

Modélisation de l'endommagement avec gradient

Application à la dynamique rapide

Boumediene NEDJAR

Laboratoire d'Analyses des Matériaux et Identification, LAMI/Institut Navier

RÉSUMÉ

Une version améliorée du traitement numérique du modèle d'endommagement avec gradient récemment proposé est présentée. Afin de résoudre la nouvelle équation, issue de cette formulation, qui décrit l'évolution de l'endommagement au niveau global, un algorithme fondé sur la méthode du *Lagrangien augmenté* est développé afin de prendre en compte la contrainte liée à l'irréversibilité du phénomène d'endommagement. L'avantage de cette stratégie devient claire : d'une part, on peut utiliser un schéma simultané pour résoudre le problème global couplé et, d'autre part, on ne modifie pas la structure actuelle des algorithmes de traitement des problèmes non linéaires. Cet algorithme est appliqué dans cette étude à la modélisation de l'endommagement en dynamique (module DMGE du logiciel CESAR-LCPC).

DOMAINE : Sciences de l'ingénieur.

ABSTRACT

A GRADIENT DAMAGE MODELING:
APPLICATION TO RAPID DYNAMICS

An improved version of the numerical treatment of the recently-proposed damage model with gradient is presented herein. In order to resolve the new equation stemming from this set-up, which describes the evolution of damage at the global level, an algorithm based on the augmented Lagrangian method has been developed to account for the irreversibility of the damage phenomenon. The advantage of this strategy becomes then clear: potential use of a simultaneous approach for solving the coupled global problem, and no modification to the current structure of processing algorithms for non-linear problems. This algorithm is here applied to model damage in dynamics (i.e. use of the DMGE module in the CESAR-LCPC software package).

FIELD: Engineering sciences.

243

INTRODUCTION

Le plus souvent, la réponse phénoménologique d'une variété de matériaux solides utilisée en ingénierie est caractérisée par une perte progressive de raideur avec l'augmentation des sollicitations conduisant éventuellement à la rupture. Cette dégradation mène souvent à un adoucissement du comportement. D'un point de vue mathématique, l'adoucissement provoque un changement de nature des équations du problème, le rendant ainsi mal posé, et, d'un point de vue numérique, les modèles *locaux* classiques exhibent des dépendances inacceptables des résultats avec le maillage utilisé.

Plusieurs alternatives ont été proposées afin de pallier ces difficultés. Parmi les méthodes proposées dans la littérature, on trouve des formulations faisant intervenir le gradient de la plasticité, comme par exemple dans [1-4], et dans [5-8] pour les formulations de l'endommagement avec gradient. On propose ici un nouvel algorithme de traitement du modèle d'endommagement avec gradient développé dans [5,6]. Dans cette théorie, la formulation de la partie évolution de l'endommagement est issue d'une nouvelle écriture du principe des puissances virtuelles. L'expression de la puissance des forces intérieures fait intervenir, en plus du terme classique impliquant les vitesses de déformations, ceux de la vitesse de l'endommagement et de son gradient. Ce dernier est introduit afin de prendre en compte l'influence de l'endommagement en un point matériel sur l'endommagement de son voisinage. La première conséquence de ce choix est l'apparition d'une nouvelle équation destinée à décrire l'évolution de l'endommagement dans le solide. Cette équation doit être résolue en même temps que l'équation classique du mouvement.

Au niveau global de la résolution par éléments finis, plusieurs stratégies peuvent être employées. L'une d'elles pourrait être celle utilisée dans [5, 6] en statique, ou dans [9] en dynamique : les deux

équations du problème sont résolues de façon découplée, en raison de la présence de la contrainte imposée par le phénomène physique d'irréversibilité de l'endommagement. On propose de traiter cette dernière par une méthode du Lagrangien augmenté. Cet algorithme est appliqué ici à la résolution d'un problème d'endommagement en dynamique rapide. Le développement et l'implantation dans le cadre de la méthode des éléments finis sont décrits. Enfin, un exemple illustratif est donné.

RAPPEL DES PRINCIPALES ÉQUATIONS

On rappelle ici les principales étapes de la formulation de l'endommagement avec gradient. Pour une illustration plus détaillée, on se reportera aux travaux développés dans [5, 6]. Pour des raisons de clarté, on se restreint à une modélisation élastique-endommageable.

Soit $\beta(x,t)$ la variable d'endommagement valant 1 quand le matériau est sain, et 0 quand il est complètement endommagé. L'idée de base de la théorie est de modifier l'expression de la puissance des efforts intérieurs P_{int} comme suit. Pour un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$, on écrit :

$$P_{\text{int}} = - \int_{\Omega} \sigma : \dot{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} (B\dot{\beta} + \mathbf{H} \cdot \text{grad}\dot{\beta}) d\Omega \quad (1)$$

où σ est le tenseur des contraintes, $\dot{\varepsilon}(\mathbf{u})$ le tenseur des taux de déformations (\mathbf{u} étant le vecteur des déplacements), B le travail interne d'endommagement et \mathbf{H} le flux de travail interne d'endommagement. $(\dot{\cdot})$ désigne la dérivée par rapport au temps.

D'autre part, on choisit la puissance des quantités d'accélération P_{acc} comme suit :

$$P_{\text{acc}} = - \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\rho} \ddot{\beta} \dot{\beta} d\Omega \quad (2)$$

où ρ est la masse volumique. La quantité $\underline{\rho} \ddot{\beta} \dot{\beta}$ représente les forces d'accélération des liens microscopiques ; $\underline{\rho}$ est proportionnelle à leur masse avec pour unité [kgm^{-1}] (soit une masse linéique). On peut choisir de relier ρ et $\underline{\rho}$ en prenant $\underline{\rho} = \alpha\rho$, où α est un paramètre du matériau de dimension [m^2], et qui peut être pris égal à zéro si l'on décide de négliger les forces d'inertie des mouvements microscopiques.

En considérant l'écriture classique de l'expression de la puissance des efforts extérieurs P_{ext} le principe des puissances virtuelles mène aux deux équations suivantes (cf. [5, 6, 9]) :

$$\begin{aligned} \text{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{dans } \Omega & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{T} \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \text{div}\mathbf{H} - B &= \alpha \rho \ddot{\beta} \quad \text{dans } \Omega & \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (3)$$

Dans (3), div est l'opérateur divergence, \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la frontière $\partial\Omega$, \mathbf{T} est le vecteur des forces surfaciques et \mathbf{f} est le vecteur des forces volumiques. Ce problème couplé doit à présent être complété par des relations de comportement adéquates. Pour cela, on utilise le cadre de la thermodynamique des milieux continus.

Relations de comportement

Avec le choix fait sur l'expression de la puissance des efforts intérieurs dans (1), et en ne considérant que les phénomènes isothermes, l'inégalité de Clausius-Duhem s'écrit :

$$D = \sigma : \dot{\varepsilon} + B\dot{\beta} + \mathbf{H} \cdot \text{grad}\dot{\beta} - \dot{\psi} \geq 0 \quad (4)$$

qui doit être satisfaite pour tout processus admissible. Dans (4), ψ est l'énergie libre caractérisant l'état du matériau. En plus du tenseur des déformations ε , cette dernière dépend aussi de la variable d'endommagement β et de son gradient $\text{grad}\beta$: $\psi \equiv \psi(\varepsilon, \beta, \text{grad}\beta)$. En remplaçant cette dernière dans (4) et en utilisant la méthode standard de Coleman (cf. exemple [10, 11], fondée sur l'inégalité (4), on obtient :

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}, \quad \mathbf{H} = \frac{\partial \psi}{\partial (\text{grad}\beta)} \quad (5)$$

$$\text{avec l'inégalité dissipative : } D = (B - \frac{\partial \psi}{\partial \beta}) \dot{\beta} \geq 0 \quad (6)$$

En notant que cette dernière doit être stricte quand l'endommagement évolue, le choix $B = \partial_{\dot{\beta}}\psi$ est inacceptable. Comme dans [12], on postule alors l'existence d'un pseudo-potentiel de dissipation $\phi(\dot{\beta}; \dots)$, c'est-à-dire une fonction, positive, convexe et sous-différentiable avec $\phi = 0 \Leftrightarrow \dot{\beta} = 0$, telle que :

$$B - \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\beta}} = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\beta}} \Rightarrow B = \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\beta}} + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\beta}} \quad (7)$$

La convexité de ϕ est suffisante pour satisfaire l'inégalité (6) pour tout processus admissible. Notons que, dans la définition de ϕ , d'autres variables peuvent intervenir (les variables d'état par exemple), mais seulement comme paramètres.

Un modèle élastique-endommageable

Afin de rendre la présentation plus concrète dans les développements qui suivent, on propose un modèle de comportement élastique-endommageable dans le cadre de la présente formulation. On choisit pour l'énergie libre ψ la fonction suivante :

$$\psi(\varepsilon, \beta, \text{grad}\beta) = \frac{1}{2} \beta \varepsilon : C : \varepsilon + \frac{1}{2} k (\text{grad}\beta)^2 \quad (8)$$

où le premier terme constitue le modèle le plus simple pour lequel l'endommagement n'affecte que le module d'Young du matériau. C est le tenseur de Hooke. Dans le second terme, k est le facteur gradient d'endommagement qui est un paramètre du matériau.

Pour le pseudo-potentiel de dissipation ϕ dans (7), on choisit la forme suivante pour une évolution de l'endommagement indépendante du temps physique :

$$\phi(\dot{\beta}) = -\dot{\beta} \left[W + \frac{1}{2} \varepsilon : C : \varepsilon - \beta^n S(\varepsilon) \right] + I_-(\dot{\beta}) \quad (9)$$

où W est le seuil initial d'endommagement, $n > 0$ un paramètre (sans dimension) qui contrôle l'adoucissement (ou le non-adoucissement) du comportement et $S(\varepsilon)$ la source d'endommagement dépendant des mécanismes qui gouvernent la croissance de ce dernier dans le matériau. W et $S(\varepsilon)$ ont la dimension d'une énergie volumique. $I_-(\dot{\beta})$ est la fonction indicatrice du sous-ensemble $]-\infty, 0]$ qui force $\dot{\beta}$ à être négatif ou nul ($I_-(x) = 0$ si $x \leq 0$, et $I_-(x) = +\infty$ si $x > 0$). Cette dernière est introduite pour prendre en compte le fait que l'endommagement est un phénomène irréversible.

On pourra facilement vérifier que la fonction ϕ donnée par (9) est positivement homogène de degré 1 (évolution de l'endommagement indépendante du temps physique).

Le choix de la source d'endommagement $S(\varepsilon)$ n'est pas unique. Cette fonction peut dépendre, par exemple, de la déformation totale, de sa partie déviatorique, ou de sa partie volumique, selon les mécanismes qui gouvernent la coalescence de l'endommagement dans le matériau. De plus, lorsque l'endommagement est provoqué par des extensions (comme par exemple dans le béton), $S(\varepsilon)$ peut également ne dépendre que de la partie positive des déformations comme cela a été proposé dans [6, 9] par exemple.

Avec ces choix, en remplaçant (8) et (9) dans (5) et (7), on obtient les relations de comportement suivantes :

$$\sigma = \beta C : \varepsilon, \quad H = k \text{grad}\beta, \quad B \in \beta^n S(\varepsilon) - W + \partial I_-(\dot{\beta}) \quad (10)$$

Dans (10), $\partial I_-(\dot{\beta})$ est la dérivée généralisée de $I_-(\dot{\beta})$. C'est une réaction mathématique qui force $\dot{\beta}$ à être négatif ou nul ; $\partial I_-(x) = \{0\}$ si $x < 0$ et $\partial I_-(0) = [0, +\infty[$.

Ainsi, les formes locales des équations du mouvement sont obtenues en remplaçant ces relations dans (3) :

$$\text{div}(\beta C : \varepsilon) + f = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \quad (11)$$

$$\sigma \cdot n = T \quad \text{sur } \partial\Omega$$

$$\alpha \rho \ddot{\beta} - k \Delta \beta + \beta^n S(\varepsilon) + \partial I_-(\dot{\beta}) \ni W \quad \text{dans } \Omega \quad (12)$$

$$k \text{grad}\beta \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

où Δ est l'opérateur Laplacien.

Dans le paragraphe suivant, une attention particulière est apportée au traitement numérique du terme non classique $\partial I_-(\dot{\beta})$ présent dans la partie endommagement du problème couplé, (12). Pour des raisons de clarté, l'inertie des liens microscopiques est négligée en prenant $\alpha = 0$.

FORMULATION VARIATIONNELLE ET ALGORITHME

En utilisant les méthodes standard, les deux parties (11) et (12) du problème couplé sont équivalentes aux deux formes variationnelles suivantes :

$$\int_{\Omega} \delta u \rho \dot{u} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla^s(\delta u) : \sigma d\Omega = G_{\text{ext}}(\delta u, t) \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \text{grad}(\delta \beta) k \text{grad} \beta d\Omega + \int_{\Omega} \delta \beta \beta^n S(\varepsilon) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \beta W d\Omega \\ \text{avec } \beta(x, t) \leq 0, \forall x \in \Omega, \forall t \end{array} \right. \quad (14)$$

qui doivent être satisfaites pour toute variation δu et $\delta \beta$, de déplacements et d'endommagement, respectivement. Dans (13), la notation $G_{\text{ext}}(\delta u, t)$ représente le travail virtuel des charges extérieures, et ∇^s est l'opérateur gradient symétrique. Dans (14), la condition $\beta(x, t) \geq 0$ représente la réaction mathématique $\partial I_{-}(\beta)$ présente dans (12).

Plusieurs stratégies peuvent être adoptées pour résoudre ce problème couplé. Dans [5], les deux équations (13) et (14) sont résolues de manière découplée : à chaque itération globale, l'équation (13) est résolue à endommagement fixe pour obtenir les incréments de déplacements. S'ensuit la résolution de l'équation (14) à déformations fixes afin d'obtenir les incréments du champ d'endommagement. Dans cet article, on propose une méthode plus élaborée où la condition $\beta(x, t) \leq 0$ est traitée à l'aide d'une technique de Lagrangien augmenté.

Traitement numérique de la partie endommagement

Afin de contourner les restrictions imposées par la condition $\beta(x, t) \leq 0$, on introduit une variable additionnelle r définie dans tout le domaine Ω et appelée variable *histoire d'endommagement* :

$$r(x, t) = \min_{\tau \leq t} \{\beta(x, \tau)\} \quad (15)$$

La condition $\beta(x, t) \leq 0$ est alors remplacée par la forme équivalente suivante :

$$\beta(x, t) - r(x, t) \leq 0, \forall x \in \Omega, \forall t \quad (16)$$

La partie endommagement du problème (14) soumise à la contrainte (16) est alors réécrite sous forme d'une équation unique :

$$\int_{\Omega} \text{grad}(\delta \beta) \cdot k \text{grad} \beta d\Omega + \int_{\Omega} \delta \beta \beta^n S(\varepsilon) d\Omega + \int_{\Omega} \delta \beta \langle \eta + \varepsilon(\beta - r) \rangle d\Omega = \int_{\Omega} \delta \beta W d\Omega \quad (17)$$

où $\langle \cdot \rangle$ est la fonction *partie positive* définie par $\langle x \rangle = \frac{1}{2}[x + |x|]$, ε un paramètre fixe de pénalité et η est un paramètre de *régularisation*. L'idée de cette méthode est de rechercher la valeur correcte du champ η selon un processus itératif. L'équation (17) est résolue avec l'estimation courante fixe du champ $\eta^{(k)} \geq 0$ de η à l'itération (k) , suivi de la procédure d'incrémentatation suivante :

$$\eta^{(k+1)} = \langle \eta^{(k)} + \varepsilon(\beta - r) \rangle \quad (18)$$

Cette procédure a été motivée par une stratégie similaire développée dans [13] pour le traitement des problèmes de contact sans frottement. Notons qu'il est aussi nécessaire de résoudre le problème couplé (13) et (17) de manière itérative. Ici, le problème couplé est résolu complètement avant d'effectuer l'incrémentatation (18).

Discrétisation en temps par différences finies

Étant donné que les effets d'inertie au niveau microscopique ont été négligés ($\alpha = 0$) dans (12), seule l'équation de la partie mécanique (13) est discrétisée en temps. On utilise ici le schéma classique de Newmark implicite :

$$r_{n+1} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t^2 \gamma} - \frac{v_n}{\Delta t \gamma} - \frac{1/2 - \gamma}{\Delta \gamma} r_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n + \Delta t [(1 - \tau) r_n + \tau r_{n+1}] \quad (19)$$

où la notation $(\cdot)_n$ se rapporte aux valeurs à l'instant t_n . \mathbf{v} et \mathbf{r} sont respectivement les vecteurs des vitesses et des accélérations. Δt est la discrétisation en temps, et τ et γ sont les paramètres du schéma de Newmark.

Discretisation en espace par éléments finis

À partir de la nature des équations à discrétiser, l'endommagement est un champ continu par éléments. Les mêmes fonctions d'interpolation sont utilisées pour les champs de déplacements et d'endommagement. Considérons la discrétisation du domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ ($n_{\text{dim}} = 2$ ou 3 est la dimension du problème) en un ensemble de sous-domaines Ω_e tels que $\Omega \approx \bigcup_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \Omega_e$. L'interpolation de la géométrie, des déplacements et du champ d'endommagement dans un élément Ω_e prend la forme :

$$x_e(\zeta) = \sum_{A=1}^{n_{\text{noeud}}^e} N^A(\zeta) x_A^e, \quad u_e(\zeta, t) = \sum_{A=1}^{n_{\text{noeud}}^e} N^A(\zeta) d_A^e(t), \quad \beta_e(\zeta, t) = \sum_{A=1}^{n_{\text{noeud}}^e} N^A(\zeta) \beta_A^e(t) \quad (20)$$

où $x_A^e \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, $d_A^e(t) \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ et $\beta_A^e(t) \in \mathbb{R}$ sont, respectivement, les vecteurs de position, de déplacement et d'endommagement, associés au nœud A. $N^A(\zeta)$ sont les fonctions classiques d'interpolation.

La suite de l'implantation par éléments finis est classique. Le problème couplé est résolu en utilisant un schéma monolithique : les équations (13) et (17) sont résolues simultanément. Dans ce cas, les contributions élémentaires à la matrice de rigidité tangente *globale*, et associées aux nœuds des éléments, sont données par :

$$K_e^{AB} = \begin{bmatrix} K_{e11}^{AB} & K_{e12}^{AB} \\ K_{e21}^{AB} & K_{e22}^{AB} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_{\text{dim}}+1) \times (n_{\text{dim}}+1)} \quad (21)$$

Dans cette matrice, la première colonne (ligne) est associée aux n_{dim} composantes des déplacements nodaux et la seconde colonne (ligne) est associée à l'endommagement nodal :

$$\begin{aligned} K_{e11}^{AB} &= \int_{\Omega_e} B[N^A]^T C B[N^B] d\Omega_e \\ K_{e12}^{AB} &= \int_{\Omega_e} B[N^A]^T C : \varepsilon N^B d\Omega_e \\ K_{e21}^{AB} &= \int_{\Omega_e} N^A \beta^n \left[\frac{\partial S(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]^T B[N^B] d\Omega_e \\ K_{e22}^{AB} &= \int_{\Omega_e} \nabla [N^A]^T \cdot k \cdot \nabla N^B d\Omega_e + \int_{\Omega_e} N^A \left\{ n(\beta^{(n-1)}) S(\varepsilon) + \varepsilon \tilde{H} \right\} N^B d\Omega_e \end{aligned} \quad (22)$$

où $\nabla[N^A]$ et $B[N^A]$ sont le gradient et le gradient symétrique discrets, respectivement. H est une approximation homographique de la fonction de Heaviside $H(\eta + \varepsilon(\beta - r))$.

Lors de l'implantation numérique, la variable histoire d'endommagement $r(x, t)$ et le paramètre de régularisation $\eta(x, t)$ sont stockés au niveau des points d'intégration.

EXEMPLE NUMÉRIQUE : BARRE EN TENSION

L'algorithme précédent a été implanté dans le code de calcul CESAR-LCPC [14] (module DMGE). Un exemple bidimensionnel en déformations planes est traité. Il s'agit de simuler un essai dynamique de tension sur une barre droite de longueur 200 mm et de section carrée $A = 5 \times 5 \text{ mm}^2$. Les caractéristiques du matériau utilisées pour le modèle sont : pour la partie mécanique, la masse volumique $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$, le module d'Young $E = 35000 \text{ MPa}$ et le coefficient de Poisson $\nu = 0,18$, et, pour la partie endommagement, le seuil initial d'endommagement $W = 6 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}$, le facteur gradient d'endommagement $k = 0,01 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^2$ et le coefficient de contrôle du comportement adoucissant $n = 0,5$.

Dans cet exemple, la source d'endommagement $S(\varepsilon)$ est une énergie gouvernée par les parties positives des déformations et définie par :

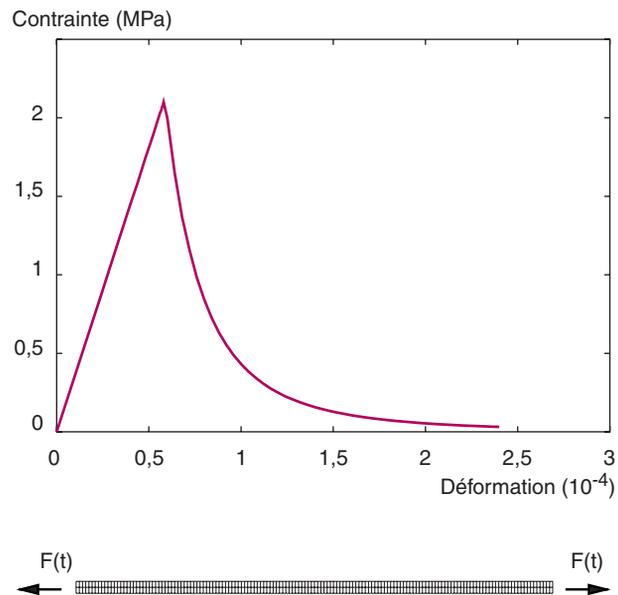
$$S(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left[\mu \varepsilon^+ : \varepsilon^+ + \lambda \left(\langle \text{tr}[\varepsilon] \rangle^+ \right)^2 \right] \quad (23)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé. Avec ces données, la relation contrainte-déformation en traction (et en statique) du matériau constitutif est représentée sur la figure 1. On peut remarquer le

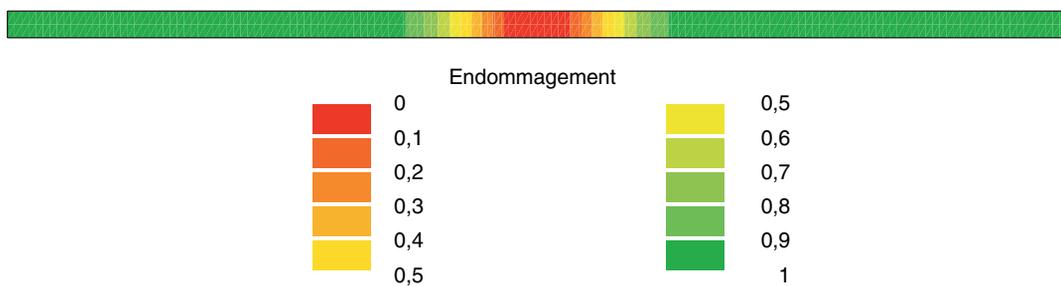
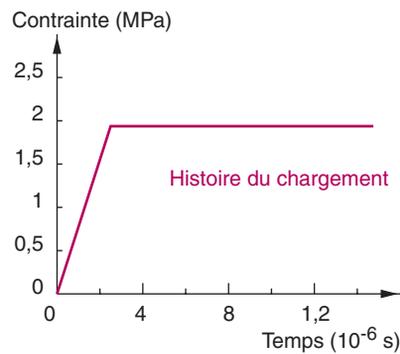
caractère *fortement adoucissant* du comportement au-delà de sa limite élastique. La résistance maximale en traction du matériau vaut $f_t = 2,1$ MPa.

La barre est soumise à un chargement rapide en traction tel que $F = 0,9 \times (A \cdot f_t)$ des deux côtés de la barre (Fig. 2). Le calcul a été effectué avec 200 éléments finis le long de la barre sur deux rangées. Pour la discrétisation en temps (schéma de Newmark), le pas de temps utilisé est $\Delta t = 2.10^{-7}$ s. Les ondes de traction provoquées par les chargements de chaque côté sont élastiques au départ. Elles se propagent ensuite le long de la barre jusqu'à ce qu'elles se rencontrent au milieu de celle-ci. À cet instant, la combinaison des deux chargements dépasse la résistance maximale du matériau, l'endommagement se développe et se localise au milieu de la barre. La barre est complètement endommagée dans la zone centrale après $3,6 \cdot 10^{-5}$ s. La figure 3 montre le champ d'endommagement après le passage des deux ondes de traction et la figure 4 représente le profil correspondant le long d'une coupe longitudinale.

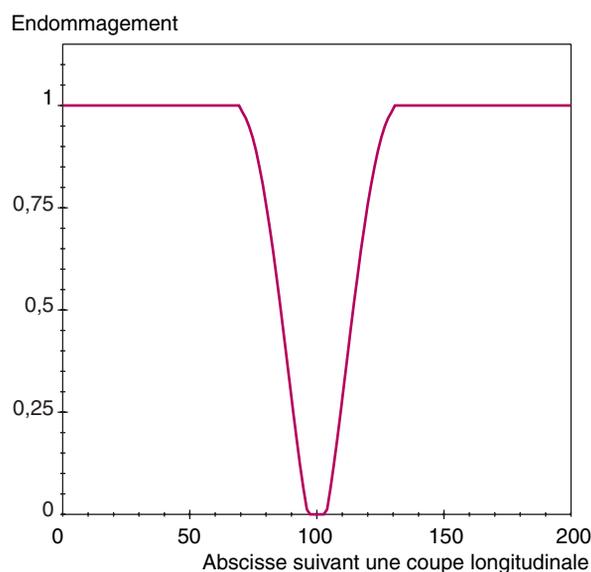
□ **Figure 1**
Relation contrainte-déformation du matériau en traction.



□ **Figure 2**
Discrétisation de la barre.
Histoire du chargement.



□ **Figure 3**
Champ d'endommagement après le passage des ondes de traction.



□ **Figure 4**
Profil d'endommagement le long
d'une coupe longitudinale.

CONCLUSION

Un nouvel algorithme de traitement de l'endommagement avec gradient a été présenté. Une technique de Lagrangien augmenté a été utilisée afin d'intégrer la contrainte physique d'irréversibilité dans l'équation d'évolution de l'endommagement. Le principal avantage est de pouvoir désormais résoudre le problème global couplé de manière simultanée. Cet algorithme a été utilisé pour traiter le problème d'endommagement en dynamique rapide. Dans ce cas, et en particulier lors de la discrétisation en temps, un schéma classique a été employé.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] FLECK N.A., HUTCHINSON J.W., A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 41(12), **1993**, pp. 1825–1857.
- [2] MENZEL A., STEINMANN P., On the continuum formulation of gradient plasticity for single polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 48, **2000**, pp. 1777–1796.
- [3] MÜHLHAUS, H.B., AIFANTIS E.C., A variational principle for gradient plasticity, *Int. J. Solids and Structures*, vol. 28, **1991**, pp. 845–857.
- [4] POLIZZOTO C., BORINO G., A thermodynamics-based formulation of gradient dependent plasticity, *Eur. J. Mech., A/Solids*, vol. 17, **1998**, pp. 741–761.
- [5] FRÉMOND M., NEDJAR B., Endommagement et principe des puissances virtuelles, *CR Acad. Sci. Paris, série II*, vol. 317, **1993**, pp. 857–864.
- [6] FRÉMOND M., NEDJAR B., Damage, gradient of damage and principle of virtual power, *Int. J. Solids and Structures*, vol. 33(8), **1996**, pp. 1083–1103.
- [7] LIEBE T., STEINMANN P., BENALLAL A., Theoretical and numerical aspects of a thermodynamically consistent framework for geometrically linear gradient damage, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 190, **2001**, pp. 6555–6576.
- [8] PEERLINGS R., DEBORST R., BREKELMANS W., DEVREE J., Gradient-enhanced damage for quasi-brittle materials, *Int. J. for Num. Meth. in Engrg.*, vol. 39, **1996**, pp. 3391–3403.
- [9] NEDJAR B., Damage and gradient of damage in transient dynamics, *IUTAM Symposium on Variations of Domains and Free-Boundary Problems in Solid Mechanics*, Argoul et al. (eds.), **1997**, pp. 189–196.
- [10] COLEMAN B.D., NOLL W., The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity, *Arch. Ratio. Mech. Analysis*, vol. 13, **1963**, pp. 167–178.
- [11] COLEMAN B.D., GURTIN M., Thermodynamics with internal variables, *J. Chem. Phys.*, vol. 48(2), **1967**, pp. 597–613.
- [12] MOREAU J.J., Sur les lois de frottement, de viscosité et de plasticité, *CR Acad. Sci. Paris*, vol. 271, **1970**, pp. 608–611.
- [13] SIMO J.C., LAURSEN T.A., An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction, *Computers and Structures*, vol. 42(1), **1992**, pp. 97–116.
- [14] HUMBERT P., CESAR-LCPC, un code général de calcul par éléments finis, *Bulletin de liaison des laboratoires des Ponts et Chaussées*, **160**, mars-avril **1989**, pp. 112–116.

