

Michel FRÉMOND
Laboratoire central des ponts et chaussées
fremond@clma.ens-cachan.fr

COLLISIONS ET FRACTURES

■ RÉSUMÉ

Un rocher qui dévale une forte pente peut se briser en heurtant un mur de protection en béton. On étudie ce phénomène à l'échelle de l'ingénieur. La théorie est illustrée sur un problème physique de même nature : on étudie en détail ce qui se passe lorsque l'on laisse tomber une grosse pierre attachée à un lustre. La collision est supposée instantanée. Des percussions apparaissent sur les fissures dont la position est inconnue. Les équations du mouvement et les lois de comportement donnent un ensemble d'équations aux dérivées partielles qui peuvent être résolues avec une formulation variationnelle. L'étude de l'exemple montre que la théorie prévisionnelle rend compte de l'essentiel des phénomènes physiques.

Collisions and Fractures

■ ABSTRACT

A boulder careening down a steep slope can disintegrate upon collision with a concrete protective barrier. This phenomenon will be examined herein at the scale of the engineer.

The theory is illustrated on a physical problem of a similar nature : a detailed study will be performed of what happens when a large rock attached to a light source is allowed to slide. The collision is presumed to be instantaneous. Percussions appear on the cracks whose positions remain unknown. The movement equations and constitutive laws yield a set of partial derivative equations that can be solved using a variational formulation. Studying this example reveals that the predictive theory does account for the essence of physical phenomena.

INTRODUCTION

Un rocher qui dévale une forte pente peut se briser en heurtant un mur de protection en béton. Le mur, lui aussi, peut subir des dégâts. On examine ces problèmes à l'échelle macroscopique, celle de l'ingénieur. Une collision se produit lorsque les vitesses sont incompatibles avec les liaisons. On dit qu'on a une incompatibilité cinématique. Les collisions considérées se passent en un temps très court et schématisées en supposant qu'elles sont instantanées. À l'instant t de la collision, le champ de vitesse est discontinu par rapport au temps : $\vec{U}^-(\vec{x}, t)$ est le champ de vitesse avant la collision, c'est une fonction continue de \vec{x} ; $\vec{U}^+(\vec{x}, t)$ est le champ de vitesse après la collision et n'est pas toujours une fonction continue de \vec{x} . Une discontinuité spatiale de $\vec{U}^+(\vec{x}, t)$ caractérise une fracture. Dans la suite, tout se passe au même instant t qui n'est plus mentionné.

La théorie prévisionnelle développée est fondée sur les idées mises en œuvre dans la description des collisions [1, 2] : comme dans toute théorie mécanique, les vitesses, les vitesses de déformations, etc.

sont des concepts assez faciles à appréhender expérimentalement alors que les concepts d'effort sont plus délicats et difficiles à atteindre expérimentalement. Une façon productive et élégante de relier tous ces concepts est d'utiliser la dualité, c'est-à-dire les notions de puissance et de travail. Dans la situation présente, on suit cette piste et on définit les efforts intérieurs par leur travail en s'appuyant sur les propriétés des champs de vitesses. On introduit ainsi des contraintes de percussion dans le rocher et on introduit aussi des percussions surfaciques tant sur les surfaces de contact que sur les lèvres des *fractures dont la position est, bien sûr, inconnue*. Toutes ces percussions volumiques et surfaciques schématisent les très fortes contraintes et forces de surface résultant des collisions. Les lois de comportement sont définies par des fonctions de dissipation.

On illustre la théorie avec un exemple où on peut mener les calculs avec assez de facilité. On considère un lustre suspendu au plafond auquel on attache une pierre qu'on laisse tomber. Lorsque la ficelle qui relie le lustre à la pierre se tend, une incompatibilité cinématique apparaît. On étudie les conséquences de cette chute, ou encore de cette incompatibilité cinématique, à l'échelle macroscopique, celle de l'ingénieur ou du propriétaire du lustre [3, 4]. Le lustre est schématisé par une barre verticale qui occupe le segment $[0, l]$ de l'axe Ox orienté vers le bas. On note $U^+ - U^-$ les discontinuités temporelles et on réserve les crochets $[A] = A_d - A_g$ pour les discontinuités spatiales : la valeur à droite (basse pour le lustre) moins la valeur à gauche (haute pour le lustre).

La situation générale est rapidement examinée à la fin de l'article. Elle permet de traiter la collision du rocher et du mur de protection évoquée plus haut.

UN EXEMPLE EN DIMENSION UN

Le système considéré comprend, outre le lustre qui occupe le segment $[0, l]$, le plafond qui ne bouge pas et l'ensemble pierre-ficelle que l'on suppose ponctuel. À l'instant où on examine le système, la ficelle, qui joint la pierre située sous le lustre à celui-ci, est tendue. Soit la pierre tombe, soit elle est au repos et dans ce cas on lui applique une percussion extérieure en lui donnant, par exemple un coup de marteau.

■ Vitesses

Trois vitesses sont à considérer :

- la vitesse $U_{\text{ext}}(0)$, la vitesse du plafond qui reste toujours nulle ;
- la vitesse $U_{\text{int}}(x)$, la vitesse des points de la barre ;
- la vitesse $U_{\text{ext}}(l)$, la vitesse de la pierre.

Comme la fixation du lustre au plafond peut casser, il y a deux vitesses au point $x = 0$: $U_{\text{ext}}(0)$ et $U_{\text{int}}(0)$, la vitesse du lustre, qui est la trace de $U_{\text{int}}(x)$:

$$U_{\text{int}}(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} U_{\text{int}}(x).$$

Les suffixes $_{\text{int}}$ pour intérieur et $_{\text{ext}}$ pour extérieur distinguent ces deux vitesses. De même, au point $x = l$, il y a deux vitesses car la ficelle peut casser ou la distance de la pierre au lustre se raccourcir. Il y a $U_{\text{ext}}(l)$ et $U_{\text{int}}(l)$, la vitesse du lustre, la trace de $U_{\text{int}}(x)$:

$$U_{\text{int}}(l) = \lim_{x \rightarrow l, x < l} U_{\text{int}}(x).$$

On note $U = \{U_{\text{int}}, U_{\text{ext}}(0), U_{\text{ext}}(l)\}$, le triplet des vitesses réelles. Les vitesses virtuelles sont définies par un triplet $V = \{V_{\text{int}}, V_{\text{ext}}(0), V_{\text{ext}}(l)\}$ où la vitesse virtuelle de la barre, V_{int} , est une fonction de x .

■ Vitesses de déformations

Pour décrire la façon dont le système se déforme, on utilise :

- la vitesse de déformation dU_{int}^+ / dx là où U_{int}^+ est régulière, c'est-à-dire là où elle a une dérivée usuelle ;
- les vitesses d'écartement des bords des fractures là où U_{int}^+ n'est pas régulière, c'est-à-dire là où elle est discontinue

$$\left[U^+(x) \right] = U_d^+(x) - U_g^+(x) = \left[U^+(x) + U^-(x) \right],$$

car $U^-(x)$ est continue. L'indice $_d$ désigne la valeur à droite (basse pour le lustre) et l'indice $_g$ la valeur à gauche (haute pour le lustre).

■ Principe des travaux virtuels et équations du mouvement

Par souci de simplifier l'exposé, on suppose qu'il n'y a qu'une seule fracture au point $s \in]0, l[$, bien qu'il puisse y en avoir beaucoup plus. Le principe des travaux virtuels

$$\forall V^+, V^-, \tau_{\text{acc}}(V^+, V^-) = \tau_{\text{int}}(V^+, V^-) + \tau_{\text{ext}}(V^+, V^-)$$

où V^+, V^- sont des triplets de vitesses virtuelles avant et après la collision, relie les travaux virtuels des efforts d'accélération, des efforts intérieurs et des efforts extérieurs. Le travail virtuel des efforts d'accélération est [1, 2]

$$\begin{aligned} \tau_{\text{acc}}(V^+, V^-) &= \int_{]0, l[} \rho \left(U_{\text{int}}^+ - U_{\text{int}}^- \right) \frac{V_{\text{int}}^+ + V_{\text{int}}^-}{2} dx \\ &+ m \left(U_{\text{ext}}^+(l) - U_{\text{ext}}^-(l) \right) \frac{V_{\text{ext}}^+(l) + V_{\text{ext}}^-(l)}{2}, \end{aligned}$$

où ρ est la densité de la barre, m la masse de la pierre dont la vitesse est U_{ext} . Le travail virtuel des efforts intérieurs choisi est

$$\begin{aligned} \tau_{\text{int}}(V^+, V^-) &= - \int_{]0, s[\cup]s, l[} \sum \frac{d}{dx} \left(\frac{V_{\text{int}}^+ + V_{\text{int}}^-}{2} \right) dx \\ &+ R(0) \left[\frac{V^+(0) + V^-(0)}{2} \right] + R(s) \left[\frac{V_{\text{int}}^+(s) + V_{\text{int}}^-(s)}{2} \right] \\ &+ R(l) \left[\frac{V^+(l) + V^-(l)}{2} \right], \end{aligned}$$

où dV_{int} / dx est la partie régulière de la vitesse de déformation (c'est-à-dire la dérivée usuelle de V_{int}). Au point 0, la vitesse à gauche est la vitesse du plafond, $V_{\text{ext}}(0)$. Au point l , la vitesse à droite est la vitesse de la pierre $V_{\text{ext}}(l)$. Ce travail définit la contrainte linéique de percussion Σ dans la barre et les percussions ponctuelles R sur la fracture et aux deux extrémités de la barre. Le travail des efforts extérieurs intervient si une percussion extérieure P est appliquée à la pierre, par exemple par un coup de marteau donné à la pierre au repos (rappelons que la ficelle est tendue) ; son travail virtuel est

$$\tau_{\text{ext}}(V^+, V^-) = P \frac{V_{\text{ext}}^+(l) + V_{\text{ext}}^-(l)}{2}.$$

■ Équations du mouvement

Les équations du mouvement résultent du principe. Elles sont

$$\begin{aligned} \rho(U_{\text{int}}^+ - U_{\text{int}}^-) &= \frac{d\Sigma}{dx}, \text{ dans }]0, s[\cup]s, l[, \\ \Sigma(0) &= -R(0), \\ [\Sigma(s)] &= 0, \Sigma(s) = -R(s), \\ m(U_{\text{ext}}^+(l) - U_{\text{ext}}^-(l)) + \Sigma(l) &= P, \Sigma(l) = -R(l). \end{aligned} \quad (1)$$

■ Inégalités utiles

La conservation de l'énergie et le second principe de la thermodynamique donnent par un calcul qui suppose que la température ne change pas pendant la collision [2, 4], des inégalités utiles pour choisir les lois de comportement

$$\begin{aligned} 0 \leq \Sigma \frac{d}{dx} \left(\frac{U_{\text{int}}^+ + U_{\text{int}}^-}{2} \right), \text{ dans }]0, s[\cup]s, l[, \\ 0 \leq -R(x) \left[\frac{U^+(x) + U^-(x)}{2} \right], \text{ aux points } x = 0, s, l. \end{aligned} \quad (2)$$

■ Lois de comportement

Les lois de comportement pour Σ et $R(x)$, qui doivent vérifier (2), sont choisies avec une fonction de dissipation linéique Φ , et des fonctions de dissipation ponctuelles Φ_s .

> Fonctions de dissipation de la barre et du plafond

La fonction de dissipation linéique choisie est

$$\Phi \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{U_{\text{int}}^+ + U_{\text{int}}^-}{2} \right) \right) = k_0 \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{U_{\text{int}}^+ + U_{\text{int}}^-}{2} \right) \right| + k_1 \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{U_{\text{int}}^+ + U_{\text{int}}^-}{2} \right) \right|^2,$$

où k_0 et k_1 sont des constantes physiques positives.

La fonction de dissipation ponctuelle de fracturation aux points $x = 0$ et $x = s \in]0, l[$ choisie est

$$\begin{aligned} \Phi_x \left(\left[\frac{U^+(x) + U^-(x)}{2} \right] \right) &= \sqrt{2} k_2(x) \sqrt{\left[\frac{U^+(x) + U^-(x)}{2} \right]} \\ + k_3(x) \left[\frac{U^+(x) + U^-(x)}{2} \right] &+ I_+ \left(\left[U^+(x) + U^-(x) \right] \right), \text{ à } x = 0, s, \end{aligned}$$

où $[U(0)] = U_{\text{int}}(0) - U_{\text{ext}}(0)$ et $k_2(x), k_3(x), x \in [0, l[$, sont des fonctions positives. La fonction de dissipation linéique est un pseudo-potentiel de dissipation, c'est-à-dire une fonction convexe, positive et nulle à l'origine, qui assure un comportement classique en dehors des fractures. La fonction de dissipation de fracture n'est pas un pseudo-potentiel. Cela paraît nécessaire car un pseudo-potentiel assure un comportement progressif dont le modèle est le comportement linéaire où le résultat est proportionnel à l'action. Le comportement recherché pour la fracturation n'est pas de ce type : il doit y avoir un seuil avec un comportement différent de part et d'autre de ce seuil. La formation d'une fracture ne peut être due à un effet progressif où une petite action créerait une petite fracture et une grande action une grande fracture. Il faut une loi de comportement qui demande une grande action pour produire une fracture dont la taille potentielle peut

être mesurée par la vitesse d'écartement $\left[\left(U^+ + U^-\right)/2\right]$. On peut encore dire que dans le plan (efforts R, vitesses $\left[\left(U^+ + U^-\right)/2\right]$, le domaine qui est au voisinage de l'origine ne doit pas être atteint par la courbe représentant la loi de comportement, comme c'est le cas pour une loi de comportement provenant d'un pseudo-potential de dissipation. L'effet recherché résulte de la fonction $\sqrt{2}k_2\sqrt{\left[\left(U^+ + U^-\right)/2\right]}$ qui assure en plus qu'il n'y a pas beaucoup de fractures avec de petites discontinuités de vitesse. La fonction indicatrice I_+ de \mathbb{R}^+ prend en compte la condition de non-interpénétration aux points de fracture $x = 0$ et $x = s$

$$\left[U^+(x)\right] \geq 0. \quad (3)$$

> Fonction de dissipation du système pierre-ficelle

La fonction de dissipation Φ_l au point $x = l$ décrit le comportement de la pierre et de la ficelle attachée au lustre. Elle est différente de la fonction de dissipation de fracture aux autres points x car il n'y pas de condition de non-interpénétration. Le comportement dépend de la direction du mouvement après la collision : vers le bas ou vers le haut.

Rappelons qu'à l'instant où le système est considéré, la pierre est sous le lustre et la ficelle est tendue. La distance de la pierre au lustre est égale à la longueur de la ficelle. La vitesse relative de la pierre par rapport au lustre avant la collision

$$\chi = U_{\text{ext}}^-(l) - U_{\text{int}}^-(l),$$

ne peut être que positive ou nulle

$$\chi \geq 0. \quad (4)$$

Elle ne peut être négative car la distance de la pierre au lustre est maximale (la dérivée à gauche de cette distance ne peut être négative : $\chi > 0$ si la pierre tombe et $\chi = 0$ si elle est au repos). On considère la vitesse relative après la collision

$$W^+ = U_{\text{ext}}^+(l) - U_{\text{int}}^+(l) = \left[U^+(l) + U^-(l)\right] - \chi.$$

Si $W^+ < 0$, la ficelle se détend, si $W^+ \geq 0$, la ficelle reste tendue ou se casse. La fonction de dissipation Φ_l doit décrire ce comportement unilatéral. La fonction Φ_l , qui est déjà une fonction de $\left[\left(U^+(l) + U^-(l)\right)/2\right]$, dépend donc aussi de $\chi = U_{\text{ext}}^-(l) - U_{\text{int}}^-(l)$. Cette quantité est bien déterminée par l'évolution passée, comme cela est nécessaire, [1, 2]. On choisit alors $\Phi_l = 0$ quand $W^+ < 0$, qui exprime qu'il n'y a pas d'interaction entre le lustre et la pierre quand la ficelle se détend, et Φ_l égale à une fonction de dissipation de fracture lorsque $W^+ \geq 0$, c'est-à-dire lorsque la ficelle reste tendue ou se casse :

$$\Phi_l \left(\left[\frac{U^+(l) + U^-(l)}{2} \right], \chi \right) = \sqrt{2}k_2(l) \sqrt{\text{pp} \left\{ \frac{W^+}{2} \right\}} + k_3(l) \text{pp} \left\{ \frac{W^+}{2} \right\}, \quad (5)$$

$$W^+ = \left[U^+(l) + U^-(l) \right] - \chi,$$

où la fonction partie positive pp est définie par

$$\text{pp}\{x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Pour simplifier, on choisit le lustre homogène

$$\forall x \in]0, l[, k_2(x) = k_2^i, k_3(x) = k_3^i,$$

et on définit

$$\begin{aligned} k_2(0) &= k_2^0, k_3(0) = k_3^0, \\ k_2(l) &= k_2^l, k_3(l) = k_3^l. \end{aligned}$$

Toujours pour simplifier, on suppose

$$k_2^0 = k_2^i = k_2^l = k_2.$$

► Lois de comportement

La fonction Φ est un pseudo-potentiel de dissipation, et

$$\begin{aligned} \partial\Phi(X) &= k_0 \operatorname{sgn}(X) + 2k_1 X \\ &= k_0 \operatorname{sgn}(2X) + k_1 2X, \end{aligned}$$

où le graphe du signe sgn est défini par

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ [-1, 1], & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La fonction de dissipation Φ_x n'est pas un pseudo-potentiel de dissipation car ce n'est pas une fonction convexe de $\left[\frac{U^+ + U^-}{2}\right]$. Cependant Φ_x peut être découpé en une fonction convexe, Φ_x^c , et une fonction différentiable, Φ_x^{nc} . Sa dérivée généralisée $\bar{\partial}\Phi_x$ est la somme du sous-différentiel de la partie convexe et de la dérivée de la partie non convexe. Elle est pour $x = 0$ et $x = s$

$$\bar{\partial}\Phi_x(X) = \frac{\partial\Phi_x^{nc}}{\partial X}(X) + \partial\Phi_x^c(X) = \begin{cases} \frac{k_2(x)}{\sqrt{2}\sqrt{X}} + k_3(x), & \text{si } X > 0, \\ \mathbb{R}, & \text{si } X = 0, \\ \emptyset, & \text{si } X < 0, \end{cases}$$

et pour $x = l$

$$\bar{\partial}\Phi_l(X) = \frac{\partial\Phi_l^{nc}}{\partial X}(X, \chi) + \partial\Phi_l^c(X, \chi) = \begin{cases} \frac{k_2(x)}{\sqrt{2}\sqrt{Y}} + k_3^l, & \text{si } Y = X - \chi > 0, \\ \mathbb{R}^+, & \text{si } Y = X - \chi = 0, \\ 0, & \text{si } Y = X - \chi < 0, \end{cases}$$

Remarque : L'ensemble sous-différentiel généralisé de $\Phi_l(X, \chi)$ par rapport à X dépend de χ . Par souci de simplicité, on ne mentionne pas χ et l'on note $\bar{\partial}\Phi_l(X)$ le sous-différentiel généralisé.

Les lois de comportement sont

$$\begin{aligned} \Sigma &\in \partial\Phi\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{U_{\text{int}}^+ + U_{\text{int}}^-}{2}\right)\right) \\ &= k_0 \operatorname{sgn}\left(\frac{d}{dx}(U_{\text{int}}^+ + U_{\text{int}}^-)\right) + k_1 \frac{d}{dx}(U_{\text{int}}^+ + U_{\text{int}}^-), \end{aligned} \quad (6)$$

$$-R(x) \in \bar{\partial}\Phi_x\left(\left[\frac{U^+(x) + U^-(x)}{2}\right]\right), \text{ à } x = 0, s, l. \quad (7)$$

La percussion $-R(x)$ n'est pas une fonction monotone de $\left[U^+(x) + U^-(x) \right]$, comme cela serait le cas pour un effet progressif et proportionnel à l'action. Au contraire, il est bon que la loi ne soit pas progressive et impose un effort notable pour avoir un effet, c'est-à-dire une fracture. Dans le plan $\left(R(x), \left[\frac{U^+(x) + U^-(x)}{2} \right] \right)$, le voisinage de l'origine est proscrit. On peut encore dire qu'un pseudo-potentiel de dissipation décrit des phénomènes progressifs. Si l'on veut décrire des actions non progressives et contrastées, des fonctions de dissipation non convexes semblent s'imposer.

■ Équations pour le système lustre-pierre

Le lustre, schématisé par la barre de longueur l , est au repos à l'instant de la collision : $U^-(x) = 0, x \in [0, l]$. La vitesse du plafond reste nulle : $U_{\text{ext}}^-(0) = U_{\text{ext}}^+(0) = 0$. Dans ce paragraphe, le nombre de fractures n'est plus précisé, il peut y en avoir beaucoup, quelques-unes ou aucune. On définit $S(U_{\text{int}})$, l'ensemble des sauts, c'est-à-dire l'ensemble des abscisses des fractures (ou l'ensemble des points de discontinuité de la vitesse) :

$$S(U_{\text{int}}) = \{s \in]0, l[\mid x \rightarrow U_{\text{int}}(x) \text{ ext discontinu au point } s\}.$$

Les équations résultent des équations du mouvement (1), des lois de comportement (6), (7) et des conditions initiales

$$U^- = \{U_{\text{int}}^-, U_{\text{ext}}^-(0), U_{\text{ext}}^-(l)\} = \{0, 0, U_{\text{ext}}^-(l)\}.$$

avec $U_{\text{ext}}^-(l) \geq 0$ vérifiant (4), (la pierre est en train de tomber avant la collision et l'application de la percussion P). Elles sont

$$\begin{aligned} \rho U_{\text{int}}^+ - \frac{d\Sigma}{dx} &= 0, \text{ dans }]0, l[\setminus S(U_{\text{int}}^+), \\ [\Sigma](s) &= 0, \text{ dans } S(U_{\text{int}}^+), \\ \Sigma &= k_0 \operatorname{sgn} \left(\frac{d}{dx} (U_{\text{int}}^+ + U_{\text{int}}^-) \right) + k_1 \frac{d}{dx} (U_{\text{int}}^+ + U_{\text{int}}^-), \text{ dans }]0, l[\setminus S(U_{\text{int}}^+), \\ \Sigma(x) &\in \bar{\partial}\Phi_x \left(\left[\frac{U^+(x) + U^-(x)}{2} \right] \right), \text{ dans } S(U_{\text{int}}^+) \cup \{0, l\}, \\ U_{\text{ext}}^+(0) &= 0, \\ mU_{\text{ext}}^+(l) + \Sigma(l) &= mU_{\text{ext}}^-(l) + P. \end{aligned} \tag{8}$$

Les inconnues sont le triplet $U^+ = \{U_{\text{int}}^+, U_{\text{ext}}^+(0), U_{\text{ext}}^+(l)\}$ dépendant du triplet U^- . On note que le nombre, éventuellement infini, et la position des fissures, font partie des inconnues.

■ Formulation variationnelle

On cherche un triplet $U^+ = \{U_{\text{int}}^+, 0, U_{\text{ext}}^+(l)\}$ qui minimise une fonctionnelle dont les équations d'Euler sont les équations précédentes. On peut choisir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U^+) &= \int_{]0, l[\setminus S(U_{\text{int}}^+)} \Xi \left(\frac{dU_{\text{int}}^+}{dx} \right) dx \\ &+ \sum_{x \in S(U_{\text{int}}^+)} \left\{ \Xi_x \left(\left[U^+(x) \right] \right) \right\} + \Xi_0 \left(\left[U^+(x) \right] \right) + \Xi_l \left(\left[U^+(l) + U^-(l) \right], \chi \right) \\ &+ \int_0^l \frac{\rho}{2} (U_{\text{int}}^+)^2 dx + \frac{m}{2} (U_{\text{ext}}^+(l))^2 - mU_{\text{ext}}^+(l)U_{\text{ext}}^-(l) - PU_{\text{ext}}^+(l), \end{aligned} \tag{9}$$

avec

$$\begin{aligned} \Xi \left(\frac{d}{dx} (U_{\text{int}}^+ + U_{\text{int}}^-) \right) &= k_0 \left| \frac{d}{dx} (U_{\text{int}}^+ + U_{\text{int}}^-) \right| + \frac{k_1}{2} \left| \frac{d}{dx} (U_{\text{int}}^+ + U_{\text{int}}^-) \right|^2, \\ \Xi_x \left([U^+(x) + U^-(x)] \right) &= 2k_2(x) \sqrt{[U^+(x) + U^-(x)]} \\ + k_3(x) [U^+(x) + U^-(x)] &+ I_+ \left([U^+(x) + U^-(x)] \right), \text{ aux points } x = 0, s, \\ \Xi_l \left([U^+(l) + U^-(l)], \chi \right) &= 2k_2(l) \sqrt{pp\{W^+\}} + k_3(l) pp\{W^+\}, \\ W^+ &= [U^+(l) + U^-(l)] - \chi, \end{aligned}$$

Le problème à résoudre est

$$\inf \{ \mathcal{F}(V) \mid V = \{V_{\text{int}}, V_{\text{ext}}(0) = 0, V_{\text{ext}}(l)\}, V_{\text{int}} \in \text{SBV}(0, l), V_{\text{ext}}(l) \in \mathbb{R} \}, \quad (10)$$

où $\text{SBV}(0, l)$ est l'espace des fonctions à variation bornée assez régulières dites spéciales (leur dérivée n'a pas de partie cantorienne qui peut correspondre à une zone totalement détruite ou transformée en poudre), [5-8].

On peut montrer que le problème (10) possède des solutions [4], si

$$k_3^i \geq \max \{ k_3^0, k_3^l \}. \quad (11)$$

Cette hypothèse signifie qu'une fracture proche d'une extrémité de la barre est avantagement remplacée par une fracture à cette extrémité dont la résistance est plus faible. Quand l'hypothèse (11) n'est pas vérifiée, la solidité de la ficelle ou la solidité de la fixation du lustre au plafond est plus grande que la solidité du matériau constituant le lustre. En pratique, une fracture a alors tendance à apparaître auprès des attaches : c'est le cas de deux pièces de béton solidement collées l'une sur l'autre (quand une fracture se produit, elle est proche de la partie collée mais en est nettement distincte). Une façon de surmonter cette difficulté est tout simplement de donner une épaisseur à la fixation et une longueur à la ficelle (pour le béton on prend en compte l'épaisseur de la couche dans laquelle la colle a diffusé). On peut aussi supposer que les coefficients k_2^0 et k_2^l sont différents de k_2^i mais pour conserver le théorème, ils doivent vérifier

$$k_2^i \geq \max \{ k_2^0, k_2^l \},$$

avec la même signification physique que (11).

EXEMPLE : UNE PERCUSSION EST APPLIQUÉE À LA PIERRE AU REPOS

On étudie la situation où $U_{\text{ext}}^-(l) = 0$ et $P \neq 0$. On suppose qu'il n'y a pas de fracture à l'intérieur de la barre (on prouve plus bas que si P n'est pas trop grand, il est possible d'avoir de telles solutions). On cherche une solution telle que $dU_{\text{int}}^+/dx = 0$. À l'intérieur du lustre $]0, l[$ la vitesse est donc constante et positive pour satisfaire la condition de non-interpénétration au point $x = 0$: $U_{\text{int}}^+(0) = U_d^+(0) = U \geq 0$. En ce point, la vitesse à gauche, la vitesse extérieure, celle du plafond est nulle, $U_g^+(0) = U_{\text{ext}}^+(0) = 0$. Au point $x = l$, la vitesse à droite, la vitesse extérieure, celle de la pierre, est $U_d^+(l) = U_{\text{ext}}^+(l) = Z$. Les équations sont

$$\rho U_{\text{int}}^+ = \frac{d\Sigma}{dx}, |\Sigma| \leq k_0, U^+(x) = U \geq 0, \text{ dans }]0, l[,$$

$$\begin{aligned}\Sigma(0) &= \frac{k_2}{\sqrt{U}} + k_3^0 + \partial I_+(U), \\ mZ + \Sigma(l) &= P, \\ \Sigma(l) &= \frac{k_2}{\sqrt{Z-U}} + k_3^l, \text{ si } (Z-U) > 0, \\ \Sigma(l) &\geq 0, \text{ si } (Z-U) = 0, \Sigma(l) = 0, \text{ si } (Z-U) < 0.\end{aligned}$$

Pour avoir $|\Sigma| \leq k_0$, il faut que

$$\Sigma(l) \leq k_0,$$

puisque $0 \leq \Sigma(0) \leq \Sigma(l)$. Les conditions pour avoir cette condition sont

- quand $Z - U > 0$ et $U > 0$, on a

$$0 \leq \Sigma(0) \leq \Sigma(l) = \frac{k_2}{\sqrt{Z-U}} + k_3^l,$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial Z} = \frac{k_2}{\sqrt{Z-U}} + k_3^l + mZ - P = 0.$$

La condition est donc

$$P - mZ \leq k_0; \quad (12)$$

- quand $Z - U = 0$ et $U = 0$, on doit avoir

$$\Sigma(l) = \frac{k_2}{\sqrt{U}} + k_3^0 + \rho l U \leq k_0,$$

mais

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial U} = \frac{k_2}{\sqrt{U}} + k_3^0 + \rho l U + mU - P = 0,$$

la condition est encore

$$P - mU \leq k_0; \quad (13)$$

- quand $Z - U = 0$ et $U = 0$, on doit avoir

$$\Sigma(x) = P \leq k_0. \quad (14)$$

- quand $Z - U < 0$ et $U = 0$, on a $\Sigma(x) = 0$ et il n'y a pas de condition.

Dans la suite, on suppose que k_0 est assez grand pour que $P \leq k_0$, les conditions (12), (13) et (14) sont alors vérifiées. Quand une de ces conditions n'est pas vérifiée, l'hypothèse que $dU_{\text{int}}^+ / dx = 0$ et celle qu'il n'y a qu'une seule fracture doivent être abandonnées dans la recherche de solutions.

La fonctionnelle à minimiser est

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(U, Z) &= 2k_2\sqrt{U} + k_3^0 U + 2k_2\sqrt{\rho\rho\{Z-U\}} + k_3^l \rho\rho\{Z-U\} \\ &\quad + \frac{\rho l}{2} U^2 + \frac{m}{2} Z^2 - PZ + I_+(U),\end{aligned}$$

Le comportement dépend de la solidité relative de la ficelle et de la fixation du lustre au plafond. On examine les deux situations : d'abord, c'est la ficelle qui est la plus solide, ensuite c'est la fixation au plafond.

■ Le lustre n'est pas bien fixé au plafond et la ficelle est solide

Supposons que la ficelle soit plus solide que la fixation au plafond. Cela est quantifié par l'inégalité $k_3^l \gg k_3^0$. On choisit

$$k_2 = 1, m = 1, \rho l = 1, k_3^0 = 1, k_3^l = 10^6.$$

L'hypothèse (11) est vérifiée en choisissant k_3^l assez grand. On pose

$$Y = Z - U.$$

La fonction $\mathcal{F}(U, Z)$ devient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U, Y + U) &= \mathcal{G}(U, Y) \\ &= 2\left(\sqrt{U} + \sqrt{pp\{Y\}}\right) + U + 10^6 pp\{Y\} + \frac{U^2}{2} + \frac{(U+Y)^2}{2} - P(U+Y) + I_+(U). \end{aligned}$$

On résout

$$\inf \{ \mathcal{G}(U, Y) \mid U \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R} \},$$

figure 1

$P = 4$, variation de \mathcal{G} par rapport à U pour $Y = 0$. Il y a deux minima absolus, l'un pour $U = 1$ et l'autre pour $U = 0$.

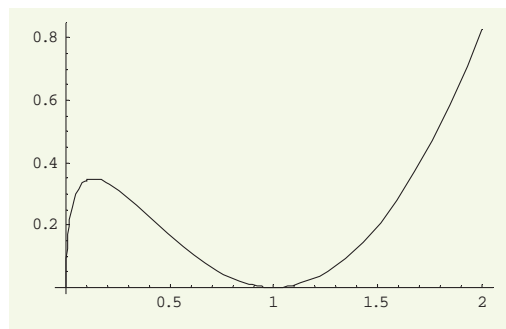
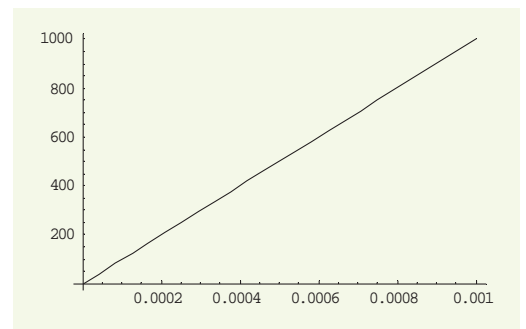


figure 2

$P = 4$, variation de \mathcal{G} par rapport à Y pour $U = 1$.



et on discute les résultats par rapport aux valeurs de la percussion P . Quatre cas sont distingués.

› La percussion P est grande et positive

Dans ce cas, le minimum absolu est obtenu pour U et Y grands. Pour $P = 3 \times 10^6$, \mathcal{G} est minimal au point $U \approx Y = 10^6$. Ce minimum absolu pour $U > Y > 0$ doit être comparé au minimum relatif qui existe en un point où $Y = 0$ et $U > 0$. La valeur de \mathcal{G} en ce point diminue quand P décroît.

› La percussion P est moyenne et positive

Le minimum absolu finit par être en un point où $Y = 0$ quand P a suffisamment décré. Par exemple, pour $P = 100$, le minimum absolu est au point $U = 49,4$, $Y = 0$. Ce minimum absolu doit alors être comparé au minimum relatif situé à l'origine, $U = Y = 0$.

› La percussion P est petite et positive

Quand P décroît, le minimum absolu finit par être atteint à l'origine $U = Y = 0$. Ce changement a lieu pour $P = 4$. Pour cette valeur, le minimum absolu est atteint aux deux points $U = Y = 0$ et $U = 1$, $Y = 0$. Pour $0 < P < 4$, le minimum absolu est atteint au point $U = Y = 0$. Les figures 1 à 5 illustrent cette propriété.

› La percussion P est négative

Le minimum de $\mathcal{G}(U, Y)$ est alors atteint au point $U = 0$ et $Y < 0$. La contrainte $\Sigma(x) = 0$ et rien n'arrive au lustre. La vitesse de la pierre est obtenue en minimisant

$$\mathcal{G}(0, Y) = \frac{Y^2}{2} - PY,$$

figure 3

$P = 4$, variation de \mathcal{G} par rapport à U et Y .

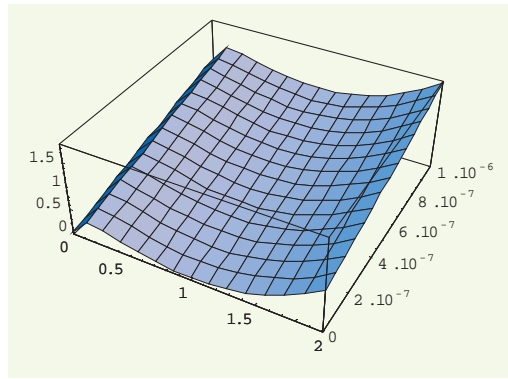


figure 4

$P = 3, 7$: variation de \mathcal{G} par rapport à U pour $Y = 0$. Le minimum absolu est obtenu pour $U = 0$.

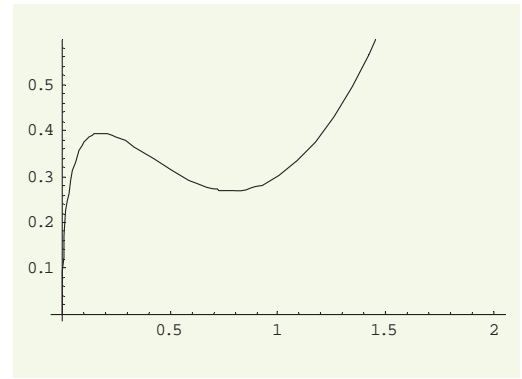
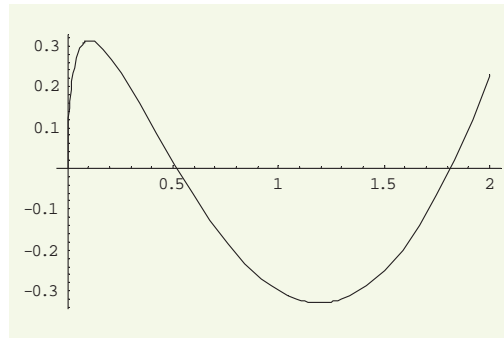


figure 5

$P = 4, 3$, variation de \mathcal{G} par rapport à U pour $Y = 0$. Le minimum absolu est obtenu pour $U = 1, 2$.



ou par la dernière des équations (8)

$$mU_{\text{ext}}^+(l) + \Sigma(l) = mU_{\text{ext}}^-(l) + P,$$

qui donne

$$mU_{\text{ext}}^+(l) = P.$$

La percussion P propulse la pierre vers le haut sans interférer avec le lustre conformément à l'expérience ou à ce qu'on imagine être l'expérience si l'on n'a pas de lustre à détruire.

■ Le lustre est bien fixé au plafond et la ficelle n'est pas solide

Dans ce cas, on a k_3^0 grand et k_3^l petit : $k_3^0 \gg k_3^l$. Par exemple, $k_3^0 = 10^6$ et $k_3^l = 1$ et l'on garde $k_2 = 1$, $m = 1$, $\rho l = 1$. On prouve que le lustre reste fixé au plafond et que la ficelle casse quand la percussion est grande.

Proposition 1. Quand $P > 0$ le minimum absolu de

$$\mathcal{G}(U, Y) = 2\left(\sqrt{U} + \sqrt{\text{pp}\{Y\}}\right) + k_3^0 U + k_3^l \text{pp}\{Y\} + \frac{U^2}{2} + \frac{(U+Y)^2}{2} - P(U+Y) + I_+(U),$$

est atteint pour $U = 0$ si $k_3^0 \gg k_3^l$, en fait si

$$k_3^0 = k_3^l \geq \frac{1}{2^{1/3}}.$$

Le lustre n'est donc jamais arraché du plafond. La ficelle casse si P est plus grand que $1 + 2^{2/3} + 2^{-1/3} = 3,3811$. Pour cette valeur, la vitesse de la pierre est $Y = 2^{2/3}$.

■ Synthèse

Résumons les résultats précédents en termes pratiques.

(1) Quand la fixation du lustre au plafond est moins solide que la ficelle :

- quand la percussion P dirigée vers le bas est grande mais plus petite que k_0 : le lustre est arraché du plafond et la ficelle est cassée. Le système est cassé en trois morceaux ;
- quand la percussion dirigée vers le bas est d'intensité moyenne : le lustre est arraché du plafond mais la ficelle n'est pas cassée. Le système est cassé en deux morceaux ;
- quand la percussion dirigée vers le bas est de faible intensité : il ne se passe rien. Tout reste au repos après la percussion ;
- quand la percussion est dirigée vers le haut : il n'arrive rien au lustre. La pierre est propulsée vers le haut.

(2) Quand la fixation du lustre est plus solide que la ficelle :

- quand la percussion dirigée vers le bas est grande mais plus petite que k_0 : la ficelle est cassée. Le système est cassé en deux morceaux ;
- quand la percussion dirigée vers le bas est petite : il ne se passe rien. Tout reste au repos après la percussion ;
- quand la percussion est dirigée vers le haut : il n'arrive rien au lustre. La pierre est propulsée vers le haut.

Ces résultats sont en accord avec ce qu'on imagine devoir se passer si on faisait l'expérience (ou des expériences similaires). Ils montrent l'aptitude de la théorie à rendre compte des résultats expérimentaux de base, même si les lois de comportement sont très simples. On remarque que les fractures sont caractérisées seulement par deux quantités, k_3 qui caractérise la cohésion du matériau et l'apparition de fractures, et k_2 qui caractérise la vitesse d'ouverture de la fracture.

› Une fracture à l'intérieur du lustre ?

Si on suppose qu'il y a une fracture à l'intérieur de la barre, la fonction \mathcal{F} devient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U, Z, W, s) = & 2k_2\sqrt{U} + k_3^0 U + 2k_2\sqrt{W-U} + k_3^1 (W-U) \\ & 2k_2\sqrt{\rho p \{Z-W\}} + k_3^1 \rho p \{Z-W\} + \frac{\rho s}{2} U^2 + \frac{\rho(l-s)}{2} W^2 + \frac{m}{2} Z^2 - PZ \\ & + I_+(U) + I_+(W-U), \end{aligned}$$

où W est la vitesse à droite sur la fracture intérieure et s est l'abscisse de cette fracture. La recherche du minimum de cette fonction par rapport à s montre que :

soit la fracture intérieure est l'une des extrémités et n'est plus intérieure, soit

$$\frac{\partial \mathcal{F}(U, Z, W, s)}{\partial s} = \frac{\rho}{2} U^2 - \frac{\rho}{2} W^2 = 0,$$

qui montre qu'une fracture impose que $U = -W$. Mais les conditions de non-interpénétration sur la fracture et au plafond imposent

$$W - U = -2U \geq 0, \text{ et } U \geq 0.$$

Ces relations montrent qu'il n'y a pas de fracture à l'intérieur (car $U = W = 0$) et cela semble en accord avec ce que l'on imagine être l'expérience.

UN AUTRE EXEMPLE : LA PIERRE TOMBE

On a alors $U_{\text{ext}}^-(l) > 0$ en accord avec la relation (4), et $P = 0$. Avec les hypothèses du paragraphe précédent, la fonction $\mathcal{F}(U, Z)$ devient

$$\mathcal{F}(U, Z) = 2k_2\sqrt{U} + k_3^0 U + 2k_2\sqrt{pp\{Z-U\}} + k_3^1 pp\{Z-U\} + \frac{\rho l}{2} U^2 + \frac{m}{2} Z^2 - mU_{\text{ext}}^-(0)Z + I_+(U).$$

En posant

$$P = mU_{\text{ext}}^-(0),$$

le problème est en terme mathématique équivalent à celui du paragraphe précédent. Les conclusions mécaniques sont qualitativement les mêmes. Elles sont celles qu'on attend :

(1) Quand la fixation du lustre est plus faible que la ficelle :

- quand la vitesse $U_{\text{ext}}^-(0)$ est grande sans être trop grande ($mU_{\text{ext}}^-(0) < k_0$ pour avoir $|\Sigma| < k_0$), le lustre est arraché du plafond et la ficelle est cassée. Le système est cassé en trois morceaux ;
- quand elle est moyenne, le lustre est arraché du plafond mais la ficelle n'est pas cassée. Le système est cassé en deux morceaux ;
- quand elle est faible, il n'arrive rien au lustre. La pierre ne rebondit pas après la collision.

(2) Quand la fixation est plus solide que la ficelle :

- quand la vitesse $U_{\text{ext}}^-(0)$ est grande mais pas trop grande, la ficelle est cassée ;
- quand elle est faible, il n'arrive rien au lustre. La pierre ne rebondit pas après la collision.

En pratique, on sait bien que laisser tomber la pierre a le même effet que lui donner un coup de marteau.

SITUATION GÉNÉRALE

Pour simplifier la présentation, on suppose qu'un solide, par exemple le rocher, heurte un plan fixe, par exemple un mur d'une très grande solidité le rendant pratiquement indestructible dans la situation considérée. Le cas où le mur est lui aussi fragile se fait de la même façon mais avec des équations plus longues.

■ Équations du mouvement

Elles résultent du principe des travaux virtuels dans lequel le travail des efforts intérieurs définit les contraintes de percussion volumique Σ dans le domaine Ω occupé par le rocher et les percussions de surface \vec{R} sur les fractures dont la position est inconnue ainsi que sur la surface de contact $\partial\Omega_0$ avec le plan fixe. Sur l'autre partie $\partial\Omega_1$ de la frontière, une percussion peut être appliquée, par exemple si l'on donne un coup de masse pour briser le rocher qui repose sur le plan (dans cette circonstance la vitesse avant la collision est nulle).

$$\begin{aligned} \rho(\vec{U}^+ - \vec{U}^-) &= \text{div } \Sigma, \text{ dans } \Omega \setminus \Gamma, \\ [\Sigma] \vec{N} &= 0, \Sigma \vec{N} = -\vec{R}, \text{ sur } \Gamma, \\ \Sigma \vec{N} &= -\vec{R}, \text{ sur } \partial\Omega_0, \\ \Sigma \vec{N} &= \vec{P}_{\text{ext}} \text{ sur } \partial\Omega_1. \end{aligned} \tag{15}$$

Les lois de la mécanique donnent les inégalités que doivent vérifier les travaux des percussions intérieures

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Sigma : D\left(\frac{\bar{U}^+ + \bar{U}^-}{2}\right), \text{ dans } \Omega \setminus \Gamma, \\ 0 &\leq -\bar{R} \cdot \left[\frac{\bar{U}^+ + \bar{U}^-}{2}\right] \text{ sur } \Gamma, \quad 0 \leq \bar{R} \cdot \frac{\bar{U}^+ + \bar{U}^-}{2} \text{ sur } \partial\Omega_0 \end{aligned} \quad (16)$$

où le tenseur de déformation $D(\bar{V})$ est défini par

$$D(\bar{V})_{i,j} = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i}).$$

■ Lois de comportement

Les lois de comportement qui doivent vérifier les inégalités précédentes sont définies avec des fonctions de dissipation : la fonction de dissipation de volume Φ , la fonction de dissipation surfacique de fracture Φ_s et la fonction de dissipation de contact Φ_0 . On note $|\bar{X}| = \sqrt{X_i X_i}$ la longueur d'un vecteur et $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{A_{ij} A_{ij}}$ la norme d'un tenseur symétrique. La fonction de dissipation volumique choisie est

$$\Phi\left(D\left(\frac{\bar{U}^+ + \bar{U}^-}{2}\right)\right) = k_0 \left\| D\left(\frac{\bar{U}^+ + \bar{U}^-}{2}\right) \right\| + k_1 \left\| D\left(\frac{\bar{U}^+ + \bar{U}^-}{2}\right) \right\|^2.$$

La fonction de dissipation de fracture choisie est

$$\begin{aligned} \Phi_s\left(\left[\frac{\bar{U}^+ + \bar{U}^-}{2}\right]\right) &= \sqrt{2}k_2 \sqrt{\left\| \left[\frac{\bar{U}^+ + \bar{U}^-}{2}\right] \right\|} + k_3 \left\| \left[\frac{\bar{U}^+ + \bar{U}^-}{2}\right] \right\| \\ &+ I_+\left(\left[\frac{\bar{U}^+ + \bar{U}^-}{2}\right] \cdot \bar{N}\right), \end{aligned}$$

où \bar{N} est la normale à la fracture, et la fonction de dissipation de contact

$$\Phi_0\left(\frac{\bar{U}^+ + \bar{U}^-}{2}, \frac{\bar{U}^-}{2}\right) = I_-\left(\bar{U}^+ \cdot \bar{N}\right),$$

où \bar{N} est la normale extérieure au domaine Ω . Les termes notés k sont des constantes positives. La fonction de dissipation volumique est un pseudo-potentiel qui assure un comportement classique en dehors des fractures. La fonction de dissipation de fracture n'est pas un pseudo-potentiel. Comme on l'a déjà vu, cela est nécessaire pour avoir un seuil avec des comportements différents de part et d'autre du seuil. L'effet recherché résulte de la fonction $\sqrt{2}k_2 \sqrt{\left\| \left[\frac{\bar{U}^+ + \bar{U}^-}{2}\right] \right\|}$ qui assure en plus qu'il n'y a pas beaucoup de fractures avec de petites discontinuités de vitesse. La fonction indicatrice I_+ de \mathbb{R}^+ prend en charge la condition de non-interpénétration des lèvres des fractures

$$\left[\bar{U}^+\right] \cdot \bar{N} \geq 0.$$

La fonction Φ_0 assure la non-interpénétration sur la surface de contact $\partial\Omega_0$. La fonction Φ_s peut être découpée en une partie convexe, Φ_s^c et en une partie différentiable, Φ_s^{nc} . Sa dérivée généralisée est la somme du sous-différentiel de la partie convexe et de la dérivée de la partie non-convexe

$$\bar{\partial}\Phi_s\left(\left[\frac{\bar{U}^+ + \bar{U}^-}{2}\right]\right) = \frac{\partial\Phi_s^{nc}}{\partial\left[\left(\bar{U}^+ + \bar{U}^-\right)/2\right]}\left(\left[\frac{\bar{U}^+ + \bar{U}^-}{2}\right]\right) + \partial\Phi_s^c\left(\left[\frac{\bar{U}^+ + \bar{U}^-}{2}\right]\right).$$

Les lois de comportement sont

$$\begin{aligned} \Sigma &\in \partial\Phi\left(D\left(\frac{\bar{U}^+ + \bar{U}^-}{2}\right)\right), \\ -\bar{R} &\in \bar{\partial}\Phi_s\left(\left[\frac{\bar{U}^+ + \bar{U}^-}{2}\right]\right) \text{ dans } \Gamma, \bar{R} \in \partial I_-\left(\bar{U}^+ \cdot \bar{N}\right) \text{ dans } \partial\Omega_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Il est facile de voir que les inégalités (16) sont vérifiées.

■ Formulation variationnelle

Les équations pour trouver la vitesse après la collision dépendant de \bar{U}^- et de la percussion \bar{P}_{ext} résultent des équations du mouvement et des lois de comportement. Plutôt que de les écrire, on donne une fonctionnelle dont elles sont les équations d'Euler. Le problème à résoudre est alors de trouver une fonction \bar{U}^+ qui minimise la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\bar{V}) &= \int_{\Omega-\Gamma} \Xi\left(D(\bar{V} + \bar{U}^-)\right) d\Omega + \int_{\Gamma} \Xi_s\left(\left[\bar{V} + \bar{U}^-\right]\right) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{\rho}{2} (\bar{V})^2 - \rho \bar{V} \cdot \bar{U}^- d\Omega - \int_{\partial\Omega_1} \bar{V} \cdot \bar{P}_{\text{ext}}, \end{aligned}$$

où les fonctions Ξ et Ξ_s sont définies à partir des fonctions Φ et Φ_s

$$\begin{aligned} \Xi\left(D(\bar{V} + \bar{U}^-)\right) &= k_0 \left\| D(\bar{V} + \bar{U}^-) \right\| + \frac{k_1}{2} \left\| D(\bar{V} + \bar{U}^-) \right\|^2, \\ \Xi_s\left(\left[\bar{V} + \bar{U}^-\right]\right) &= 2k_2 \sqrt{\left| \left[\bar{V} + \bar{U}^-\right] \right|} + k_3 \left| \left[\bar{V} + \bar{U}^-\right] \right| + I_+\left(\left[\bar{V} + \bar{U}^-\right] \cdot \bar{N}\right). \end{aligned}$$

Rappelons encore que les fractures Γ , l'ensemble des surfaces de discontinuité de la vitesse, font partie des inconnues. Le problème est

$$\inf \left\{ \mathcal{F}(\bar{V}) \mid \bar{V} \in \text{SBD}(\Omega) \right\}, \quad (18)$$

où $\text{SBV}(\Omega)$ est l'ensemble des vitesses spéciales à déformation bornée [5-7]. Ces vitesses sont discontinues sur des surfaces et régulières en dehors. On peut montrer que le problème (18) a des solutions [9]. Sa résolution donne à la fois l'ensemble des fractures et les vitesses des différents morceaux produits par la fracturation.

CONCLUSION

L'hypothèse d'instantanéité et de concomitance des collisions et de la fracturation conduit à une théorie prévisionnelle qui prend en compte l'essentiel des propriétés physiques, comme le montre l'exemple du lustre. Les lois de comportement sont adaptées à une caractéristique inusuelle des phénomènes : l'effet n'est pas proportionnel à la cause. Elles sont très économes en paramètres physiques : quatre pour la situation générale, huit pour l'exemple du lustre qui fait intervenir trois éléments : le lustre lui-même, le plafond et la ficelle.

Les applications potentielles concernent le concassage, la fracturation et le dimensionnement des ouvrages de protection comme les casquettes qui protègent les routes de montagne. Avant de pouvoir se rapprocher des applications, il convient de disposer de moyens numériques adaptés. Cela n'est pas aujourd'hui très facile même si des pistes existent.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1 **FRÉMOND M.**, *Non-smooth thermomechanics*, Springer-Verlag, Heidelberg, **2001**.
- 2 **FRÉMOND M.**, *Collisions*, éditions du Dipartimento di Ingegneria Civile dell'Università di Roma Tor Vergata, Consiglio Nazionale delle Ricerche et l'Accademica, Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato, Rome, **2006**.
- 3 **BONETTI E., FRÉMOND M.**, *Collisions and fractures of solids*, **2004**, Vietnam Journal of Mathematics, Special issue **32**, pp. 167-186.
- 4 **BONETTI E., FRÉMOND M.**, *Collisions and fractures*, **2004**, a 1-D example : how to tear off a chandelier from the ceiling, Journal of Elasticity, **74**, **1**, pp. 47-66.
- 5 **AMBROSIO L., FUSCO N., PALLARA D.**, **2000**, *Special functions of bounded variations and free discontinuity problems*, Oxford University Press, Oxford.
- 6 **ATTOUCH H., BUTTAZZO G., MICHAILLE G.**, **2004**, *Variational analysis in Sobolev and BV spaces. Application to PDE and optimization*, MPS/SIAM series in optimization.
- 7 **BRAIDES A.**, **1998**, *Approximation of free discontinuity problems*, Springer-Verlag, Berlin.
- 8 **MOREAU J.-J.**, Bounded variation in time, in : MOREAU J.-J., P.D. PANAGIOTOPOULOS, G. STRANG, (eds), in *Topics in non-smooth mechanics*, **1988**, Birkhauser, Basel, Chap. **I**, **1-71**.
- 9 **BONETTI E., FRÉMOND M.**, **2004**, *Collisions and fractures*, *Rend. Mat. Acc. Lincei*, serie **9**, vol. **XV**, fasc. **1**, 47-57.