

Claude-Henri LAMARQUE \*  
Franziska SCHMIDT  
ENTPE, LGM, URA CNRS 1652

## Un indicateur pour optimiser les calculs trajectographiques

### ■ RÉSUMÉ

Pour les systèmes dynamiques réguliers, la connaissance de la jacobienne du mouvement peut permettre d'estimer la divergence de trajectoire issue de deux points distincts, via la formule des accroissements finis. Elle permet ainsi de quantifier l'influence de conditions initiales ou de paramètres incertains. Pour les systèmes non réguliers comme la chute de blocs rocheux, une telle écriture exacte n'est pas possible dans le cas général, mais on peut définir un indicateur approché appelé ici « indicateur de variation tangente de la trajectoire ». Son expression est obtenue à l'aide de développements infinitésimaux au premier ordre du problème. Il permet ainsi d'estimer la variation de trajectoire non régulière pour deux points initialement proches (en conditions initiales et/ou en paramètres). Lors de calculs sur grille, la finesse de la maille (maille en conditions initiales, en paramètres ou en temps) peut alors être estimée, même localement. L'expression de cet indicateur est donnée ici dans le cas où seules les conditions initiales sont incertaines, puis dans celui où les paramètres le sont également. Cet outil est ensuite appliqué à une modélisation très simple de la chute de blocs sur une pente.

### Use of an indicator for optimizing trajectory calculations

### ■ ABSTRACT

*For smooth dynamic systems, knowing the Jacobian of the movement can help estimate the divergence of trajectories emanating from two distinct points, via the finite increment equation. This step allows quantifying the influence of initial conditions or uncertain parameters. For nonsmooth systems, e.g. rockfalls, such a precise quantification proves impossible in the general case, yet an approximated indicator, herein called the "indicator of tangent variation", can still be defined. Its expression is obtained by means of infinitesimal developments at the first order of the problem, which yields an estimation of the non-regular trajectory variation for two initially-proximate points (in terms of initial conditions and/or parameters). During grid calculations, the level of mesh refinement (mesh of initial conditions, of parameters or time) can then be estimated, even locally. The expression of this indicator is given in the case where just the initial conditions are uncertain, and then in the case where parameters are also uncertain. This tool has then been applied to a very simple model of rocks falling on a slope.*

\* AUTEUR À CONTACTER :

Claude-Henri LAMARQUE  
lamarque@entpe.fr

## INTRODUCTION

Les calculs de trajectoires de blocs rocheux sont réalisés à l'aide de valeurs numériques incertaines ; ainsi, les conditions initiales en position et en vitesse du bloc ne sont pas connues précisément. De plus, les valeurs numériques de certains paramètres, dépendant de la modélisation ou non, sont aléatoires : les coefficients de restitution lors du rebond ou la masse par exemple.

Pour tenir compte de ces incertitudes, des calculs sur grilles sont réalisés. C'est pour cela qu'avec le développement de l'informatique les outils de calcul des trajectoires de blocs rocheux se sont perfectionnés depuis 30 ans. Cependant tous les modèles mécaniques et les traitements numériques correspondants utilisent le cadre mathématique des systèmes dynamiques non réguliers [1]. Cela signifie que :

- ces modèles sont non linéaires ;
- il y a perte de régularité mathématique pour l'expression et les solutions du problème.

Ces deux éléments ont des conséquences pour les applications où les calculs sont effectués sur des grilles (grille de paramètres, grille de conditions initiales) : peut-on être sûr que les indications données par les trajectoires (et les vitesses) issues des points de la grille sont les pires possibles ? En d'autres termes, n'existe-t-il pas un point intérieur aux mailles de la grille tel que, si un mur positionné en bas d'une pente arrête toutes les trajectoires issues des nœuds de la grille, il n'arrête pas celle issue de ce point-là ?

Pour les systèmes réguliers, une formule de type « accroissements finis » peut permettre, en estimant la jacobienne (régulière) du système, d'introduire un coefficient de sécurité par rapport aux calculs sur la grille ou de dimensionner la maille de la grille pour obtenir une erreur maximale sur les calculs issus de n'importe quelle condition initiale.

Dans le cas des systèmes non réguliers, la jacobienne n'est plus définie. Il faut trouver une méthode alternative. Plusieurs ont été développées (voir [2] par exemple). Ces méthodes assignent alors une valeur au paramètre incertain : cette dernière peut être aléatoire ou varier uniformément autour d'une valeur moyenne. À l'aide de calculs informatiques lourds et longs, plusieurs types d'information sont obtenues, par exemple la moyenne et l'écart-type de la longueur de la trajectoire, des hauteurs de bonds, du nombre de bonds, etc. Ainsi la modélisation de chute de blocs a connu de nombreuses améliorations [3-6], qui se heurtent toutefois à l'aléa inhérent au problème : incertitudes sur les géométries et les valeurs des paramètres. L'estimation de la sensibilité des modèles aux conditions initiales et aux paramètres constitue un raffinement des calculs.

On propose ici d'introduire un indicateur de la divergence tangente de trajectoires sur la grille ; il s'agit d'un majorant construit à partir de la notion d'exposant de Lyapunov, par exemple en suivant Muller [7]. Il permet deux sortes d'analyses : d'un côté, il détermine la différence de trajectoire après  $n$  rebonds pour deux blocs ayant des conditions initiales ou des paramètres différents mais proches. *A contrario*, cet indicateur permet également d'affiner une grille de calcul, même localement, en fonction d'une précision de calcul ou d'un coefficient de sécurité souhaités.

Idéalement, on souhaiterait obtenir l'analogue d'une formule des accroissements finis, ce qui n'est pas le cas ici.

## FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS DANS LE CAS RÉGULIER ET DIVERGENCE TANGENTE DANS LE CAS IRRÉGULIER

Pour les systèmes mécaniques réguliers, la formule des accroissements finis s'écrit, pour  $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  par exemple :

$$\forall X_0 \in \mathbb{R}^n, \forall h \in \mathbb{R}^n, \|f(X_0 + h) - f(X_0)\| \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial X_0}(X_0) \right\| \cdot \|h\|, \quad (1)$$

où  $\frac{\partial f}{\partial X_0}(X_0)$  est la jacobienne de  $f$  évaluée au point  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $h$  un incrément (la taille de la maille par exemple).

Si on sait borner  $\left\| \frac{\partial f}{\partial X_0}(X_0) \right\|$  pour l'ensemble des  $X_0$  considérés, il est alors possible, pour une maille  $h$  considérée, de déterminer l'erreur réalisée  $\|f(X_0 + h) - f(X_0)\|$ . Réciproquement, en se fixant une valeur limite de l'erreur, la maille maximale à utiliser peut être déterminée afin que l'erreur réalisée ne lui soit pas supérieure.

Ce genre de calculs a donc deux buts :

- déterminer l'erreur d'approximation en fonction de la taille de la maille ;
- déterminer la taille de la maille en fonction de l'erreur maximale fixée et « sécuriser » les calculs du modèle.

Pour les systèmes mécaniques non réguliers, on ne dispose pas d'une estimation aussi commode. On propose de la remplacer par un indicateur ayant un sens proche. Par définition, le plus grand exposant de Lyapunov [8, 9] peut servir de base à la construction d'un tel indicateur :

$$\bar{\lambda} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x(t)\|}{\|\delta x_0\|}. \quad (2)$$

Pour une équation différentielle linéaire du type  $\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t), t > 0 \\ X(0) = X_0 \in (R)^n \end{cases}$ , la solution s'écrit

$X(t) = e^{t.A}.X_0$  et cet exposant correspond à la plus grande valeur propre de  $A$  qui régit à la fois l'écart entre deux trajectoires initialement proches et l'influence des paramètres de  $A$  sur cet écart.

En théorie, il mesure la divergence tangente à l'infini en temps de deux trajectoires infiniment proches en conditions initiales. En pratique, il mesure cela à un horizon fini. Alors, à tout instant  $t > 0$  :

$$\bar{\lambda}(t) = \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x(t)\|}{\|\delta x_0\|}. \quad (3)$$

En fait, on propose simplement dans un premier temps de majorer  $\frac{\|\delta x(t)\|}{\|\delta x_0\|}$ , c'est-à-dire de majorer

la norme de l'opérateur tangent. Pour cela, on calcule un indicateur (une norme de l'indicateur tangent généralisé) qui permet de quantifier la variation locale tangente infinitésimale (par rapport à des conditions initiales et/ou des paramètres). En pratique, pour une maille de grille petite, on conjecture que cette quantification peut jouer un rôle similaire à celui d'une formule d'accroissements finis en améliorant la confiance que l'on fait aux calculs sur la grille. Ceci permet d'estimer la différence de trajectoire à un instant  $t$  de deux points initialement proches (en conditions initiales ou en temps). Ainsi, en connaissant la divergence initiale (en position, vitesse ou paramètres), il est possible d'estimer cette même divergence à l'instant  $t$ . De même, en fixant cette dernière inférieure à une certaine valeur à l'instant  $t$ , il est possible d'estimer la divergence initiale maximale et donc la maille de la grille.

Une pseudo-jacobienne pour ces systèmes non réguliers est ainsi introduite, en utilisant des matrices de passage et de saut à chaque évènement non régulier des trajectoires. Le concept de matrices de saut et de passage est d'abord présenté. On étudie ensuite un modèle très simple de chutes de blocs ponctuels le long d'une pente, pour montrer le profit pour les applications de cet indicateur, et illustrer le type de travail à effectuer pour l'adapter à des modèles plus complexes utilisés dans les applications.

## EXPRESSION DE LA PSEUDO-JACOBienne ET DE L'INDICATEUR

Il existe divers formalismes pour modéliser les systèmes mécaniques non réguliers : on peut citer les inclusions différentielles, le formalisme d'Ivanov [10], les formulations de J.-J. Moreau [11],

utilisés pour divers logiciels (LMGC90), les travaux de M. Frémond et É. Dimnet [12, 13]. Pour le traitement mathématique de ces systèmes, le lecteur est renvoyé par exemple aux travaux de L. Paoli (impacts, [14]), J. Bastien (friction en déterministe, [15]), F. Bernardin (friction en stochastique, [16]) pour les inclusions et à l'ouvrage de Brogliato [1] pour un aperçu général synthétique.

Dans cet article, le formalisme du problème est aussi élémentaire que possible et la modélisation utilise la loi de restitution de Newton. Le comportement d'un système mécanique non régulier peut alors se décomposer en deux parties : celle où le comportement est analogue à celui d'un système mécanique régulier, donc régi par une équation différentielle, et celle où se produit la discontinuité, localisée en temps.

Dans le cas considéré, on modélise ceci par les relations :

$$\begin{aligned} (t_0 \leq) t < t_1 : \quad \dot{X} &= f_1(X, t, \mu), X(t_0) = X_0, f_1 \in C^1, \\ t = t_1 : \quad 0 &= h(X(t_1, \mu), t_1, \mu), h \in C^1, \\ X(t_1^+) &= g(X(t_1^-, \mu), t_1, \mu), g \in C^1, \\ t_1 < t < t_2 : \quad \dot{X} &= f_2(X, t, \mu), X(t_1) = X(t_1^+), f_2 \in C^1. \end{aligned} \quad (4)$$

$X$  représente les paramètres d'espace (position, vitesse), les paramètres sont notés  $\mu$  et  $t$  est le temps.  $t_0$  est alors l'instant initial,  $t_1$  celui de la première discontinuité,  $t_2$  celui de la deuxième (si elle a lieu) ;  $h(X, t, \mu)$  est appelée fonction indicatrice de la discontinuité,  $g(X, t, \mu)$  est la fonction de passage ;  $f_1$  et  $f_2$  sont les fonctions décrivant le comportement du système respectivement entre  $t_0$  et  $t_1$  et entre  $t_1$  et  $t_2$ , ce qui correspond par exemple au cas de la friction. Dans les exemples traités plus loin, on se restreint au cas :

$$f_1(X, t, \mu) = f_2(X, t, \mu) = f(X, t, \mu).$$

Si on considère des conditions initiales et des paramètres légèrement perturbés :

$$\begin{aligned} \bar{X}(t_0) &= X_0 + \delta X_0, \\ \bar{\mu}(t_0) &= \mu_0 + \delta \mu_0, \end{aligned} \quad (5)$$

l'instant de la discontinuité sera aussi perturbé :

$$\bar{t}_1 = t_1 + \delta t_1. \quad (6)$$

$\bar{t}_1$  est l'instant de la discontinuité de la trajectoire perturbée.

En supposant que le comportement du système, dont les conditions initiales et les paramètres ont été modifiés, est structurellement le même que celui du système original (hypothèse légitime ici puisque les variations sont supposées très faibles lors de calculs sur grille), on obtient le comportement de  $\delta X$ , tous les calculs étant explicités dans l'annexe A.

Avant la première discontinuité, donc pour  $(t_0 \leq) t < t_1$  :

$$\delta \dot{X} = F_{1X}(X, t, \mu) \cdot \delta X + F_{1T}(X, t, \mu) \cdot \delta t_0 + F_{1\mu}(X, t, \mu) \cdot \delta \mu_0, \quad (7)$$

avec :

$$\begin{cases} F_{1X}(X, t, \mu) = \frac{\partial f_1}{\partial X^T} \Big|_{X, t, \mu}, \\ F_{1T}(X, t, \mu) = \frac{\partial f_1}{\partial t} \Big|_{X, t, \mu}, \\ F_{1\mu}(X, t, \mu) = \frac{\partial f_1}{\partial \mu^T} \Big|_{X, t, \mu}. \end{cases} \quad (8)$$

Lors de la discontinuité pour  $t = t_1$ , la divergence de trajectoire subit un saut :

$$\begin{aligned}\delta X_1^+ &= G_X(X_1^-, t_1, \mu) \delta X_1^- \\ &+ \left[ G_X(X_1^-, t_1, \mu) \cdot f(X_1^-, t_1, \mu) + G_T(X_1^-, t_1, \mu) - f_2(X_1^+, t_1, \mu) \right] \delta t_1 \\ &+ G_T(X_1^-, t_1, \mu) \delta t_0 + G_\mu(X_1^-, t_1, \mu) \delta \mu_0.\end{aligned}\quad (9)$$

avec :

$$\begin{cases} G_X(X_1^-, t_1, \mu) = \frac{\partial g}{\partial X^T} \Big|_{X_1^-, t_1, \mu}, \\ G_T(X_1^-, t_1, \mu) = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{X_1^-, t_1, \mu}, \\ G_\mu(X_1^-, t_1, \mu) = \frac{\partial g}{\partial \mu^T} \Big|_{X_1^-, t_1, \mu}. \end{cases}\quad (10)$$

$\delta X_1^+$  est la divergence après la discontinuité,  $\delta X_1^-$  est celle d'avant le saut.

Après la discontinuité ( $t > t_1$ ), on a à nouveau :

$$\delta \dot{X} = F_{2X}(X, t, \mu) \delta X + F_{2T}(X, t, \mu) \delta t_0 + F_{2\mu}(X, t, \mu) \delta \mu_0, \quad (11)$$

avec :

$$\begin{cases} F_{2X}(X, t, \mu) = \frac{\partial f_2}{\partial X^T} \Big|_{X, t, \mu}, \\ F_{2t}(X, t, \mu) = \frac{\partial f_2}{\partial t} \Big|_{X, t, \mu}, \\ F_{2\mu}(X, t, \mu) = \frac{\partial f_2}{\partial \mu^T} \Big|_{X, t, \mu}. \end{cases}\quad (12)$$

Dans ce qui suit, on considère  $f_1(X, t, \mu) = f_2(X, t, \mu) = f(X, t, \mu)$  ; cela est suffisant pour les applications qui en sont faites. Le comportement de la divergence infinitésimale est donc différent selon la phase de trajectoire considérée. En particulier, lors d'une phase de chute libre, la divergence infinitésimale de comportement régulier du système mécanique entre une discontinuité  $i$  et la suivante  $(i + 1)$  peut être modélisée simplement par :

$$\delta \dot{X} = F(X, t, \mu) \delta X, \quad \delta X(t_i) = \delta X_i^+. \quad (13)$$

Ainsi, en intégrant entre  $t_i^+$  et  $t_{i+1}^-$ , on peut écrire :

$$\delta X_{i+1}^- = J_i \cdot \delta X_i^+. \quad (14)$$

$J_i$  est appelée matrice de passage.

Pourtant, pour étudier le comportement de cette divergence lors d'une discontinuité, plusieurs cas peuvent être distingués selon que  $(\delta t_0, \delta \mu_0) = (0, 0)$  ou non.

### ■ Cas où $\delta t_0 = 0$ et $\delta \mu_0 = 0$

On se restreint dans cette partie au cas où  $\delta \mu_0 = 0$  et  $\delta t_0 = 0$  (la valeur numérique des paramètres est fixe et connue, ainsi que l'origine des temps). Seules les conditions initiales en espace sont supposées aléatoires. Dans ce cas, il existe une matrice de saut explicite permettant le passage entre  $\delta X_i^-$  et  $\delta X_i^+$ .

Cette matrice s'écrit :

$$\delta X_i^+ = S_i \cdot \delta X_i^-,$$

avec :

$$S_i = G(X_i^-, t_i, \mu) - \left[ G_X(X_i^-, t_i, \mu) \cdot f(X_i^-, t_i, \mu) - f(X_i^+, t_i, \mu) + G_T(X_i^-, t_i, \mu) \right] \times \left[ H_X(X_i^-, t_i, \mu) \cdot f(X_i^-, t_i, \mu) + H_T(X_i^-, t_i, \mu) \right]^{-1} \cdot H_X(X_i^-, t_i, \mu). \quad (15)$$

$S_i$  est appelée matrice de saut pour la discontinuité  $i$ .

La pseudo-jacobienne du mouvement peut alors être évaluée suivant une formule du type :

$$J = \prod_{i=1}^N J_{N-1} S_{N-1} J_0, \quad (16)$$

où  $N$  est le nombre de discontinuités par période (qui peut être infinie).

Le but est alors de borner commodément la norme de  $J$ , et de la retenir comme indicateur de « divergence » sur la grille.

L'estimateur lié à la pseudo-jacobienne peut être défini comme suit. Soit un système mécanique non régulier :

$$\begin{aligned} \forall t \neq t_i, \quad \dot{X} &= f(X, t, \mu), \\ \forall t_i \text{ tel que } h(X, t_i, \mu) &= 0, \quad g(X, t_i, \mu) = 0, \\ f, g, h &\in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (17)$$

$n$  est alors le nombre de variables d'espace,  $s$  est le nombre de paramètres.

Soit  $J = \prod_{i=1}^N J_{N-i} S_{N-i} J_0$  la pseudo-jacobienne du mouvement,  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $h(X, t_i, \mu) = 0$ .

Alors :

a) **Si  $N$  est fini :**

L'estimateur proposé est donné par :

$$\chi = \|J\| = \left\| \prod_{i=1}^N J_{N-i} S_{N-i} J_0 \right\| \leq \|J_0\| \cdot \prod_{i=1}^N \|J_i\| \cdot \|S_i\|. \quad (18)$$

b) **Si  $N$  est infini :**

Si  $\forall i \in \mathbb{N}^*, \|J_i\| \cdot \|S_i\| \leq 1$  ou si  $\forall i \in \mathbb{N}^*, \|J_i \cdot S_i\| \leq 1$  :

L'estimateur retenu est  $\chi = \|J_0\|$ .

**Remarque :**

– On ne donne qu'une borne commode à calculer en n'étudiant que les événements pris séparément. Par exemple, si le nombre de discontinuités est infini et que les normes des matrices de saut et de passage et des jacobienues ne sont pas toutes inférieures à 1, il faudrait procéder différemment pour espérer avoir un indicateur meilleur. Ainsi, l'indicateur proposé ne débouche pas exactement sur le calcul d'un exposant de Lyapunov, mais sur une borne plus commode à obtenir.

– Le cas 1 est illustré ci-dessous par le paragraphe sur l'impact de blocs ponctuels sur une pente.

### ■ Cas où $\delta t_0 \neq 0$ ou $\delta \mu_0 \neq 0$

Si on n'a pas  $\delta t_0 = 0$  et  $\delta \mu = 0$ , la matrice de saut ne peut plus être explicitée aussi simplement. Les développements théoriques sont exposés dans l'annexe B. On peut néanmoins définir un estimateur dans le cas des conditions initiales (espace et temps) et des paramètres aléatoires comme suit. Soit un système mécanique non régulier :

$$\begin{aligned} \forall t \neq t_i, \quad \dot{X} &= f(X, t, \mu), \\ \forall t_i \text{ tel que } h(X, t_i, \mu) &= 0, \quad g(X, t_i, \mu) = 0, \\ f, g, h &\in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (19)$$

$n$  est alors le nombre de variables d'espace,  $s$  est le nombre de paramètres.

Soit  $S_{1i} = G_X(X_i^-, t_i, \mu) - C.A^{-1}.H_X(X_i^-, t_i, \mu)$  et  $S_1$  tel que :  $\forall i, \|S_{1i}\| \leq S_1$ .

Soit  $S_{2i} = -C.A^{-1}.B + D$  et  $S_2$  tel que :  $\forall i, \|S_{2i}\| \leq S_2$ .

Soit  $R$  tel que :  $\forall i, \|J_i\| \leq R$ .

L'indicateur retenu est alors :

$$\chi = (S_1.R)^i \cdot \|\delta X_0\| + S_2 \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (S_1.R)^j. \quad (20)$$

Les constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont définies dans l'annexe B.

#### Remarque :

Ici, comme auparavant, ceci est une borne pour l'estimation de la divergence de trajectoire. En effet, la condition (58), donnée en annexe, est très restrictive. Si elle est trop grossière, il peut être nécessaire de réaliser la majoration à l'aide de la formule générale (56) obtenue par récurrence.

L'utilisation de cet indicateur  $\chi$  est alors très simple. En effet,  $\frac{\|\delta X_i^+\|}{\|\delta X_0\|} \leq \chi$ . Donc, la connaissance de  $\chi$  permet bien sûr de borner  $\|\delta X_i^+\|$  en fonction de  $\|\delta X_0\|$ , mais il est également possible de déterminer  $\|\delta X_0\|$  pour que  $\|\delta X_i^+\|$  soit inférieure à une valeur limite.

L'indicateur de divergence tangente est maintenant appliqué au problème de la chute de blocs ponctuels sur une pente, en utilisant une modélisation très simple.

## CHUTE D'UN BLOC SUR UNE PENTE D'ANGLE CONSTANT

### ■ Modélisation du problème

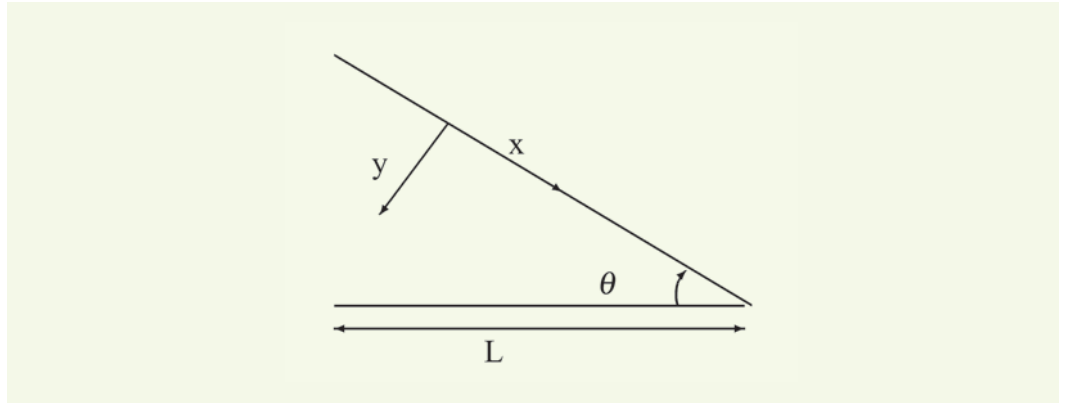
La modélisation utilisée ici pour le problème physique est très simple : le bloc est considéré comme un point ponctuel de masse  $m$ . Par conséquent, on ne tient pas compte des phénomènes de rotation et de glissement.

La figure 1 montre la modélisation utilisée du problème.

L'angle de la pente est noté  $\theta$ , alors que la longueur de celui-ci est  $L$ .  $\alpha$  et  $\beta$  sont les coefficients de restitution normal et tangentiel.

**figure 1**

Modélisation du problème  
de la chute de blocs  
le long d'une pente.



On pose :  $X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ . Donc l'équation du mouvement est :

$$\dot{X} = f(X, t) = \begin{bmatrix} x_2 \\ g \sin(\theta) \\ x_4 \\ g \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

On utilise les deux constantes de restitution suivantes :

$$\begin{cases} V_{rx} = \alpha V_{ix} \quad (\alpha > 0), \\ V_{ry} = \beta V_{iy} \quad (\beta < 0). \end{cases} \quad (22)$$

Les valeurs des constantes  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être prises en adéquation avec des valeurs physiques utilisées pour des calculs de trajectoires de blocs de pierre sur pente. Elles peuvent dépendre par exemple de la pente, de la nature du sol et de la nature du bloc en chute.

Les fonctions indicatrice et de passage sont :

$$h(X) = x_3 = 0,$$

et

$$g(X) = \begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_2^+ \\ x_3^+ \\ x_4^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^- \\ \alpha x_2^- \\ x_3^- \\ \beta x_4^- \end{pmatrix} \quad (23)$$

#### Remarque :

Dans ce cas où les équations du mouvement, les fonctions indicatrice et de passage sont polynômiales par rapport aux variables  $X$ ,  $t$  et  $\mu$ , il est possible d'exprimer une réelle jacobienne du mouvement car les développements utilisés sont alors exacts. On aurait :

$$\forall Z_1 \in \mathbb{R}^n, \forall Z_2 \in \mathbb{R}^n, \|f(Z_2) - f(Z_1)\| \leq \|J\| \cdot \|Z_2 - Z_1\|.$$

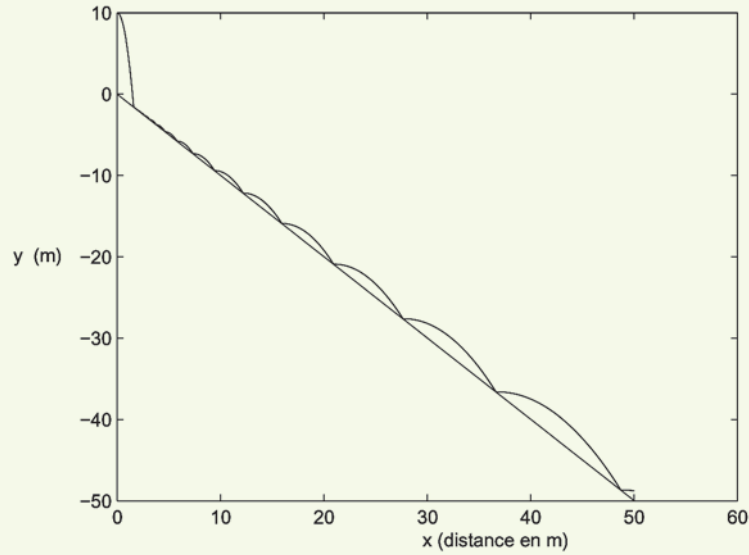
Pourtant, on se borne ici à estimer l'indicateur tel qu'il a été présenté dans les sections précédentes.

Une trajectoire typique, obtenue avec cette modélisation, est représentée sur la **figure 2**.



**figure 2**

Trajectoire déterministe  
d'un bloc de pierre sur  
une pente et obtenue avec  
la modélisation présentée  
( $x_0 = 0$  m,  $\dot{x}_0 = 1$  m.s<sup>-1</sup>,  
 $y_0 = -10$  m,  $\dot{y}_0 = 0$  m.s<sup>-1</sup>,  
 $\theta = 0,88$  rad,  $L = 25$  m,  
 $\alpha = 0,7071$ ,  $\beta = -0,1732$ ).



On suppose que, dans une démarche d'ingénieur, les plages de variation des conditions initiales et des paramètres sont déterminées. Le cas où seules les conditions initiales sont incertaines va d'abord être étudié, avant d'élargir l'étude au cas où les paramètres sont également inconnus.

#### ■ Cas où $\delta t_0 = 0$ et $\delta \mu_0 = 0$

Dans ce cas, en appliquant les résultats du paragraphe précédent :

$$\begin{aligned}
 t_0 \leq t < t_1 : \quad \delta \dot{X} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta X, \delta X(t_0) = \delta X_0, \\
 t = t_1 : \quad H1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 G1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \delta t_1 = \frac{\delta x_3(t_1^-)}{x_4(t_1^-)}, \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\delta X^+ = \begin{bmatrix} \delta x_1^- - (\alpha + 1) \frac{x_2(t_1^-)}{x_4(t_1^-)} \delta x_3^- \\ \alpha \delta x_2^- + (1 - \alpha) g \sin(\theta) \frac{\delta x_3^-}{x_4(t_1^-)} \\ \delta x_3^- + (\beta - 1) \delta x_3^- \\ \beta \delta x_4^- + (1 - \beta) g \cos(\theta) \frac{\delta x_3^-}{x_4(t_1^-)} \end{bmatrix}$$

$$t > t_1 : \delta \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta X, \delta X(t = t_1) = \delta X^+. \quad (25)$$

On en déduit la matrice de passage :

$$J_i = \begin{bmatrix} 1 & T_i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

où :  $T_i = t_i - t_{i-1}$ .

La matrice de saut s'écrit :

$$S_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(\alpha+1)\frac{x_2(t_i^-)}{x_4(t_i^-)} & 0 \\ 0 & \alpha & (1-\alpha)\frac{g \sin(\theta)}{x_4(t_i^-)} & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & (1-\beta)\frac{g \cos(\theta)}{x_4(t_i^-)} & \beta \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Le cas où  $\delta t$  devient infini n'est pas pénalisant.

En effet,  $\delta t$  devient infini lorsque :

$$x_4(t_i^-) = 0 \Leftrightarrow x_4(t_{i-1}^+) = 0. \quad (28)$$

Alors avec la loi de restitution qui a été choisie, il faut exclure le cas :

$$x_4(t_0^+) = \dot{y}_0 = 0 \text{ et } y_0 = 0. \quad (29)$$

En effet, si ce cas est exclu, c'est-à-dire si  $\dot{y}_0 \neq 0$  ou  $y_0 \neq 0$ , même en itérant il ne pourra jamais y avoir  $x_4(t) = 0$ . L'ensemble  $(x_1(t_i^-), x_2(t_i^-), x_3(t_i^-), x_4(t_i^-))$  est entièrement compris dans l'ensemble  $(x_1(t_{i-1}^+), x_2(t_{i-1}^+), x_3(t_{i-1}^+), x_4(t_{i-1}^+))$ .

De plus, le cas d'une infinité d'impacts (dans lequel, même si  $\dot{y}_0 \neq 0$ ,  $\dot{x}_4 \rightarrow 0$  est impossible ici avec la modélisation qui a été utilisée, si  $L$  est fini et la pente assez conséquente (supérieure à 45 degrés).

On utilise la norme subordonnée :

$$\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|, \quad (30)$$

car commode pour les calculs (il convient toutefois de s'en méfier pour l'interprétation géométrique).

On obtient immédiatement pour la matrice de passage :

$$\|J_i\| = \max\{1, 1 + T_i\} = 1 + T_i \leq 1 + T \quad (31)$$

où  $T$  représente la « période » du mouvement, donc ici l'horizon en temps. En ce qui concerne la matrice de saut, le calcul est moins évident. Tout d'abord, plusieurs hypothèses sont faites :  $y_0 \leq 0$

(il n'y a pas de poinçonnement) et  $\frac{-\alpha}{\beta} \geq 1$  (la restitution tangentielle est plus importante que la

restitution normale). De plus, on appelle  $N_i$  le nombre maximal de sauts réalisés par le bloc. La norme infinie de la matrice de saut peut alors être majorée indépendamment de  $i$  (pour le détail des calculs, voir l'annexe D) :

Si  $\tan(\theta) \left( -\dot{y}_0 + \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)} \right) + \dot{x}_0 \geq 0$  :

$$\|S_i\| = \max \left\{ \begin{array}{l} 1 + (1 + \alpha) \left[ \left( -\frac{\alpha}{\beta} \right)^{N_i} \cdot \frac{\tan(\theta) \left( -\dot{y}_0 + \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)} \right) + \dot{x}_0}{\sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)}} \right] \\ \alpha + (1 - \alpha) \frac{g \sin(\theta)}{(-\beta)^{N_i-1} \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)}} \\ \beta + (1 - \beta) \frac{g \cos(\theta)}{(-\beta)^{N_i-1} \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)}} \\ \beta \end{array} \right\} \quad (32)$$

Si  $\tan(\theta) \left( -\dot{y}_0 + \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)} \right) + \dot{x}_0 \leq 0$  :

$$\|S_i\| = \max \left\{ \begin{array}{l} 1 - (1 + \alpha) \left[ \frac{\tan(\theta) \left( -\dot{y}_0 + \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)} \right) + \dot{x}_0}{\sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)}} \right] \\ \alpha + (1 - \alpha) \frac{g \sin(\theta)}{(-\beta)^{N_i-1} \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)}} \\ \beta + (1 - \beta) \frac{g \cos(\theta)}{(-\beta)^{N_i-1} \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)}} \\ \beta \end{array} \right\} \quad (33)$$

Sachant que  $N_i$  est fini, ainsi que les deux normes  $\|J_i\|$  et  $\|S_i\|$  ( $\forall i$ ), il est possible de majorer la norme  $\|J\|$  de la pseudo-jacobienne. En effet, en notant  $R = \|J_i\|$  et  $S = \|S_i\|$ , on a alors :

$$\|J\| \leq \chi = R^{N_i+1} \cdot S^{N_i} \quad (34)$$

#### Remarque :

- La formule (66) de majoration du nombre d'impacts (voir annexe C) peut parfois se révéler être trop grossière. Il suffit alors de calculer la distance des différents bonds successifs et d'en déduire le nombre effectué. Le nombre d'impacts est ainsi obtenu très facilement.
- Cette même formule dépend de conditions initiales et de paramètres qui peuvent être imprécis. Il s'agit alors de choisir les valeurs numériques les plus contraignantes pour calculer le nombre maximum d'impacts.

Alors, pour a et b deux points voisins de la grille des conditions initiales en espace, leur divergence de trajectoire en fin de pente pourra être évaluée par une formule du type :

$$\|Z(b) - Z(a)\| \approx \|dZ\| \cdot |b - a| \leq \chi \cdot |b - a|.$$

La finesse de la maille peut ainsi être évaluée facilement (suffisante ou non, selon la précision souhaitée).

#### ■ Cas où $\delta t_0 \neq 0$ ou $\delta \mu_0 \neq 0$

Le problème est modélisé comme auparavant, mais on choisit ici le vecteur de paramètres imprécis

$$\text{égal à : } \mu = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$(t_0 \leq) t < t_1 : \delta \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta \mu_0,$$

$$t = t_1 : \delta t = -\frac{\delta x_3^-}{x_4^-} \quad (35)$$

$$\delta X^+ = \begin{bmatrix} \delta x_1^- - (\alpha + 1) \frac{x_2^-}{x_4^-} \delta x_3^- \\ \alpha \delta x_2^- + (1 - \alpha) g \sin(\theta) \frac{\delta x_3^-}{x_4^-} \\ \delta x_3^- + (\beta - 1) \delta x_3^- \\ \beta \delta x_4^- + (1 - \beta) g \cos(\theta) \frac{\delta x_3^-}{x_4^-} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_2^- & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & x_4^- \end{bmatrix} \cdot \delta \mu_0.$$

On obtient de ceci les relations de passage de  $\delta X_{i-1}^+$  à  $X_i^-$  et de  $X_i^-$  à  $X_i^+$  :

$$\delta X_i^- = \begin{bmatrix} 1 & t_i - t_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_i - t_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \delta X_{i-1}^+,$$

$$\delta X_i^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(\alpha + 1) \frac{x_2^-}{x_4^-} & 0 \\ 0 & \alpha & (1 - \alpha) \frac{g \sin(\theta)}{x_4^-} & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \beta) \frac{g \cos(\theta)}{x_4^-} & \beta \end{bmatrix} \cdot \delta X_i^- + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_2^- & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & x_4^- \end{bmatrix} \cdot \delta \mu_0. \quad (36)$$

### ■ Majoration de la divergence de trajectoire en fonction des divers paramètres du système

Pour cela, on majore le système d'équations (36) où les conditions initiales et les paramètres sont supposés aléatoires. En effet, il est ensuite aisé de retrouver le cas plus simple décrit dans le paragraphe « Cas où  $\delta t_0 = 0$  et  $\delta \mu_0 = 0$  ». Les développements analytiques ont été reportés dans l'annexe D.

On calcule une norme subordonnée pour les matrices intervenant dans les relations de passage.

Comme auparavant, on adopte  $\|M\| = \sup_i \sum_{j=1}^n |m_{ij}|$ .

Les conditions initiales sont supposées bornées : par exemple, que  $x_0 \in [x_{01}, x_{02}]$ ,  $\dot{x}_0 \in [\dot{x}_{01}, \dot{x}_{02}]$ ,  $y_0 \in [y_{01}, y_{02}]$ ,  $\dot{y}_0 \in [\dot{y}_{01}, \dot{y}_{02}]$ ,  $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$  et  $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ .

On a alors logiquement  $y_{01} \leq 0$  et  $y_{02} \leq 0$ .

De même, d'après leur définition,  $\alpha \geq 0$  et  $\beta \leq 0$ , donc :  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$  et  $\beta_1 \leq 0$ ,  $\beta_2 \leq 0$ .

Mais on suppose également pour la simplicité des calculs  $\dot{y}_{01} \leq 0$  et  $\dot{y}_{02} \leq 0$ .

Lors d'un seul impact, la précision de la maille à utiliser pourra être déduite de :

$$\begin{aligned}\|\delta X_1^-\| &\leq E_1 \cdot \|\delta X_0\|, \\ \|\delta X_1^+\| &\leq E_1 \cdot F_1 \cdot \|\delta X_0\| + G \cdot \|\delta \mu_0\|.\end{aligned}\tag{37}$$

De plus, pour n impacts :

$$\|\delta X_n^+\| \leq F \cdot E \cdot \|\delta X_{n-1}^+\| + G \cdot \|\delta \mu_0\| \leq (F \cdot E)^{n-1} \|\delta X_1^+\| + G \cdot \|\delta \mu_0\| \cdot \sum_{j=0}^{n-2} (F \cdot E)^j,$$

Donc :

Si  $F \cdot E = 1$  :

$$\|\delta X_n^+\| \leq (E \cdot F)^{n-1} \cdot F_1 \cdot E_1 \cdot \|\delta X_0\| + (n-1) \cdot G \cdot \|\delta \mu_0\|,$$

Si  $F \cdot E \neq 1$  :

$$\|\delta X_n^+\| \leq (E \cdot F)^{n-1} \cdot F_1 \cdot E_1 \cdot \|\delta X_0\| + G \cdot \frac{1 - (E \cdot F)^n}{1 - E \cdot F} \cdot \|\delta \mu_0\|.$$

Les constantes  $E_1$ ,  $E$ ,  $F_1$ ,  $F$  et  $G$  sont définies dans l'annexe D.

## APPLICATION ET UTILISATION DE L'INDICATEUR

On a donné l'expression de la pseudo-jacobienne. Ceci permet d'estimer la finesse des calculs sur grille nécessaire pour obtenir une certaine précision  $\varepsilon$  en considérant comme valide l'approximation :

$$\|\delta X_n^+\| \sim \|J \cdot \delta Y_0\| \leq \chi \cdot \|\delta Y_0\| \approx \varepsilon \quad \text{où} \quad Y_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix}.$$

La maille à utiliser pour obtenir une erreur inférieure à une certaine valeur (faible) peut donc être calculée simplement et rapidement.

Ainsi, si un calcul sur grille préconise un ouvrage de protection de hauteur  $h_{\max}$ , la divergence de trajectoire entre deux points de la grille peut être calculée. On aura :

$$h \leq h_{\max} + \|\delta X_n^+\|.$$

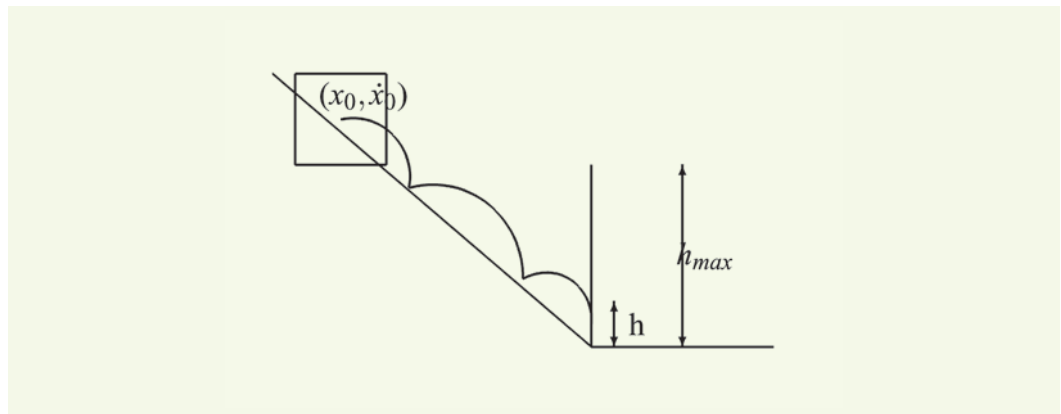
Il est alors possible de raffiner cette grille pour que, pour  $\varepsilon$  donné, pour tout point, on ait (cf. figure 3) :

$$h \leq h_{\max} + \varepsilon$$

Pour ceci, on suppose que les calculs numériques sur grille ont été réalisés avec un grand nombre de points sur la grille.

**figure 3**

*Problématique de la protection de personnes et de biens à l'aide d'un dispositif passif.*



On utilise la formule (66) qui donne le nombre maximal d'impacts (voir annexe C), et on compare alors ces résultats à ceux obtenus numériquement.

Pour cela, on considère par exemple les valeurs numériques suivantes :  $x_0 = 0 \text{ m}$ ,  $\dot{x}_{01} = 0 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\dot{x}_{02} = 1 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $y_{01} = -10 \text{ m}$ ,  $y_{02} = -9 \text{ m}$ ,  $\dot{y}_{01} = -2 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\dot{y}_{02} = -0,5 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\beta_1 = -0,22$ ,  $\beta_2 = -0,17$ ,  $\alpha_1 = 0,69$ ,  $\alpha_2 = 0,82$ ,  $\theta = 0,88 \text{ rad}$ ,  $L = 25 \text{ m}$ . Alors  $N_1 \leq 3$  (d'après la formule (66)).

On calcule les majorations des indicateurs de  $\|\delta X_1^+\|$ ,  $\delta X_2^+$  et  $\|\delta X_3^+\|$  (formule (37)), pour différentes valeurs de la maille (0, 0,1 et 0,01), pour la majoration indépendante de  $i$  (formule (88), annexe D) et celle dépendant de  $i$  (voir formules (81-86) dans l'annexe D). En particulier, on appelle  $M_j$  ( $j$  étant égal à 1, 2 ou 3) la majoration de l'estimation de  $\|\delta X_j^+\|$  indépendante de  $i$  et  $M_{ji}$  cette même majoration mais dépendante de  $i$ . Les résultats sont les suivants (tableau 1) :

**tableau 1**

*Majoration de la divergence de trajectoire après le saut  $j$  ( $j = 1, 2$  ou  $3$ ), pour une différence de conditions initiales et de paramètres donnée.*

$\ \delta X_0\ $	$\ \delta \mu_0\ $	$M_1$	$M_{1i}$	$M_2$	$M_{2i}$	$M_3$	$M_{3i}$
0,01	0,01	1,1	0,4	329	11,1	98 185	850
0,1	0,1	11	4	3 288	111	981 841	8 495
0,1	0	2,2	2,2	635	59	189 441	4 511
0,01	0	0,22	0,22	63,5	5,9	18 945	451,1
0	0,1	8,9	1,84	2 653	51,8	792 401	3 983
0	0,01	0,89	0,184	265,3	5,18	79 240,1	398,34

#### Remarque :

- on observe une relative proportionnalité des erreurs réalisées par rapport aux mailles  $\|\delta X_0\|$  et  $\|\delta \mu_0\|$ . Ceci est conforme aux résultats trouvés précédemment ;
- la majoration introduite par la formule (88) est grossière. En effet, elle est indépendante du saut considéré, contrairement à la majoration fonction du numéro du saut ;
- avec la majoration indépendante de  $i$ , le caractère aléatoire des paramètres a des conséquences plus importantes que celui des conditions initiales : pour une variation égale des paramètres et des conditions initiales, la jacobienne varie plus pour la variation de paramètres ;
- cela n'est plus le cas si on considère la majoration plus fine, dépendante de  $i$ . Dans ce cas, une variation des conditions initiales et une variation des paramètres de même amplitude ont pratiquement le même effet ;
- ces majorations (88) sont grossières. Si on désire des améliorations, il est alors possible de normer ces matrices en fonction du saut considéré et non plus en fonction du nombre maximal  $N_1$  de sauts.

#### ADAPTATION POTENTIELLE DE L'INDICATEUR

Les valeurs numériques de l'estimateur du tableau 1 sont grandes. En effet, à chaque discontinuité, on a majoré les matrices de saut et de passage en prenant en compte tout l'espace des conditions initiales et des paramètres possibles. De plus, cette majoration a été réalisée sur un intervalle de temps relativement long, du début de la trajectoire jusqu'à sa fin.

Dans un cas comme celui-ci, l'utilisation de l'indicateur proposé est alors la suivante : si sa valeur est estimée trop élevée, localement ou globalement, il convient de raffiner la grille.

Au lieu de considérer un indicateur « global » en temps comme cela a été fait jusqu'ici (associé à un exposant de Lyapunov,  $\bar{\lambda}(t)$  qui étudie une dynamique sur un temps long), on peut aussi envi-

sager d'utiliser une méthode similaire localement en temps pour  $\Delta t > 0$  intervalle de temps donné,  $t_m = m.\Delta t$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{cases} \bar{\lambda}(t_n - t_p) = \frac{1}{t_n - t_p} \ln \frac{\|\delta x(t_n)\|}{\|\delta x(t_p)\|} \\ n > p \end{cases} \quad (38)$$

en bornant alors  $\frac{\|\delta x(t_n)\|}{\|\delta x(t_p)\|}$  seulement.

Pour  $n = p + 1$ , on retrouve un exposant moyen. En particulier, avec les valeurs données par le **tableau 1**, il est visible qu'il est commode d'adapter la grille de calculs et/ou de déterminer un coefficient de sécurité d'un impact du bloc au suivant. En effet, les constantes  $M_i$  et  $M_{ii}$  ne sont pas élevées, car locales. Ceci permet de mesurer la divergence entre un instant et l'autre et donc de distinguer les parties de la trajectoire qui posent problème. Le raffinement de la grille s'effectue alors localement, comme dans le cas d'équations différentielles où l'on adapte le pas de temps. On adapte (éventuellement automatiquement) la maille de la grille localement en fonction de l'indicateur.

## CONCLUSION

Le but de cet article était d'estimer un indicateur de la divergence tangente de trajectoire, d'examiner la faisabilité des calculs et de trouver un outil pour tenter de contrôler les sensibilités aux conditions initiales et/ou aux paramètres induites par les systèmes non réguliers. Cet indicateur devait pouvoir être estimé commodément sur un *continuum* de conditions initiales ou de paramètres et pas seulement sur une grille, ce qui est le cas avec la démarche proposée qui permet de traiter séparément chaque événement non régulier et de majorer sa contribution, même si la borne peut être très grossière.

Pour ceci, on a d'abord défini en toute généralité les matrices de saut et de passage pour ces systèmes. Ensuite, on a étudié le problème de chutes de blocs sur une pente. Dans ce cas, on a pu majorer la pseudo-jacobienne, ce qui permet d'estimer le caractère adéquat ou non de la maille utilisée.

Enfin, on a proposé des pistes d'amélioration du calcul de cet indicateur, permettant une gestion plus fine des mailles de grille.

Cette méthode peut *a priori* être appliquée à toute modélisation de la chute de blocs ou par exemple :

- le bloc de pierre est souvent modélisé par un ellipsoïde ou une boule [2]. En particulier, il peut présenter un mouvement de rotation qui n'a pas été pris en compte ici. Le vecteur position aura alors deux composantes supplémentaires : la rotation et le taux de rotation ;
- de plus, il a été considéré ici que le mouvement se décompose en deux phases distinctes : la chute libre et l'impact, alors qu'un bloc peut présenter des mouvements de roulement et de glissement. Ces derniers sont d'ailleurs ceux qui posent le plus de problèmes. En effet, on a alors :  $x_4(t_i^-) = 0$ , la formule (44) n'est plus valable [17]. Pour résoudre cette difficulté, on peut changer de modélisation (considérer ces cas comme des mini-rebonds, [4]) ou de formalisme [11].

Il faudrait en examiner la faisabilité pour d'autres modélisations, en observant que la perte d'optimalité introduite par les inégalités est compensée par le traitement séparé des événements irréguliers.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1 **BROGLIATO B.**, *Nonsmooth Impact Mechanics. Models, Dynamics, Control*, vol. Communications and Control Engineering, Springer Verlag, New York, 1, ed., **1996**.
- 2 **AZZONI A., LA BARBERA G., ZANINETTI A.**, Analysis and prediction of rockfalls using a mathematical model, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science and Geomechanics Abstracts*, **33**, **1996**, pp. 709-724.
- 3 **DORREN L.**, A review of rockfall mechanics and modelling approaches, *Progress in Physical Geography*, **27**, **2003**, pp. 69-87.
- 4 **FALCETTA J.-L.**, *Étude cinématique et dynamique de chutes de blocs rocheux*, Thèse de doctorat, INSA, **1985**.
- 5 **GOLDSMITH W.**, *Impact, the Theory and Physical Behavior of Colliding Solids*, Edward Arnold Publishers, dover publications ed., **1960**.
- 6 **RITCHIE A.**, Evaluation of rockfall and its control, *Highway Research Record*, **17**, **1963**, pp. 13-28.
- 7 **MULLER P.C.**, Calculation of Lyapunov exponents for dynamic systems with discontinuities, *Chaos, Solitons & Fractals : Some Nonlinear Oscillations Problems in Engineering Sciences*, **5**, **1995**, pp. 1671-1681.
- 8 **OSELEDEC V.**, A multiplicative ergodic theorem : Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Society*, **19**, **1968**, pp. 197-231.
- 9 **GUCKENHEIMER J., HOLMES P.**, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, vol. Applied Mathematical Sciences, Springer Verlag, **1983**.
- 10 **IVANOV A.P.**, A constructive model of impact with friction, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **52**, **1988**, pp. 700-704.
- 11 **MOREAU J.**, Modélisation et simulation de matériaux granulaires, in *Canum 2003*, Cannes, France, **2003**.
- 12 **FRÉMOND M.**, Rigid bodies collisions, *Physics Letters A*, **204**, **1995**, pp. 33-41.
- 13 **DIMNET É.**, *Mouvement et collisions de solides rigides ou déformables*, Thèse, École nationale des ponts et chaussées, **2002**.
- 14 **PAOLI L.**, *Analyse numérique de vibrations avec contraintes unilatérales*, Thèse de doctorat, Université Lyon I, **1993**.
- 15 **BASTIEN J.**, *Étude théorique et numérique d'inclusions différentielles maximales monotones. Applications à des modèles élastoplastiques*, Thèse de doctorat, Université Lyon I, **2000**.
- 16 **BERNARDIN F.**, *Équations différentielles stochastiques multivoques et modélisation de structures sous sollicitations aléatoires*, Thèse de doctorat, Université Lyon I, **2004**.
- 17 **BRACH R.**, Friction, restitution and energy loss in planar collisions, *Journal of Applied Mechanics*, *Transactions ASME*, **51**, **1984**, pp. 164-170.



## ANNEXE A

### DÉVELOPPEMENT THÉORIQUE DE L'ÉVOLUTION DE LA DIVERGENCE DE TRAJECTOIRE

$$(t_0 \leq) t < t_1 :$$

$$\delta \dot{X} = \frac{\partial f_1}{\partial X^T}(X, t, \mu) \delta X + \frac{\partial f_1}{\partial t}(X, t, \mu) \cdot \delta t + \frac{\partial f_1}{\partial \mu^T}(X, t, \mu) \cdot \delta \mu,$$

si on suppose :

$$\begin{aligned} \delta \dot{t} &= 0 \Rightarrow \delta t = \delta t_0, \\ \delta \dot{\mu} &= 0 \Rightarrow \delta \mu = \delta \mu_0, \end{aligned} \quad (39)$$

alors, simplement :

$$\delta \dot{X} = F_{1X}(X, t, \mu) \cdot \delta X + F_{1T}(X, t, \mu) \cdot \delta t_0 + F_{1\mu}(X, t, \mu) \cdot \delta \mu_0,$$

avec :

$$\begin{cases} F_{1X}(X, t, \mu) = \frac{\partial f_1}{\partial X^T} \Big|_{X, t, \mu}, \\ F_{1T}(X, t, \mu) = \frac{\partial f_1}{\partial t} \Big|_{X, t, \mu}, \\ F_{1\mu}(X, t, \mu) = \frac{\partial f_1}{\partial \mu^T} \Big|_{X, t, \mu}. \end{cases} \quad (40)$$

À l'instant  $t = t_1$ , en notant :  $\delta X(t_1^-) = \delta X_1^-$ , et en cherchant  $\delta X(t_1^+) = \bar{X}(t_1) - X(t_1^+)$ , sous la contrainte  $0 = h(\bar{X}(\bar{t}, \bar{\mu}), \bar{t}, \bar{\mu})$  et avec :

$$\begin{cases} \bar{X}(\bar{t}, \bar{\mu}) = X_1^- + \delta X_1^- + f_1(X_1^- + \delta X_1^-, t_1, \mu) \cdot \delta t, \\ \bar{\mu} = \mu + \delta \mu_0, \\ \bar{t} = t + \delta t, \\ h(X_1^-, t_1, \mu) = 0, \end{cases} \quad (41)$$

on obtient alors avec un développement de Taylor au premier ordre :

$$\begin{aligned} 0 \approx & \left[ H_X(X_1^-, t_1, \mu) \cdot f_1(X_1^-, t_1, \mu) + H_T(X_1^-, t_1, \mu) \right] \cdot \delta t_1 \\ & + \left[ H_X(X_1^-, t_1, \mu) \cdot \delta X_1^- + H_T(X_1^-, t_1, \mu) \cdot \delta t_0 + H_\mu(X_1^-, t_1, \mu) \cdot \delta \mu_0 \right], \end{aligned} \quad (42)$$

avec plus explicitement :

$$\begin{cases} H_X(X_1^-, t_1, \mu) = \frac{\partial h}{\partial X^T} \Big|_{X_1^-, t_1, \mu}, \\ H_T(X_1^-, t_1, \mu) = \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{X_1^-, t_1, \mu}, \\ H_\mu(X_1^-, t_1, \mu) = \frac{\partial h}{\partial \mu^T} \Big|_{X_1^-, t_1, \mu}. \end{cases} \quad (43)$$

Supposons que  $A = H_X(X_1^-, t_1, \mu) \cdot f_1(X_1^-, t_1, \mu) + H_T(X_1^-, t_1, \mu)$  est inversible. Cela signifie que la trajectoire perturbée, c'est-à-dire celle dont les conditions initiales en espace et en temps et les paramètres ont été perturbés, présente le même type de comportement que la trajectoire initiale. Alors, l'intervalle de temps entre les instants de discontinuité de la trajectoire non perturbée et celle perturbée sera :

$$\delta t_1 = - \left[ H_X(X_1^-, t_1, \mu) \cdot f_1(X_1^-, t_1, \mu) + H_T(X_1^-, t_1, \mu) \right]^{-1} \times \left[ H_X(X_1^-, t_1, \mu) \cdot \delta X_1^- + H_T(X_1^-, t_1, \mu) \cdot \delta t_0 + H_\mu(X_1^-, t_1, \mu) \cdot \delta \mu_0 \right]. \quad (44)$$

La différence des deux trajectoires après l'impact vaudra :

$$\delta X^+ = \bar{X}(\bar{t}_1^+) - X(\bar{t}_1^+),$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{X}(\bar{t}_1^+) &= g(\bar{X}(\bar{t}_1^-), \bar{t}_1, \bar{\mu}) \\ &\approx g(X_1^-, t_1, \mu) + G_X(X_1^-, t_1, \mu) \cdot [\delta X_1^- + f(X_1^-, t_1, \mu) \cdot \delta t_1] \\ &\quad + G_T(X_1^-, t_1, \mu) + G_T(X_1^-, t_1, \mu) \cdot \delta t_0 + G_\mu(X_1^-, t_1, \mu) \cdot \delta \mu_0, \end{aligned} \quad (45)$$

et :

$$\begin{cases} G_X(X_1^-, t_1, \mu) = \frac{\partial g}{\partial X^T} \Big|_{X_1^-, t_1, \mu}, \\ G_T(X_1^-, t_1, \mu) = \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{X_1^-, t_1, \mu}, \\ G_\mu(X_1^-, t_1, \mu) = \frac{\partial g}{\partial \mu^T} \Big|_{X_1^-, t_1, \mu}. \end{cases} \quad (46)$$

Donc, en utilisant l'approximation (45) :

$$\begin{aligned} \delta X^+ &= G_X(X_1^-, t_1, \mu) \cdot \delta X_1^- \\ &\quad + \left[ G_X(X_1^-, t_1, \mu) \cdot f(X_1^-, t_1, \mu) + G_T(X_1^-, t_1, \mu) - f_2(X_1^+, t_1, \mu) \right] \cdot \delta t_1 \\ &\quad + G_T(X_1^-, t_1, \mu) \cdot \delta t_0 + G_\mu(X_1^-, t_1, \mu) \cdot \delta \mu_0. \end{aligned} \quad (47)$$

Finalement dans le dernier cas  $t > t_1$ , on a :

$$\delta \dot{X} = F_{2X}(X, t, \mu) \cdot \delta X + F_{2T}(X, t, \mu) \cdot \delta t_0 + F_{2\mu}(X, t, \mu) \cdot \delta \mu_0, \quad (48)$$

avec :

$$\begin{cases} F_{2X}(X, t, \mu) = \frac{\partial f_2}{\partial X^T} \Big|_{X, t, \mu}, \\ F_{2t}(X, t, \mu) = \frac{\partial f_2}{\partial t} \Big|_{X, t, \mu}, \\ F_{2\mu}(X, t, \mu) = \frac{\partial f_2}{\partial \mu^T} \Big|_{X, t, \mu}. \end{cases} \quad (49)$$

## ANNEXE B

### DÉTERMINATION DES RELATIONS DE PASSAGE POUR $\delta T \neq 0$ OU $\delta M \neq 0$

Dans ce cas, il faut réécrire les expressions précédentes de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\delta t_i &= -A^{-1} \cdot \left[ H_X \left( X_i^-, t_i, \mu \right) \cdot \delta X_i^- + B \right], \\ \delta X_i^+ &= G_X \left( X_i^-, t_i, \mu \right) \cdot \delta X_i^- + C \cdot \delta t_i + D,\end{aligned}\tag{50}$$

avec :

$$\begin{cases} A = H_X \left( X_i^-, t_i, \mu \right) \cdot f \left( X_i^-, t_i, \mu \right) + H_T \left( X_i^-, t_i, \mu \right), \\ B = H_T \left( X_i^-, t_i, \mu \right) \cdot \delta t_0 + H_\mu \left( X_i^-, t_i, \mu \right) \cdot \delta \mu_0, \\ C = G_X \left( X_i^-, t_i, \mu \right) \cdot f \left( X_i^-, t_i, \mu \right) + G_T \left( X_i^-, t_i, \mu \right) - f \left( X_i^+, t_i, \mu \right), \\ D = G_T \left( X_i^-, t_i, \mu \right) \cdot \delta t_0 + G_\mu \left( X_i^-, t_i, \mu \right) \cdot \delta \mu_0.\end{cases}\tag{51}$$

On obtient alors :

$$\delta X_i^+ = \left[ G_X \left( X_i^-, t_i, \mu \right) - C \cdot A^{-1} \cdot H_X \left( X_i^-, t_i, \mu \right) \right] \cdot \delta X_i^- - C \cdot A^{-1} \cdot B + D.\tag{52}$$

Remarque : si on pose  $\delta t_0 = 0$  et  $\delta \mu_0 = 0$ , cette équation (52) s'écrit bien sous la forme de la formule (15) :

$$\delta X_i^+ = \left[ G_X \left( X_i^-, t_i, \mu \right) - C \cdot A^{-1} \cdot H_X \left( X_i^-, t_i, \mu \right) \right] \cdot \delta X_i^-.\tag{53}$$

On réécrit alors le problème de la façon suivante :

$$\delta X_i^- = J_i \cdot \delta X_{i-1}^+,\tag{54}$$

$$\delta X_i^+ = S_{1i} \cdot \delta X_i^- + S_{2i}.\tag{55}$$

Par récurrence, la divergence de trajectoire après le saut  $i$  peut être exprimée en fonction de la divergence de conditions initiales  $\delta X_0$  :

$$\begin{aligned}\delta X_i^+ &= \prod_{j=0}^{i-1} S_{1(i-j)} \cdot J_{i-j} \cdot \delta X_0 + \sum_{j=1}^i S_{2j} \cdot \prod_{l=j+1}^i S_{1l} \cdot J_l, \\ \text{où : } \forall k > i, S_{1k} &= J_{1k} = 0.\end{aligned}\tag{56}$$

Il est à remarquer que cette équation (56) fait intervenir les variables  $S_{1i}$ ,  $S_{2i}$  et  $J_i$ , qui sont fonction des divergences en temps  $\delta t_0$  et en paramètre  $\delta \mu_0$ .

En particulier, si on peut écrire :

$$\begin{cases} ||| J_i ||| \leq R, \\ ||| S_{1i} ||| \leq S_1, \\ ||| S_{2i} ||| \leq S_2.\end{cases}\tag{57}$$

où  $R$ ,  $S_1$  et  $S_2$  sont des constantes indépendantes de  $i$ , l'équation (56) peut se majorer :

$$\|\delta X_i^+\| \leq (S_1 \cdot R)^i \cdot \|\delta X_0\| + S_2 \cdot \sum_{j=0}^{i-1} (S_1 \cdot R)^j.\tag{58}$$

$$\text{Si } S_1 \cdot R \neq 1: \|\delta X_i^+\| \leq (S_1 \cdot R)^i \cdot \|\delta X_0\| + S_2 \cdot \frac{1 - (S_1 \cdot R)^i}{1 - S_1 \cdot R}.$$

$$\text{Si } S_1 \cdot R = 1: \|\delta X_i^+\| \leq (S_1 \cdot R)^i \cdot \|\delta X_0\| + S_2 \cdot \frac{1 - (S_1 \cdot R)^i}{1 - S_1 \cdot R}.$$

## ANNEXE C

### DISTANCE ENTRE DEUX IMPACTS

Pour calculer le nombre d'impacts, il faut déterminer  $N$  qui est le premier entier tel que :

$$\sum_{i=1}^N x_i - x_{i-1} \geq L. \quad (59)$$

Pour cela, il convient d'estimer les  $x_i$ ,  $\dot{x}_i$ ,  $y_i$  et  $\dot{y}_i$ .

Les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} x = \frac{g \sin(\theta)}{2} (t - t_0)^2 + \dot{x}_0 (t - t_0) + x_0, \\ y = \frac{g \cos(\theta)}{2} (t - t_0)^2 + \dot{y}_0 (t - t_0) + y_0. \end{cases} \quad (60)$$

Il y a impact lorsque  $y = 0$ , ainsi l'intervalle de temps entre deux impacts est égal à :

$$t_i - t_{i-1} = \frac{-\dot{y}_{i-1}^+ + \sqrt{(\dot{y}_{i-1}^+)^2 - 2gy_{i-1}^+ \cos(\theta)}}{g \cos(\theta)} \quad (61)$$

Les vitesses lors des impacts sont donc :

$$\begin{cases} \dot{x}_1^- = \tan(\theta) \left[ -\dot{y}_0 + \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2gy_0 \cos(\theta)} \right] + \dot{x}_0, \\ \dot{y}_1^- = \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2gy_0 \cos(\theta)}, \\ \dot{y}_i^- = -\dot{y}_{i-1}^+, \\ \dot{x}_i^- = -2 \tan(\theta) \cdot \dot{y}_{i-1}^+ + \dot{x}_{i-1}^+. \end{cases} \quad (62)$$

Par récurrence, on obtient alors :

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, \dot{y}_n^- = (-\beta)^{n-1} \cdot \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2gy_0 \cos(\theta)}, \\ \forall n \geq 2, \dot{x}_n^- = \alpha^{n-1} \left( \tan(\theta) \left[ -\dot{y}_0 + \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2gy_0 \cos(\theta)} \right] + \dot{x}_0 \right) \\ - (-\beta)^{n-1} \cdot 2 \tan(\theta) \cdot \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2gy_0 \cos(\theta)} \cdot \frac{1 - (-\alpha/\beta)^{n-1}}{1 + \alpha/\beta}, \\ \forall n \geq 2, \frac{\dot{x}_n^-}{\dot{y}_n^-} = \left( -\frac{\alpha}{\beta} \right)^{n-1} \cdot \frac{\tan(\theta) \left( -\dot{y}_0 + \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2gy_0 \cos(\theta)} \right) + \dot{x}_0}{\sqrt{\dot{y}_0^2 - 2gy_0 \cos(\theta)}} \\ - 2 \tan(\theta) \cdot \frac{1 - (-\alpha/\beta)^{n-1}}{1 + \alpha/\beta}, \\ \forall i \geq 1, t_i - t_{i-1} = \frac{2}{g \cos(\theta)} \cdot (-\beta)^{i-1} \cdot \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2gy_0 \cos(\theta)}. \end{cases} \quad (63)$$

On note :

$$\begin{cases} X = \tan(\theta) \left( -\dot{y}_0 + \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2gy_0 \cos(\theta)} \right) + \dot{x}_0, \\ Y = -\dot{y}_0 + \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2gy_0 \cos(\theta)}, \\ Z = \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2gy_0 \cos(\theta)}. \end{cases} \quad (64)$$

On calcule ainsi la distance entre deux impacts :

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = \frac{\sin(\theta)}{2g \cos(\theta)^2} \cdot Y^2 + \frac{\dot{x}_0}{g \cos(\theta)} \cdot Y, \\ \forall i \geq 2, x_i - x_{i-1} = \frac{2 \sin(\theta)}{g \cos(\theta)^2} \cdot (-\beta)^{2i-2} \cdot Z^2 + \frac{2}{g \cos(\theta)} \cdot \alpha \cdot (-\beta)^{i-1} \cdot Z \\ \times \left[ \alpha^{i-2} \cdot X - (-\beta)^{i-2} \cdot 2 \tan(\theta) \cdot Z \cdot \frac{1 - (-\alpha/\beta)^{i-2}}{1 + \alpha/\beta} \right]. \end{cases} \quad (65)$$

N est le premier entier tel que :

$$L \geq \sum_{i=1}^{N_1} x_i - x_{i-1}, \quad L \geq x_1 - x_0 + \sum_{i=2}^{N_1} x_i - x_{i-1}.$$

En particulier, on peut écrire :

$$L \geq x_1 - x_0 + \sum_{i=2}^{N_1} \frac{2 \sin(\theta) \cdot Z^2}{g \cos(\theta)^2} \cdot (-\beta)^{2i-2}.$$

Donc :

$$N_1 = \frac{\ln \left( 1 - \frac{g \cos(\theta)^2 (1 - \beta^2)}{2 \sin(\theta) \cdot Z^2} \left[ L - \frac{\sin(\theta)}{2g \cos(\theta)^2} Y^2 - \frac{\dot{x}_0}{g \cos(\theta)} Y \right] \right)}{2 \ln(-\beta)} + 2. \quad (66)$$

## ANNEXE D

### MAJORATION DES NORMES DES MATRICES DE SAUT ET DE PASSAGE

Les vitesses avant impacts  $x_2(t_i^-)$  et  $x_4(t_i^-)$  doivent être estimées. Ceci est réalisé par récurrence ; les résultats sont donnés par la formule (63).

On utilise les notations suivantes :

$$E_i = \begin{bmatrix} 1 & t_i - t_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_i - t_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (67)$$

$$F_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(\alpha+1) \frac{x_2(t_i^-)}{x_4(t_i^-)} & 0 \\ 0 & \alpha & (1-\alpha) \frac{g \sin(\theta)}{x_4(t_i^-)} & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & (1-\beta) \frac{g \cos(\theta)}{x_4(t_i^-)} & \beta \end{bmatrix}, \quad (68)$$

$$G_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_2(t_i^-) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & x_4(t_i^-) \end{bmatrix}. \quad (69)$$

On calcule une norme subordonnée pour ces matrices.

Comme auparavant, on utilise  $\|M\| = \sup_i \sum_{j=1}^n |m_{ij}|$  :

$$\|E_i\| = \max \{1, 1 + t_i - t_{i-1}\}, \quad (70)$$

$$= 1 + t_i - t_{i-1}, \quad (71)$$

$$= \begin{cases} 1 + \frac{-\dot{y}_0 + \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)}}{g \cos(\theta)} & \text{si } i = 1, \\ 1 + \frac{2(-\beta)^i}{g \cos(\theta)} \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)} & \text{si } i > 1. \end{cases} \quad (72)$$

De même :

$$\|F_i\| = \max \left\{ 1 + (\alpha+1) \frac{x_2(t_i^-)}{x_4(t_i^-)}, \alpha + (1-\alpha) \frac{g \sin(\theta)}{x_4(t_i^-)}, -\beta + (1-\beta) \frac{g \cos(\theta)}{x_4(t_i^-)} \right\}, \quad (73)$$

donc si  $i = 1$  :

$$\|F_1\| = \max \left\{ \begin{array}{l} 1 + (\alpha + 1) \left[ \frac{\tan(\theta) \left( -\dot{y}_0 + \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)} \right) + \dot{x}_0}{\sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)}} \right] \\ \alpha + (1 - \alpha) \cdot \frac{g \sin(\theta)}{\sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)}} \\ -\beta + (1 - \beta) \cdot \frac{g \cos(\theta)}{\sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)}} \end{array} \right\}, \quad (74)$$

et si  $i > 1$  :

$$\|F_i\| = \max \left\{ \begin{array}{l} 1 + (\alpha + 1) \left[ \left( -\frac{\alpha}{\beta} \right)^{i-1} \frac{\tan(\theta) \left( -\dot{y}_0 + \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)} \right) + \dot{x}_0}{\sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)}} \right. \\ \quad \left. - 2 \tan(\theta) \frac{1 - (-\alpha/\beta)^{i-2}}{1 + \alpha/\beta} \right] \\ \alpha + (1 - \alpha) \cdot \frac{g \sin(\theta)}{(-\beta)^{i-1} \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)}} \\ -\beta + (1 - \beta) \cdot \frac{g \cos(\theta)}{(-\beta)^{i-1} \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)}} \end{array} \right\}. \quad (75)$$

On a :  $\|G_i\| = \max \left\{ x_2(t_i^-), x_4(t_i^-) \right\}$ . Par suite, il vient :

Si  $i = 1$  (76)

$$\|G_1\| = \max \left\{ \tan(\theta) \left( -\dot{y}_0 + \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)} \right) + \dot{x}_0, \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)} \right\}. \quad (77)$$

Si  $i > 1$  (78)

$$\|G_i\| = \max \left\{ \begin{array}{l} (-\beta)^{i-1} \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)} \\ \alpha^{i-1} \left[ \tan(\theta) \left( -\dot{y}_0 + \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)} \right) + \dot{x}_0 \right] \\ - 2 \tan(\theta) (-\beta)^{i-1} \frac{1 - (-\alpha/\beta)^{i-2}}{1 + \alpha/\beta} \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0 g \cos(\theta)} \end{array} \right\}. \quad (79)$$

Si on suppose que les conditions initiales sont bornées : par exemple, supposons que  $x_0 \in [x_{01}, x_{02}]$ ,  $\dot{x}_0 \in [\dot{x}_{01}, \dot{x}_{02}]$ ,  $y_0 \in [y_{01}, y_{02}]$ ,  $\dot{y}_0 \in [\dot{y}_{01}, \dot{y}_{02}]$ ,  $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ ,  $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ .

On a alors logiquement  $y_{01} \leq 0$  et  $y_{02} \leq 0$ .

De même, d'après leur définition,  $\alpha \geq 0$  et  $\beta \leq 0$ , donc on a :  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$  et  $\beta_1 \leq 0$ ,  $\beta_2 \leq 0$ .

Mais on suppose également pour la simplicité des calculs  $\dot{y}_{01} \leq 0$  et  $\dot{y}_{02} \leq 0$ .

Par ailleurs, on note :

$$\begin{cases} Z &= \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0g \cos(\theta)}, \\ Z_1 &= \sqrt{\dot{y}_{01}^2 - 2y_{01}g \cos(\theta)}, \\ Z_2 &= \sqrt{\dot{y}_{02}^2 - 2y_{02}g \cos(\theta)}, \\ Y &= -\dot{y}_0 + \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0g \cos(\theta)}, \\ Y_1 &= -\dot{y}_{01} + \sqrt{\dot{y}_{01}^2 - 2y_{01}g \cos(\theta)}, \\ Y_2 &= -\dot{y}_{02} + \sqrt{\dot{y}_{02}^2 - 2y_{02}g \cos(\theta)}, \\ X &= \tan(\theta) \left( -\dot{y}_0 + \sqrt{\dot{y}_0^2 - 2y_0g \cos(\theta)} \right) + \dot{x}_0, \\ X_1 &= \tan(\theta) \left( -\dot{y}_{01} + \sqrt{\dot{y}_{01}^2 - 2y_{01}g \cos(\theta)} \right) + \dot{x}_{02}, \\ X_2 &= \tan(\theta) \left( -\dot{y}_{02} + \sqrt{\dot{y}_{02}^2 - 2y_{02}g \cos(\theta)} \right) + \dot{x}_{01}. \end{cases} \quad (80)$$

On obtient les majorations suivantes :

$$\| \| E_1 \| \| \leq 1 + \frac{Y_1}{g \cos(\theta)}, \quad (81)$$

$$\| \| E_i \| \| \leq 1 + \frac{2(-\beta_1)^i}{g \cos(\theta)} \cdot Z_1, \forall i > 1. \quad (82)$$

De même :

$$\| \| F_1 \| \| \leq \max \left\{ 1 + (\alpha_2 + 1) \frac{X_1}{Z_2}, \alpha_2 (1 - \alpha_1) \frac{g \sin(\theta)}{Z_2}, -\beta_1 + (1 - \beta_1) \frac{g \cos(\theta)}{Z_2} \right\}, \quad (83)$$

$$\| \| F_i \| \| \leq \max \left\{ \begin{aligned} &1 + (\alpha_2 + 1) \left[ \left( -\frac{\alpha_2}{\beta_2} \right)^{i-1} \cdot \frac{X_1}{Z_2} - 2 \tan(\theta) \frac{1 - (-\alpha_1/\beta_1)^{i-2}}{1 + \alpha_1/\beta_1} \right], \\ &\alpha_2 + (1 - \alpha_1) \frac{g \sin(\theta)}{(-\beta_2)^{i-1} Z_2}, \\ &-\beta_1 + (1 - \beta_1) \frac{g \cos(\theta)}{(-\beta_2)^{i-1} Z_2} \end{aligned} \right\}, \forall i > 1. \quad (84)$$

Enfin :

$$\| \| G_1 \| \| \leq \max \{ X_2, Z_1 \}, \quad (85)$$

$$\| \| G_i \| \| \leq \max \left\{ (-\beta_1)^{i-1} \cdot Z_1, \alpha_2^{i-1} \cdot X_2 - 2 \tan(\theta) (-\beta_1)^{i-1} \cdot \frac{1 - (-\alpha_2/\beta_2)^{i-2}}{1 + \alpha_1/\beta_1} \cdot Z_1 \right\}, \forall i > 1. \quad (86)$$



Le nombre maximal d'impacts est connu par la formule (66), qui fait intervenir des paramètres incertains ( $Y, Z, \beta$ ). Ainsi, avec les intervalles de variation des paramètres et des conditions initiales qui ont été introduits ci-dessus, on peut écrire :

$$N_1 = \frac{\ln \left( 1 - \frac{g \cos(\theta)^2 (1 - \beta_2^2)}{2 \sin(\theta) \cdot Z_1^2} \left[ L - \frac{\sin(\theta)}{2g \cos(\theta)^2} Y_2^2 - \frac{\dot{x}_0}{g \cos(\theta)} Y_2 \right] \right)}{2 \ln(-\beta_2)} + 2. \quad (87)$$

Finalement, si on suppose encore que  $-\frac{\alpha_1}{\beta_1} \geq 1$  et  $-\frac{\alpha_2}{\beta_2} \geq 1$ , on obtient les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} ||| E_1 ||| &\leq E_1 = 1 + \frac{Y_1}{g \cos(\theta)}, \\ ||| E_i ||| &\leq E = 1 + \frac{2Z_1}{g \cos(\theta)}, \forall i \geq 2, \\ ||| F_1 ||| &\leq F_1 = \max \left\{ 1 + (1 + \alpha_2) \cdot \frac{X_1}{Z_2}, \alpha_2 + (1 - \alpha_1) \frac{g \sin(\theta)}{Z_2}, -\beta_1 + (1 - \beta_1) \frac{g \cos(\theta)}{Z_2} \right\} \\ ||| F_i ||| &\leq F = \max \left\{ 1 + (1 + \alpha_2) \cdot \left[ \left( -\frac{\alpha_2}{\beta_2} \right)^{N_1-1} \cdot \frac{X_1}{Z_2} - 2 \tan(\theta) \cdot \frac{1 - (-\alpha_1/\beta_1)^{N_1-2}}{1 + \alpha_1/\beta_1} \right], \right. \\ &\quad \left. \alpha_2 + (1 - \alpha_1) \frac{g \sin(\theta)}{(-\beta_2)^{N_1-1} Z_2}, -\beta_1 + (1 - \beta_1) \frac{g \cos(\theta)}{(-\beta_2)^{N_1-1} Z_2} \right\}, \forall i \geq 2, \\ ||| G_i ||| &\leq G = \max \left\{ X_2 + 2 \tan(\theta) \cdot Z_1 \cdot \frac{1 - (-\alpha_2/\beta_2)^{N_1-2}}{1 + \alpha_1/\beta_1}, Z_1 \right\}, \forall i. \end{aligned} \quad (88)$$