablier sont égales à celles qui se produiraient sur celui-ci dans un écoulement permanent avec la même vitesse et le même angle d'incidence. Les approximations  $\alpha = w(t)/\bar{U}$  et  $C_i(\alpha) \approx C_i + \frac{dC_i}{d\alpha}$  ( $i = C, D$  ou  $M$ ) permettent d'exprimer les termes dus à la turbulence de la façon suivante :

$$\{f^T(t, P)\} = p\{C\} \frac{2u(t)}{\bar{U}} + p\left\{\frac{dC}{d\alpha}\right\} \frac{w(t)}{\bar{U}} \quad (6)$$

$$\text{avec } {}^t\{f^T(t, P)\} = \begin{Bmatrix} F_T^T(t, P) & F_N^T(t, P) & M^T(t, P) \end{Bmatrix}; \quad {}^t\left\{\frac{dC}{d\alpha}\right\} = \begin{Bmatrix} \frac{dC_T}{d\alpha} & \frac{dC_N}{d\alpha} & B \frac{dC_M}{d\alpha} \end{Bmatrix}$$

où  $\frac{dC_i}{d\alpha}$  ( $i = T, N, M$ ) sont les dérivées des coefficients aérodynamiques par rapport à l'angle d'incidence du vent.

Il s'avère que le modèle quasi-stationnaire fourni par les équations précédentes est seulement une approximation pour l'évaluation des efforts dus à la turbulence. En effet, même pour un écoulement laminaire, les efforts aérodynamiques varient au cours du temps. Les coefficients aérodynamiques utilisés dans l'équation (6) sont souvent des valeurs moyennes. Ces coefficients sont dits stationnaires. Afin de tenir compte du caractère instationnaire de l'écoulement d'air, les forces aérodynamiques doivent être corrigées. Une représentation plus exacte du problème [14] fait appel à des fonctions indicielles analogues à celles établies pour la définition des forces aéroélastiques. Cela conduit à exprimer les forces dues à la turbulence de la façon suivante :

$$\{f^T(t, P)\} = p\{C\} \int_0^t [\Psi(t-\tau)] \frac{2u(\tau)}{\bar{U}} d\tau + p\left\{\frac{dC}{d\alpha}\right\} \int_0^t [\Psi(t-\tau)] \frac{2w(\tau)}{\bar{U}} d\tau \quad (7)$$

$$\text{où on a posé } [\Psi(t-\tau)] = \begin{bmatrix} \Psi_{Tu}(t-\tau) & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{Nu}(t-\tau) & 0 \\ 0 & 0 & B\Psi_{Mu}(t-\tau) \end{bmatrix}$$

où  $\psi_{ik}$  ( $i = N, T, M, k = u, w$ ) sont les fonctions indicielles.

### Discretisation par éléments finis

Comme cela a été précisé dans les paragraphes précédents, les modèles mathématiques des effets du vent sur un tablier de pont ramènent à un axe de référence de la section (le centre de poussée par exemple) la résultante des pressions générées sur celle-ci. Cette force résultante est exprimée par trois composantes (traînée, portance et moment) réparties le long de l'élément considéré. Ainsi, dans le cadre d'une discrétisation par éléments finis d'une structure, le type de modélisation le mieux adapté est l'élément de poutre tridimensionnel. Dans le repère local de ce type d'élément, le champ de déplacements d'un point P quelconque le long de celui-ci est défini en fonction des vecteurs de déplacements nodaux  $\{d_{nd}\}$ , par l'intermédiaire de la matrice d'interpolation  $[N(s)]$ . Cette relation s'écrit :

$$\{d(P)\} = [N(s)]\{d_{nd}\} \quad (8)$$

Les forces équivalentes de la poutre sont alors fournies par la relation [15] :

$$\{f_{nd}^A\}_e^{Local} = \int_0^L {}^t[N(s)]\{f^A(s)\} ds \quad (9)$$

où  $\{f_{nd}^A\}_e^{Local}$  est le vecteur des efforts nodaux correspondant à l'élément  $e$ , et  $L$  est la longueur de la poutre.



Dans le cadre de cette étude, les éléments considérés sont des éléments de poutre tridimensionnels à 2 nœuds ; le vecteur des efforts nodaux est alors de taille 12. Les expressions (8) et (9) permettent donc d'évaluer les forces éoliennes aux nœuds d'extrémité de chacun des éléments de poutre qui constituent le maillage représentant la structure. La construction du vecteur des chargements nodaux de l'ensemble de la structure se fait, à l'instar des matrices de rigidité, masse et amortissement, par un processus d'assemblage, élément par élément sur l'ensemble du maillage. Les vecteurs contenant les différents termes de la force éolienne pour l'ensemble d'une structure, discrétisée par un maillage à « n » degrés de liberté, s'expriment alors comme suit :

■ **Forces aéroélastiques** (domaine du temps)

$$\{F^A(t)\} = [\tilde{\chi}]\{\dot{d}(t)\} + [\tilde{C}_0]\{d(t)\} + \int_0^t [\tilde{C}_1(t-\tau)]\{\dot{d}(\tau)\}d\tau + \int_0^t [\tilde{C}_2(t-\tau)]\{d(\tau)\}d\tau \quad (10)$$

où  $\{d(t)\}$  et  $\{\dot{d}(t)\}$  sont respectivement les vecteurs (de taille n) des déplacements et des vitesses nodales du maillage ;  $[\tilde{\chi}]$ ,  $[\tilde{C}_0]$ ,  $[\tilde{C}_1(t-\tau)]$  et  $[\tilde{C}_2(t-\tau)]$  sont les matrices (de taille  $n \times n$ ) des coefficients des fonctions indicielles de l'ensemble de la structure, ces matrices étant formées par assemblage des matrices élémentaires construites à partir des relations (4), (8) et (9).

■ **Forces aéroélastiques** (domaine de la fréquence)

$$\{F^A(\omega)\} = [A(\omega)]\{\dot{d}(\omega)\} + [B(\omega)]\{d(\omega)\} \quad (11)$$

où  $[A(\omega)]$  et  $[B(\omega)]$  sont des matrices (de taille  $n \times n$ ) analogues aux matrices  $[a(\omega)]$  et  $[b(\omega)]$  de l'équation (5), et dont le processus d'assemblage est analogue à celui des matrices de l'équation (10).

■ **Forces dues à la turbulence** (domaine du temps)

• *Approche quasi-stationnaire* :  $\{F^T(t)\} = [D]\{V'(t)\} \quad (12a)$

où  $\{V'(t)\}$  est le vecteur contenant les trois composantes de la fluctuation turbulente de la vitesse du vent pour chaque nœud de la structure complète et  $[D]$  une matrice qui permet le passage entre les fluctuations turbulentes de la vitesse du vent et les forces nodales générées sur l'ensemble de la structure. Cette matrice est construite également par un processus d'assemblage en utilisant la formulation des forces élémentaires de l'équation (6).

• *Approche par fonctions indicielles* :  $\{F^T(t)\} = \int_0^t [D(t-\tau)]\{V'(\tau)\}d\tau \quad (12b)$

où  $[D(t-\tau)]$  est formée de façon analogue à la matrice  $[D]$  ; à l'intérieur de celle-ci apparaissent les fonctions indicielles définies dans l'équation (7).

■ **Forces dues à la turbulence** (domaine de la fréquence)

• *Approche quasi-stationnaire* :  $\{F^T(\omega)\} = [D]\{V'(\omega)\} \quad (13a)$

• *Approche par fonctions indicielles* :  $\{F^T(\omega)\} = [D(\omega)]\{V'(\omega)\} \quad (13b)$

où  $[D(\omega)]$  désigne la transformée de Fourier de  $[D(t)]$  ; à l'intérieur de celle-ci apparaissent des termes du type  $\Psi_{ik}(\omega)$  ( $i = N, T, M, k = u, w$ ) obtenus à partir des fonctions indicielles correspondantes définies dans l'équation (7).

Le détail de la formulation des différents vecteurs de la force éolienne peut être trouvé dans la référence [16].

## ÉTUDE DE LA TENUE AU VENT

### Équations du mouvement

Les vibrations induites par le vent sur un pont souple, discrétisé par éléments finis, sont régies par un système différentiel du second ordre :

$$[M]\{\ddot{d}(t)\} + [C]\{\dot{d}(t)\} + [K]\{d(t)\} = \{F^A(\bar{U}, \dot{\bar{d}}, \bar{d}, t)\} + \{F^T(\bar{U}, \bar{V}', t)\} \quad (14)$$

dans lequel  $[M]$ ,  $[C]$  et  $[K]$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité de la structure (de taille  $n \times n$ ) ; n est le nombre de degrés de liberté du système,  $\{d(t)\}$  est le vecteur

des déplacements nodaux,  $\{F^A(\bar{U}, \dot{\bar{d}}, \bar{d}, t)\}$  est le vecteur des efforts aéroélastiques, fonction de la vitesse moyenne du vent, des déplacements et des vitesses d'oscillation de la structure,  $\{F^T(\bar{U}, \bar{V}', t)\}$  représente le vecteur des efforts générés par le vent turbulent.

Le système (14) peut être également exprimé dans le domaine fréquentiel sous la forme :

$$(-\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K])\{d(\omega)\} = \{F^A(\bar{U}, \dot{\bar{d}}, \bar{d}, \omega)\} + \{F^T(\bar{U}, \bar{V}', \omega)\} \quad (15)$$

Or, compte tenu des relations (11), et (13b), il vient :

$$(-\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K])\{d(\omega)\} = \overbrace{(i\omega [A(\bar{U}, \omega)] + [B(\bar{U}, \omega)])}^{\text{aéroélastique}} \{d(\omega)\} + \overbrace{[D(\omega)]\{V'(\omega)\}}^{\text{turbulence}} \quad (16)$$

La réponse de la structure peut être exprimée dans la base  $[\Theta]$  formée par les  $m$  premiers vecteurs propres du système non amorti :

$$\{d(\omega)\} = [\Theta]\{q(\omega)\} \quad (17)$$

où  $\{q(\omega)\}$  est le vecteur des coordonnées généralisées.

En introduisant (17) dans (16) et en pré-multipliant le résultat par  ${}^t[\Theta]$ , il vient :

$$(-\omega^2 [\hat{M}] + i\omega [\hat{C}] + [\hat{K}])\{q(\omega)\} = (i\omega [\hat{A}(\bar{U}, \omega)] + [\hat{B}(\bar{U}, \omega)])\{q(\omega)\} + {}^t[\Theta][D(\omega)]\{V'(\omega)\} \quad (18)$$

où  $[\hat{M}]$  et  $[\hat{K}]$  sont les matrices diagonales de masse et de rigidité généralisées ;  $[\hat{C}]$ , la matrice d'amortissement généralisée qui n'est pas nécessairement diagonale ;  $[\hat{A}(\bar{U}, \omega)]$  et  $[\hat{B}(\bar{U}, \omega)]$ , les matrices d'amortissement et de rigidité aéroélastiques généralisées. Ces matrices s'écrivent :

$$[\hat{M}] = {}^t[\Theta][M][\Theta]; \quad [\hat{C}] = {}^t[\Theta][C][\Theta]; \quad [\hat{K}] = {}^t[\Theta][K][\Theta] \quad (19a)$$

$$[\hat{A}(\bar{U}, \omega)] = {}^t[\Theta][A(\bar{U}, \omega)][\Theta]; \quad [\hat{B}(\bar{U}, \omega)] = {}^t[\Theta][B(\bar{U}, \omega)][\Theta] \quad (19b)$$

L'emploi de la base modale permet de réduire la dimension du système différentiel en choisissant un sous-espace de vecteurs propres. Ainsi, si le système initial est composé de matrices de taille  $n \times n$ , les matrices du système généralisé seront de taille  $m \times m$  si  $[\Theta]$  est constituée de seulement  $m \leq n$  modes propres.

## Analyse de stabilité

Le système couplé fluide/structure dont la réponse est représentée par l'équation (18) devient instable lorsque, pour une vitesse de vent  $\bar{U}$  donnée, il existe une pulsation  $\omega$  qui annule le déterminant de la matrice d'impédance  $[G(\omega)]$  :

$$[G(\omega)] = [-\omega^2 [\hat{M}] + i\omega ([\hat{C}] - [\hat{A}(\bar{U}, \omega)]) + ([\hat{K}] - [\hat{B}(\bar{U}, \omega)])] \quad (20)$$

Les vitesses du vent correspondant à cette condition sont appelées « vitesses critiques de flottement ». La détermination de ces vitesses est réalisée à l'aide de la méthode pK-F, qui est une méthode du type « point fixe ». Cette méthode est inspirée de la méthode pK utilisée en aéronautique [17]. Pour cela, des solutions de type  $s = (\delta + i)\omega$  sont recherchées :

$$|[G(s)]| = \left| -s^2 [\hat{M}] + s([\hat{C}] - [\hat{A}(\Im(s))]) + ([\hat{K}] - [\hat{B}(\Im(s))]) \right| = 0 \quad (21)$$

où  $|\cdot|$  représente la fonction déterminant,  $\Re(s) = \delta\omega$  et  $\Im(s) = \omega$  sont respectivement les parties réelle et imaginaire de  $s$ .

En considérant que les  $m$  pulsations  $\omega_{0j}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) du système non amorti sont calculées, la méthode consiste à appliquer (pour chaque pulsation) la procédure itérative suivante, à partir d'une vitesse du vent  $\bar{U}_0$  initiale jusqu'à une vitesse finale  $\bar{U}_f$  :

Pour une vitesse  $\bar{U}_k$  ( $k = 0, \dots, f$ ),

1. Calcul de deux valeurs initiales de  $s_i$  :

$$s_{j,1}(\bar{U}_k) = -0,01 \cdot \omega_{0,j} + i \cdot \omega_{0,j} \quad \text{et} \quad s_{j,2}(\bar{U}_k) = i \cdot \omega_{0,j}$$

2. Calcul des 18 coefficients instationnaires de Scanlan correspondant à chaque pulsation.

3. Calcul du déterminant de  $[G(s)]$  correspondant à chaque valeur  $s_{j,1}(\bar{U}_k)$  et  $s_{j,2}(\bar{U}_k)$ .

4. La valeur suivante de  $s$  est définie en utilisant un schéma linéaire d'interpolation :

$$s_{j,3}(\bar{U}_k) = \left( s_{j,2}(\bar{U}_k) \cdot \left[ G(s_{j,1}) \right] - s_{j,1}(\bar{U}_k) \cdot \left[ G(s_{j,2}) \right] \right) / \left( \left[ G(s_{j,1}) \right] - \left[ G(s_{j,2}) \right] \right)$$

5. Les étapes 3-4 sont répétées jusqu'à obtenir  $|[G(s_{j,2})]| < \text{tolérance 1}$ . À chaque nouvelle itération  $s_{j,1}(\bar{U}_k) = s_{j,2}(\bar{U}_k)$  (itération précédente) et  $s_{j,2}(\bar{U}_k) = s_{j,3}(\bar{U}_k)$ .

6. Lorsque le test de l'étape 5 est vérifié, la réponse oscillatoire *aéroélastiquement modifiée* de la structure correspondant à la vitesse  $\bar{U}$  a été trouvée. En outre, si la condition :  $|\Re(s_{j,2})| < \text{tolérance 2}$  est vérifiée, le flottement intervient pour la pulsation  $|\Im(s_{j,2})|$  et la vitesse  $\bar{U}_k$  est une vitesse critique de flottement.

Tolérance 1 et tolérance 2 sont des seuils de convergence.

## Calcul de la réponse à la turbulence

### Calcul dans le domaine fréquentiel

Les premières applications de la théorie des vibrations aléatoires à l'étude des structures soumises au vent turbulent sont dues à Liepmann [14]. Elles concernaient en particulier les ailes d'avion minces. Davenport [4] a été le premier à assimiler le vent dans la couche limite atmosphérique à un écoulement turbulent, et à généraliser la méthode de Liepmann pour déterminer les effets du vent sur les ponts suspendus.

Cette méthode considère les forces produites par le vent turbulent sur la structure comme une action aléatoire (caractérisée par sa fonction densité spectrale de puissance) qui met en vibration la structure. On peut alors évaluer l'écart-type de l'amplitude des mouvements vibratoires correspondant à chaque mode propre de la structure. Les étapes principales de cette approche sont :

- caractérisation de la nature probabiliste de la turbulence du vent par la densité spectrale de puissance (DSP) des fluctuations turbulentes de la vitesse ;
- caractérisation probabiliste des forces produites par le vent sur la structure, par l'intermédiaire des coefficients aérodynamiques mesurés en soufflerie ;
- calcul des modes propres de la structure afin de déterminer la réponse résonante de celle-ci (fonctions de transfert du système) ;
- détermination des grandeurs statistiques caractérisant la réponse (densité spectrale de puissance des déplacements et sollicitations) à l'aide des données précédentes.

Pour une vitesse moyenne du vent donnée, l'équation (18) fournit la réponse stochastique de la structure sous la forme :

$$\{q(\omega)\} = \left[ -\omega^2 [\hat{M}] + i\omega \left( [\hat{C}] - [\hat{A}(\bar{U}, \omega)] \right) + \left( [\hat{K}] - [\hat{B}(\bar{U}, \omega)] \right) \right]^{-1} \cdot {}^t [\Theta] [D(\omega)] \{V'(\omega)\} \quad (22)$$

$$\text{ou encore : } \{q(\omega)\} = [H(\omega)] \cdot {}^t [\Theta] [D(\omega)] \{V'(\omega)\} \quad (23)$$

où  $[H(\omega)]$  est la *matrice de transfert du système*.

La densité spectrale de puissance de la coordonnée généralisée s'obtient alors en multipliant à droite l'équation (18) par son expression adjointe :

$$[S_{qq}(\omega)] = [H(\omega)] {}^t [\Theta] [D(\omega)] [S_{VV'}(\omega)] {}^t [D(\omega)]^* [\Theta] {}^t [H(\omega)]^* \quad (24)$$

dans laquelle  $[S_{qq}(\omega)]$  est la matrice de densités spectrales des coordonnées généralisées,  $[S_{VV'}(\omega)]$  la matrice de densité interspectrale de puissance des fluctuations turbulentes de la vitesse du vent, et « \* » l'opérateur de conjugaison.



La matrice de densité interspectrale des vitesses du vent est définie par :

$$[S_{VV}(\omega)] = \begin{bmatrix} S_{u_1 u_1}(\omega) & S_{u_1 v_1}(\omega) & S_{u_1 w_1}(\omega) & & S_{u_1 u_p}(\omega) & S_{u_1 v_p}(\omega) & S_{u_1 w_p}(\omega) \\ S_{v_1 u_1}(\omega) & S_{v_1 v_1}(\omega) & S_{v_1 w_1}(\omega) & \cdots & S_{v_1 u_p}(\omega) & S_{v_1 v_p}(\omega) & S_{v_1 w_p}(\omega) \\ S_{w_1 u_1}(\omega) & S_{w_1 v_1}(\omega) & S_{w_1 w_1}(\omega) & & S_{w_1 u_p}(\omega) & S_{w_1 v_p}(\omega) & S_{w_1 w_p}(\omega) \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ S_{u_p u_1}(\omega) & S_{u_p v_1}(\omega) & S_{u_p w_1}(\omega) & & S_{u_p u_p}(\omega) & S_{u_p v_p}(\omega) & S_{u_p w_p}(\omega) \\ S_{v_p u_1}(\omega) & S_{v_p v_1}(\omega) & S_{v_p w_1}(\omega) & \cdots & S_{v_p u_p}(\omega) & S_{v_p v_p}(\omega) & S_{v_p w_p}(\omega) \\ S_{w_p u_1}(\omega) & S_{w_p v_1}(\omega) & S_{w_p w_1}(\omega) & & S_{w_p u_p}(\omega) & S_{w_p v_p}(\omega) & S_{w_p w_p}(\omega) \end{bmatrix} \quad (25)$$

où  $S_{\alpha_i \beta_j}(\omega)$  ( $\alpha, \beta = u, v, w$  ;  $i = 1, \dots, p$ ) est la densité interspectrale de puissance entre les diverses fluctuations du vent en différents nœuds du modèle,  $p$  étant le nombre de nœuds.

Dans le produit de l'expression (24),  $[D(\omega)] [S_{VV}(\omega)]^t [D(\omega)]^*$ , apparaissent des termes du type :

$$C_1 \cdot C_m \cdot S_{jk}(\omega) \cdot \Psi_{lj}(\omega) \Psi_{mk}^*(\omega) + \dots \quad (26)$$

avec  $I, m = T, N, M$  ;  $j, k = u, v, w$  ; le produit  $\Psi_{lm}(\omega) \Psi_{km}^*(\omega)$  est connu comme la *fonction d'admittance aérodynamique*. Le produit (26) peut être simplifié en négligeant la densité interspectrale entre composantes différentes de la vitesse turbulente du vent, c'est-à-dire :

$$S_{jk}(\omega) = 0 \text{ pour } j \neq k \quad (27)$$

Une autre simplification possible consiste à considérer que toutes les fonctions d'admittance aérodynamique sont égales. Ces deux hypothèses permettent alors de factoriser la fonction indicielle  $\Psi_{ij}(\omega)$  de la matrice  $[D(\omega)]$ .

Finalement, la variance de la coordonnée généralisée est calculée à partir de l'équation (24) par :

$$[\sigma_{qq}^2] = \int_0^\infty [S_{qq}(n)] dn \quad (28)$$

ou à partir de l'équation (17), la variance des déplacements nodaux peut être évaluée par :

$$\sigma_{d_i}^2 = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m (\theta_k^i)_j \cdot (\theta_l^i)_j \int_0^\infty (S_{qq}(n))_{kl} dn \quad (29)$$

où  $j$  est le numéro de nœud correspondant ( $j = 1, \dots, p$ ) et  $i$ , la composante du déplacement ( $i = y, z, \alpha$ ).

Dans la pratique, la valeur extrême de la réponse est essentielle pour le dimensionnement de l'ouvrage. En conséquence, la valeur extrême des déplacements de la structure est définie par :

$$\{\hat{d}\} = \{\bar{d}\} + g \{\sigma_d\} \quad (30)$$

où  $g$  est un facteur de pointe dont la valeur est généralement comprise entre 3,5 et 4,5 [4].

### Calcul dans le domaine du temps

Une approche alternative aux méthodes spectrales consiste d'abord à *simuler des signaux aléatoires de la vitesse turbulente du vent* aux nœuds de la structure, puis à *intégrer temporellement les équations de mouvement* du système. Cette approche permet également d'étudier des structures présentant un comportement non linéaire.

Dans le cadre général d'une structure à *comportement non linéaire* présentant un amortissement visqueux linéaire, l'équation de la dynamique du système s'écrit sous la forme :

$$[M]\{\ddot{d}(t)\} + [C]\{\dot{d}(t)\} + \{P(t)\} = \{F^A(t)\} + \{F^T(t)\} \quad (31)$$

dans laquelle  $\{P(t)\}$  est le vecteur qui contient les forces développées par la structure à l'instant  $t$  (ces forces sont une fonction non linéaire des déplacements de la structure),  $\{F^A(t)\}$  est le vecteur des for-

ces aéroélastiques, et  $\{F^T(t)\}$  représente le vecteur des forces générées par le vent turbulent sur la structure à un instant  $t$ .

Le vecteur des forces turbulentes s'exprime sous la forme d'une intégrale de Duhamel (12b) :

$$\{F^T(t)\} = \int_0^t [D(t-\tau)] \{V'(\tau)\} d\tau$$

À l'intérieur de la matrice  $[D(t=\tau)]$  apparaissent les fonctions indicielles du type  $\Psi_{jk}(j = N, T, M ; k = u, w)$ . Malheureusement, à l'heure actuelle, il n'existe pas de formulation analytique ou expérimentale de ces fonctions pour les tabliers de pont. Par conséquent, pour l'approche temporelle, l'hypothèse de quasi-stationnarité est adoptée (2a), ce qui implique :

$$\{F^T(t)\} = [D] \{V'(t)\}$$

En utilisant la méthode de *Newton-Raphson modifiée* pour l'analyse des systèmes non linéaires [18], l'équation (31) peut être réécrite sous la forme :

$$[M] \{\ddot{d}(t+\Delta t)\}^{(k)} + [C] \{\dot{d}(t+\Delta t)\}^{(k)} + [{}^{tg}K] \{\Delta d\}^{(k)} + \{P(t+\Delta t)\}^{(k-1)} = \{F^A(t+\Delta t)\}^{(k-1)} + [D] \{V'(t+\Delta t)\} \quad (32)$$

$$\text{avec } \{\Delta d\}^{(k)} = \{d(t+\Delta t)\}^{(k)} - \{d(t+\Delta t)\}^{(k-1)} \quad (33)$$

$$\{P(t+\Delta t)\}^{(k)} = \{P(t+\Delta t)\}^{(k-1)} + [{}^{tg}K] \{\Delta d\}^{(k)} \quad (34)$$

$[{}^{tg}K]$  est la matrice de *rigidité tangente* de la structure à l'instant  $t$ , et  $k$  le numéro de l'itération correspondante ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Les valeurs de départ des itérations  $k$  sont fournies par :

$$\{d(t+\Delta t)\}^{(0)} = \{d(t)\}, \{P(t+\Delta t)\}^{(0)} = \{P(t)\}, \{F^A(t+\Delta t)\}^{(0)} = \{F^A(t)\} \quad (35)$$

L'intégration temporelle des équations du mouvement peut être réalisée de façon approchée, en utilisant la méthode de Newmark. Les hypothèses suivantes, concernant les déplacements et vitesses à l'instant  $t + \Delta t$ , sont alors considérées :

$$\{\dot{d}(t+\Delta t)\}^{(k)} = -\{\dot{d}(t)\} + \frac{2}{\Delta t} \left( \{d(t+\Delta t)\}^{(k-1)} - \{d(t)\} + \{\Delta d(t)\}^{(k)} \right) \quad (36)$$

$$\{\ddot{d}(t+\Delta t)\}^{(k)} = \frac{4}{\Delta t^2} \left( \{d(t+\Delta t)\}^{(k-1)} - \{d(t)\} + \{\Delta d(t)\}^{(k)} \right) - \frac{4}{\Delta t} \left( \{\dot{d}(t)\} - \{\ddot{d}(t)\} \right) \quad (37)$$

En introduisant les équations (36) et (37) dans (32), il vient :

$$[\bar{K}] \{\Delta d\}^{(k)} = \{\Delta R\}^{(k-1)} \quad (38)$$

$$\text{avec } \{\Delta R\}^{(k-1)} = \{F^A(t+\Delta t)\}^{(k-1)} + [D] \{V'(t+\Delta t)\} - \{P(t+\Delta t)\}^{(k-1)} - [M] \{g_M\} - [C] \{g_C\} \quad (39)$$

$$[\bar{K}] = \left[ [M] \frac{4}{\Delta t^2} + [C] \frac{2}{\Delta t} + [{}^{tg}K] \right]; \{g_M\} = \left[ \frac{4}{\Delta t^2} \left( \{d(t+\Delta t)\}^{(k-1)} - \{d(t)\} \right) - \frac{4}{\Delta t} \left( \{\dot{d}(t)\} - \{\ddot{d}(t)\} \right) \right]$$

$$\{g_C\} = \left[ \frac{2}{\Delta t} \left( \{d(t+\Delta t)\}^{(k-1)} - \{d(t)\} \right) - \{\dot{d}(t)\} \right]$$

L'équation (38) est l'expression fondamentale de la méthode. À l'intérieur de chaque pas de temps, il faut donc d'abord calculer le vecteur « *résidu* » conformément à l'équation (39), puis le vecteur d'incrément de déplacements  $\{\Delta d\}^{(k)}$  à partir de l'expression (33). Ensuite, les nouvelles valeurs de  $\{d(t+\Delta t)\}^{(k)}$  et  $\{\dot{d}(t+\Delta t)\}^{(k)}$  sont respectivement calculées à partir des équations (36) et (37). Cela mène à une nouvelle valeur du résidu ; les itérations ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) sont répétées jusqu'à ce que la valeur de  $\{\Delta d\}^{(k)}$  soit suffisamment petite.

## APPLICATION AU PONT VASCO DE GAMA

Les développements théoriques précédents ont été implantés dans le progiciel CESAR-LCPC® et appliqués à l'étude de la réponse au vent d'un ouvrage particulier : le pont Vasco de Gama, sur le Tage à Lisbonne. Cet ouvrage est un pont haubané de portée centrale de 420 m pour une longueur

totale de 830 m. Le tablier a une largeur de 30,9 m et est formé par une dalle en béton armé et deux poutres latérales précontraintes de 2,60 m de hauteur. Les données éoliennes du site de l’ouvrage sont fournies dans le tableau I. Le tableau II et la figure 3 fournissent les caractéristiques aérodynamiques et aéroélastiques de la section du tablier.

Le modèle du pont Vasco de Gama retenu dans cette étude a été élaboré par le SETRA lors des études de conception de l’ouvrage menées avec le code de calcul SYSTUS. Pour la présente étude, il a été repris sous le progiciel CESAR-LCPC. Il comporte 754 nœuds et 1 325 éléments de poutre tridimensionnels. La figure 4 montre le maillage du modèle du pont. Les huit premières fréquences propres du pont calculées avec CESAR-LCPC sont fournies dans le tableau III. Tous les modes sont amortis avec un coefficient d’amortissement structurel de 0,57 %.

La figure 5 présente la variation de l’amortissement modal en fonction de la vitesse du vent au niveau du tablier. La perte de stabilité par flottement (condition d’amortissement nul) intervient pour le premier et deuxième modes en torsion à des vitesses de vent de 84,6 m/s et 111,5 m/s (cf. Fig. 5). La première vitesse critique de flottement pour le modèle du pont complet peut être comparée à celle obtenue à partir des mesures en soufflerie sur une maquette à échelle réduite. La vitesse d’instabilité mesurée en soufflerie, correspond à 89,2 m/s sur un ouvrage à l’échelle 1. Malgré les différences entre les modèles mécaniques et les caractéristiques de turbulence en soufflerie et sur site, les deux vitesses critiques sont relativement proches l’une de l’autre.

La réponse à la turbulence est évaluée pour la vitesse de calcul, correspondant à une vitesse de 39,3 m/s au niveau du tablier (52 m sur le terrain). Seuls les dix premiers modes de vibration ont été considérés pour ce calcul. La turbulence est modélisée conformément aux données du tableau I. La figure 6 donne la variation de l’écart-type des déplacements verticaux le long du tablier du pont.

TABLEAU I  
Caractéristiques de la turbulence sur le site

Rugosité : $z_0^* = 0,005 \text{ m}$ ; vitesse moyenne à 10 m : $\bar{U}_{10} = 32,3 \text{ m/s}$
Intensités de turbulence : $I_u = 0,11$ ; $I_v = 0,11$ ; $I_w = 0,07$
Échelles longitudinales : $L_y^u = 185 \text{ m}$ ; $L_y^v = 60 \text{ m}$ ; $L_y^w = 30 \text{ m}$
Échelles transversales : $L_x^u = 75 \text{ m}$ ; $L_x^v = 90 \text{ m}$ ; $L_x^w = 30 \text{ m}$
Échelles verticales : $L_z^u = 40 \text{ m}$ ; $L_z^v = 30 \text{ m}$ ; $L_z^w = 20 \text{ m}$
Cohérences latérales : $C_x^u = 11$ ; $C_x^v = 4,5$ ; $C_x^w = 12$
Cohérences verticales : $C_z^u = 11$ ; $C_z^v = 4,5$ ; $C_z^w = 12$

TABLEAU II  
Caractéristiques aérodynamiques et aéroélastiques du tablier

Données aérodynamiques (d’après [19])	Coefficients des fonctions indicelles (d’après [13])	
$C_T(0) = 0,144$		
$C_N(0) = -0,0337$	$\chi_{N_{0,h}} = -14,6688$	$\chi_{M_{0,\alpha}} = 0,2624$
$C_M(0) = 0,015$	$c_{0,Nh} = 7,2204$	$c_{0,M\alpha} = 0,5594$
$dC_T(0)/d\alpha = 0,086$	$c_{1,Nh} = -6,3091$	$c_{1,M\alpha} = -39,5736$
$dC_N(0)/d\alpha = 5,960$	$c_{2,Nh} = -1,5931$	$c_{2,M\alpha} = -1,7175$
$dC_M(0)/d\alpha = 1,060$	$c_{3,Nh} = -7,0520$	$c_{3,M\alpha} = -42,7244$
	$c_{4,Nh} = -0,8210$	$c_{4,M\alpha} = -1,9910$

Pour la modélisation des forces aéroélastiques du tablier du pont les coefficients des fonctions indicielles du tableau II ont été utilisées. Des signaux « synthétiques » des vitesses turbulentes du vent *spatialement corrélées* ont été générés le long de la structure [20]. La figure 7 présente les variations des composantes verticale et horizontale de la vitesse du vent le long du tablier à l’instant  $t = 10$  s, pour l’une de ces simulations du vent.

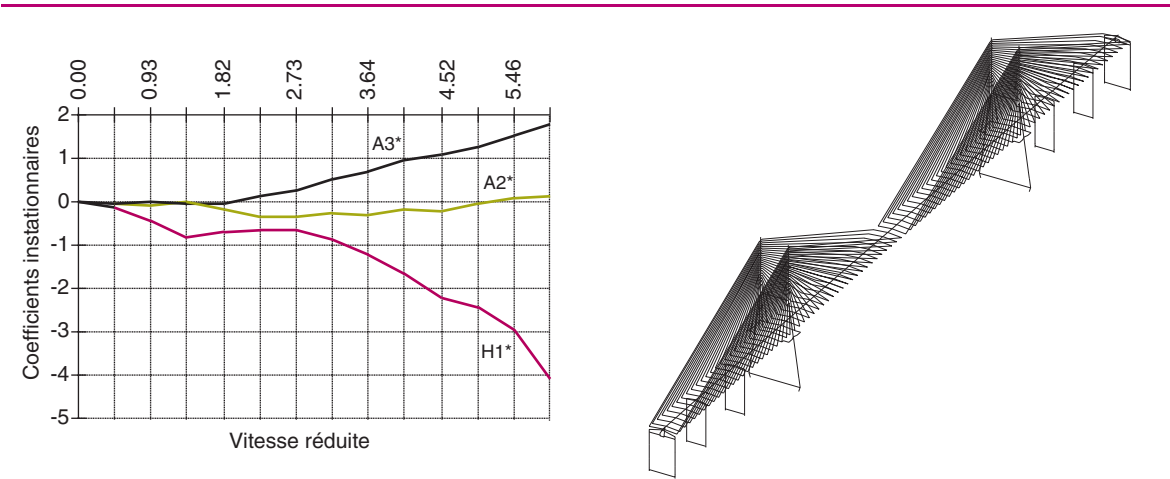


Figure 3 Coefficients aéroélastiques de la section du tablier (d’après [19]).

Figure 4 Maillage par éléments finis du pont Vasco de Gama.

TABLEAU III  
Fréquences propres du modèle du pont Vasco de Gama

Mode	Fréquence (Hz)	Type
1	0,165	Longitudinal
2	0,329	Flexion verticale
3	0,360	Balancement
4	0,439	Flexion verticale
5	0,494	Torsion
6	0,613	Flexion verticale
7	0,638	Torsion
8	0,760	Flexion verticale

Pour l’intégration des équations du mouvement, le pas de temps choisi est de 2,5 ms et la durée des simulations réalisées est de 40 s. Sur la figure 7, on présente la variation de l’écart-type des déplacements verticaux le long du tablier pour différentes simulations des vitesses turbulentes du vent. L’estimation de ces écarts-types est également fournie pour cinq simulations du vent ainsi que les résultats obtenus par la méthode fréquentielle (sans admittance aérodynamique). Il est possible d’observer que les résultats calculés par la méthode temporelle surestiment légèrement ceux obtenus par le calcul fréquentiel. Ces différences sont essentiellement liées à l’estimation des coefficients des fonctions indicielles à partir des coefficients de Scanlan.

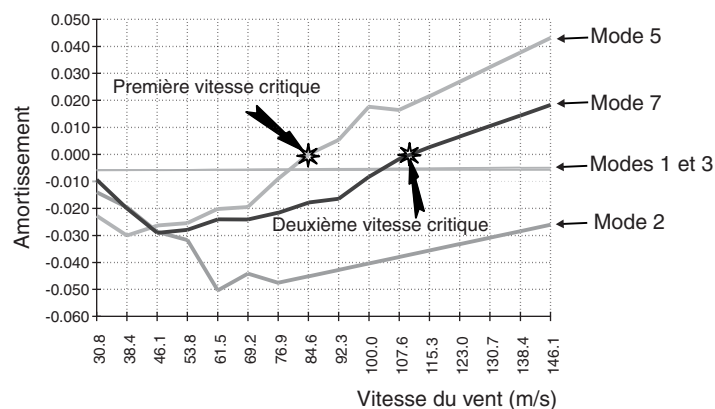


Figure 5  
Calcul des vitesses critiques de flottement.

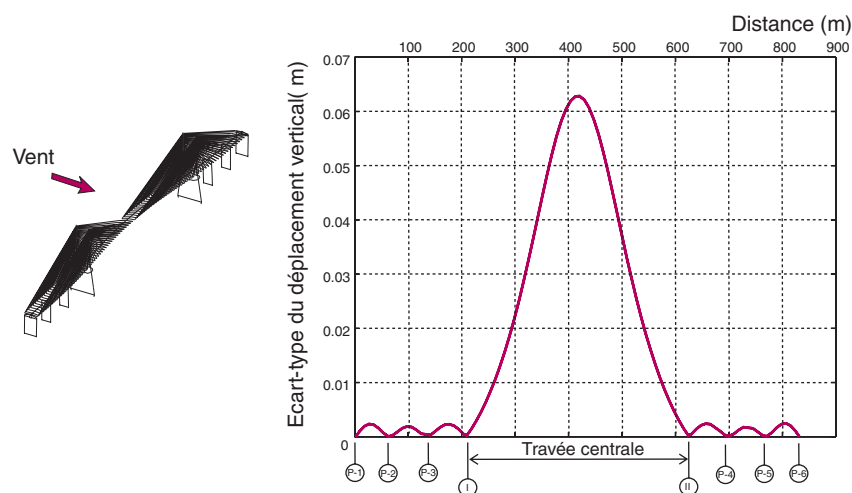


Figure 6  
Écart-type de déplacements verticaux sur l'axe du tablier.

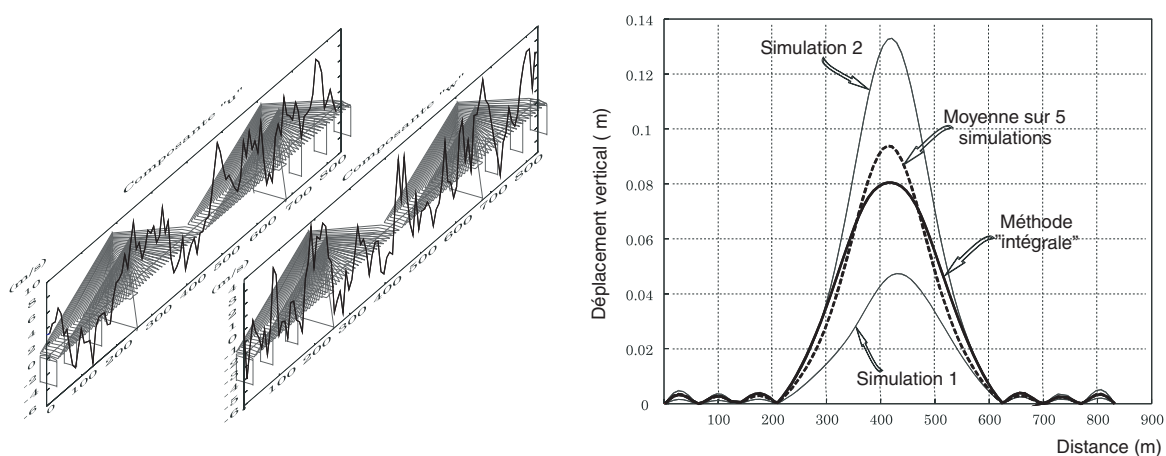


Figure 7  
Variation des composantes verticale et horizontale du vent, et variation de l'écart-type des déplacements verticaux sur l'axe du tablier.

## CONCLUSIONS

La présente étude a proposé une formulation générale pour évaluer la réponse spectrale des ponts sensibles aux effets du vent. Menée dans le cadre d'un formalisme aux éléments finis, la démarche repose sur la prise en compte des effets aéroélastiques dans le calcul de la réponse à la turbulence. Ces effets représentent l'interaction entre l'air et la structure en mouvement ; ils mettent en évidence des termes d'amortissement et de rigidité dépendant de la fréquence d'oscillation de la structure. L'analyse de stabilité du système couplé « fluide/structure » permet de déterminer les vitesses pour lesquelles le risque de flottement apparaît. Une méthode de détermination de ces vitesses critiques est d'ailleurs proposée. Les méthodes d'analyse de stabilité et de calcul de la réponse à la turbulence ont été mises en œuvre numériquement dans un module spécifique du code de calcul aux éléments finis CESAR-LCPC. Ces développements ont été validés par comparaison avec des données expérimentales sur maquette aéroélastique. Le module a également été utilisé pour calculer des ouvrages complets, dont quelques résultats ont été présentés ici.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] BLEICH F., Dynamic instability of truss-stiffened suspension bridges under wind action, *Proc., ASCE*, vol. 74, **8**, **1948**, pp. 1269-1314.
- [2] BISPLINGHOFF R.L., ASHLEY H., *Principles of Aeroelasticity*, John Wiley and Sons, États-Unis, **1962**.
- [3] SCANLAN R.H., TOMKO J.J., Airfoil and bridge flutter derivatives, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 109, **2**, **1971**, pp. 586-603.
- [4] DAVENPORT, A.G., The buffeting response of a suspension bridge by storm winds, *Journal of the Structural Division*, ASCE, 88(33), **1962**, pp. 233-268.
- [5] BIÉTRI J., GRILLAUD G., Wind studies for the Normandie bridge, *Actes de la conférence de l'AFPC sur les ponts suspendus et à haubans*, Deauville, France, vol. 2, **1994**, pp. 29-44.
- [6] JAIN A., JONES N.P., SCANLAN R.H., Coupled flutter and buffeting analysis of long-span bridges, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, vol. 122, **7**, **1996**, pp. 717-725.
- [7] LIN Y.K., YANG J.N., Multimode bridge response to wind excitations, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 100, **4**, **1983**, pp. 657-672.
- [8] SCANLAN R.H., Problematics in formulation of wind-force models for bridge decks, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol. 119, **7**, **1993**, pp. 1353-1375.
- [9] ARZOUMANIDIS S.G., BIENIEK M.P., Finite element analysis of suspension bridges, *Computers & Structures*, vol. 21, **6**, **1985**, pp. 1237-1253.
- [10] BELIVEAU J.G., VAICAITIS R., SHINOZUKA M., Motion of suspension bridge subject to wind loads, *Journal of the Structural Division*, ASCE, vol. 103, **ST6**, **1977**, pp. 1189-1205.
- [11] CRÉMONA C., Éd., *Comportement au vent des ponts*, AFGC, Presses de l'ENPC, Paris, France, **2002**.
- [12] SCANLAN R.H., BELIVEAU J.G. BUDLONG K.S., Indicial aerodynamic functions for bridge decks, *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, vol. 100, **4**, **1974**, pp. 657-672.
- [13] LEFORT M.-A., *Étude de la stabilité aéroélastique des ponts à haubans : approche numérique*, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand II, France, **1998**.
- [14] DOWEL E.H. (Ed.), CRAWLEY E.F., CURTISS H.C., PETERS D.A., SCANLAN R.H., SISTO F., *A Modern Course in Aeroelasticity*, Ed. Kluwer, USA, **1995**.
- [15] IMBERT J.-F., *Analyse des structures par éléments finis*, éd. CEPADUES, **1979**.
- [16] PATRON A., *Modélisation numérique de la tenue au vent des ponts souples*, Thèse de l'ENPC, **1998**.
- [17] NAMINI A., ALBRECHT P., BOSCH H. (1992), Finite element-based flutter analysis of cable-suspended bridges, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, vol. 118, **6**, **1992**, pp. 1509-1526.
- [18] BATHE K.J., *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, États-Unis, **1996**.
- [19] GRILLAUD G. et al., Wind action on the Vasco da Gama cable stayed bridge, *2nd European Conference on Wind Engineering*, G. Solari Ed., SGE Editoriali, Italie, **1997**, pp. 1451-1456.
- [20] GUILLIN A., CRÉMONA C., *Développement d'algorithmes de simulation de champs de vitesse de vent*, Presses du LCPC, **1998**.