

Écoulements granulaires bidisperses sur plan incliné : loi de frottement et modèle bicouche

Pierre ROGNON

*Université Paris-Est, Laboratoire Navier,
LCPC-ENPC-CNRS, Champs-sur-Marne, France*

CEMAGREF, Saint-Martin d'Hères, France

Jean-Noël ROUX

*Université Paris-Est, Laboratoire Navier,
LCPC-ENPC-CNRS, Champs-sur-Marne, France*

Mohamed NAAIM

CEMAGREF, Saint-Martin d'Hères, France

François CHEVOIR*

*Université Paris-Est, Laboratoire Navier,
LCPC-ENPC-CNRS, Champs-sur-Marne, France*

■ RÉSUMÉ

On étudie par simulation numérique discrète l'écoulement dense d'un mélange bidisperse de disques sur un plan incliné rugueux. On s'intéresse aux écoulements stationnaires et uniformes, une fois qu'une ségrégation stable s'est installée dans la couche en écoulement. Le matériau peut en général être décomposé en trois couches : une couche de petits grains près du socle rugueux, une couche superficielle de gros grains et une couche intermédiaire constituée d'un mélange des deux types de grains. À partir de la mesure des profils de vitesse, de contraintes et de fraction solide, on montre que la rhéologie d'un tel mélange peut être décrite par une loi de frottement locale qui exprime une dépendance approximativement affine du coefficient de frottement effectif en fonction d'un nombre sans dimension, appelé nombre inertiel. Ce nombre généralise la grandeur introduite pour la rhéologie des systèmes quasi-monodisperses, à condition de prendre en compte le diamètre moyen des grains (pondéré par la masse).

Bidisperse granular flows on an inclined plane: Friction law and two-layer model

■ ABSTRACT

By employing discrete numerical simulation techniques, this paper will study the dense flow of a bidisperse mixture of discs on a rough inclined plane. Interest will be focused herein on steady and uniform flows, once a stable segregation has been achieved in the layer undergoing flow. The material may, in general, be decomposed into three layers: a fine-grained layer near the rough base, a coarse-grained surface layer, and an intermediate layer containing a mixture of the two grain types. Based on measurements of the velocity, stress and solid fraction profiles, it will be shown that the rheology of such a mixture is well described by a local friction law expressing an approximately affine dependence of the effective friction coefficient with respect to a dimensionless number, called the inertial number. This number serves to generalize the parameter introduced for the rheology of quasi-monodisperse systems, provided that the average (mass-weighted) grain diameter has been appropriately taken into account.

***AUTEUR À CONTACTER :**

François CHEVOIR

francois.chevoir@lpc.fr

INTRODUCTION

La compréhension des écoulements granulaires constitue un enjeu important, tant en géotechnique (glissement de terrain, propagation d'éboulements rocheux, d'écoulements pyroclastiques, d'avalanches de neige, mouvement de dunes [1-5]) que dans l'industrie (manutention, mise en œuvre de poudres, granulats en génie civil, génie chimique, agroalimentaire, pharmacie [6-8]). Pour prédire la propagation d'un écoulement à surface libre sur une topographie complexe ou la coulabilité dans

un silo, un objectif majeur des études *rhéophysiques* est de déterminer les lois rhéologiques, et leur origine physique à l'échelle des grains et de leurs interactions [9, 10].

Cet article est limité à des assemblées de grains assez gros en l'absence de fluide interstitiel (ou si celui-ci n'est pas trop visqueux), de sorte que les grains n'interagissent que par contact direct [11]. Par ailleurs, on s'intéresse aux écoulements denses, régime intermédiaire entre celui des déformations quasi-statiques de la mécanique des sols [12] et celui des écoulements rapides, dilués, collisionnels, susceptibles d'être décrits par la théorie cinétique des gaz denses [13, 14]. La compréhension de ces écoulements denses de grains secs a été un sujet de recherche actif au sein de la communauté scientifique durant la dernière décennie [15-18]. Les expériences sur matériaux modèles et les simulations numériques discrètes dans des géométries simples ont constitué les deux voies d'étude pour identifier et mesurer des caractéristiques robustes et reproductibles et isoler les influences déterminantes. Par ailleurs, afin de déterminer la loi de comportement, on étudie des écoulements stationnaires et uniformes, première étape pour aborder ensuite les situations plus générales rencontrées en pratique. Ainsi, pour des grains rigides quasi-monodisperses de diamètre moyen d et de masse volumique ρ_p soumis à une pression P et à un taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, l'analyse dimensionnelle montre que l'état de cisaillement dépend d'un nombre sans dimension appelé *nombre inertiel* :

$$I = \dot{\gamma} d \sqrt{\frac{\rho_p}{P}}. \quad (1)$$

Dans le régime dense, la loi de comportement s'exprime simplement par une dépendance affine du coefficient de frottement effectif $\mu^* = \frac{\tau}{P}$ (où τ est la contrainte de cisaillement) en fonction de I , ce que l'on appelle *loi de frottement* :

$$\mu^* \approx \phi + bI, \quad (2)$$

où l'angle de frottement interne $\tan\phi \approx \phi$ et b sont des paramètres liés aux propriétés micromécaniques des grains. Une saturation vers une valeur asymptotique est observée pour $I \geq 0,3$ où l'on entre dans le régime collisionnel.

Pendant, dans les écoulements réels, la granulométrie est souvent assez étendue. C'est le cas dans les écoulements naturels et dans certains écoulements industriels, notamment en génie civil où l'on réalise des mélanges granulaires polydisperses (bétons) pour optimiser la fraction solide et à partir de là les performances mécaniques [19]. Cette polydispersité conduit à une ségrégation des plus gros grains à la surface de l'écoulement [5, 20-23], mais les conséquences sur le comportement rhéologique du matériau demeurent mal comprises, sauf dans le cas d'écoulements dans le régime collisionnel [24-26].

Afin de déterminer dans quelle mesure les lois d'écoulement mises en évidence pour des systèmes quasi-monodisperses restent valables dans le cas d'une granulométrie plus étendue, on a étudié par simulations numériques discrètes la situation simple d'un mélange granulaire bi-disperse de disques s'écoulant sur un plan incliné rugueux. On ne s'intéresse pas dans la suite au phénomène de ségrégation lui-même, mais aux propriétés de l'écoulement une fois qu'un écoulement stationnaire ségrégué est obtenu. On commence par décrire le système simulé, puis on discute les caractéristiques des écoulements stationnaires et uniformes. On mesure alors la loi de frottement globale de la couche en écoulement. On montre enfin qu'il est possible de généraliser la loi de frottement locale pour le cas des mélanges.

SYSTÈME SIMULÉ

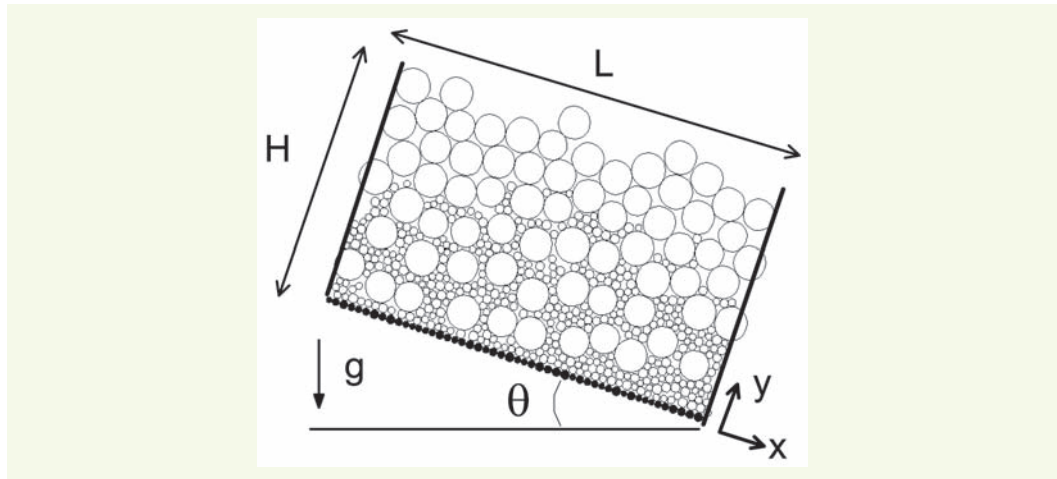
Le système est bidimensionnel. Le matériau granulaire est une assemblée bi-disperse de 500 à 1 000 disques de même densité ρ_p : n_1 petits disques de diamètre moyen d_1 et n_2 grands disques de diamètre moyen d_2 (avec une petite polydispersité ($\pm 20\%$) autour de chaque diamètre moyen).

Ce mélange est caractérisé par le rapport de taille $D = d_2/d_1$ et par la proportion surfacique de gros grains $S = (n_2 d_2^2)/(n_2 d_2^2 + n_1 d_1^2)$. On a étudié les mélanges suivants : $D = \{2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8\}$ et $S = \{1/4 ; 1/2 ; 3/4\}$.

Les écoulements sont simulés par dynamique moléculaire [11]. Tous les grains ont les mêmes propriétés mécaniques : ce sont des grains élastiques, dissipatifs et frottants, non cohésifs, qui n'interagissent que par contact direct. Le modèle d'interaction est caractérisé par un coefficient de frottement fixé à 0,4, un coefficient de restitution normal fixé à 0,1, un coefficient de restitution tangentiel fixé à 1 et une raideur normale suffisamment grande pour être dans la limite des grains rigides (c'est-à-dire que la déformation relative des grains reste inférieure à 10^{-3}). Cette grande raideur correspond à un temps de collision binaire très petit par rapport au temps caractéristique lié à la gravité : $\sqrt{d_1/g}$. Les échelles de longueur et de temps utilisées sont d_1 et $\sqrt{d_1/g}$, et l'échelle de vitesse $\sqrt{gd_1}$.

Une couche dense d'épaisseur H s'écoule sur un plan incliné rugueux incliné d'un angle θ sous l'effet de la gravité g (figure 1). Des conditions aux limites périodiques [11] sont appliquées selon la direction de l'écoulement x (pour simuler un écoulement infiniment long). La rugosité est composée de petits grains fixes, alignés et jointifs qui ont les mêmes propriétés mécaniques que les grains en écoulement. On a étudié les situations suivantes : $12 \text{ degrés} \leq \theta \leq 30 \text{ degrés}$ et $10 \leq H/d_1 \leq 50$.

figure 1
Écoulement granulaire bidisperse sur un plan incliné rugueux ($D = 4$, $S = 3/4$, $\theta = 17 \text{ degrés}$, $H \approx 30 d_1$).
Grains noirs : rugosité.
Traits noirs : conditions aux limites périodiques.



ÉCOULEMENTS STATIONNAIRES ET UNIFORMES

Dans une certaine gamme d'inclinaison et d'épaisseur, les mélanges bidisperses s'écoulent de manière stationnaire (indépendance vis-à-vis du temps) et uniforme (indépendance vis-à-vis de la coordonnée x le long de l'écoulement). Cette gamme d'inclinaison et d'épaisseur varie en fonction de la composition du mélange. La figure 2 montre les images de simulations qui correspondent à des écoulements stationnaires et uniformes pour différentes compositions de mélange. Dans de tels écoulements, les profils selon y des composantes du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}$, de la vitesse v_x ou de la fraction solide ν (définie comme la surface occupée par les grains divisée par la surface totale) peuvent être moyennés dans le temps et dans la direction x . Les méthodes de calcul du tenseur des contraintes et de prise de moyenne sont expliquées en détail dans la référence [27].

Systématiquement, il apparaît que les composantes normales du tenseur des contraintes Σ_{xx} et Σ_{yy} sont égales et que, en accord avec la conservation de la quantité de mouvement, la pression $P = (\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy})/2$ et la contrainte de cisaillement $\tau = \Sigma_{xy}$ vérifient (la fraction solide ν étant approximativement constante comme le montre la figure 3) :

$$\begin{cases} P(y) = \rho_p \nu g \cos \theta (H - y), \\ \tau(y) = \rho_p \nu g \sin \theta (H - y). \end{cases} \quad (3)$$

figure 2
Écoulements bidisperses stationnaires et uniformes ($\theta = 17$ degrés, $H \approx 30 d_1$).

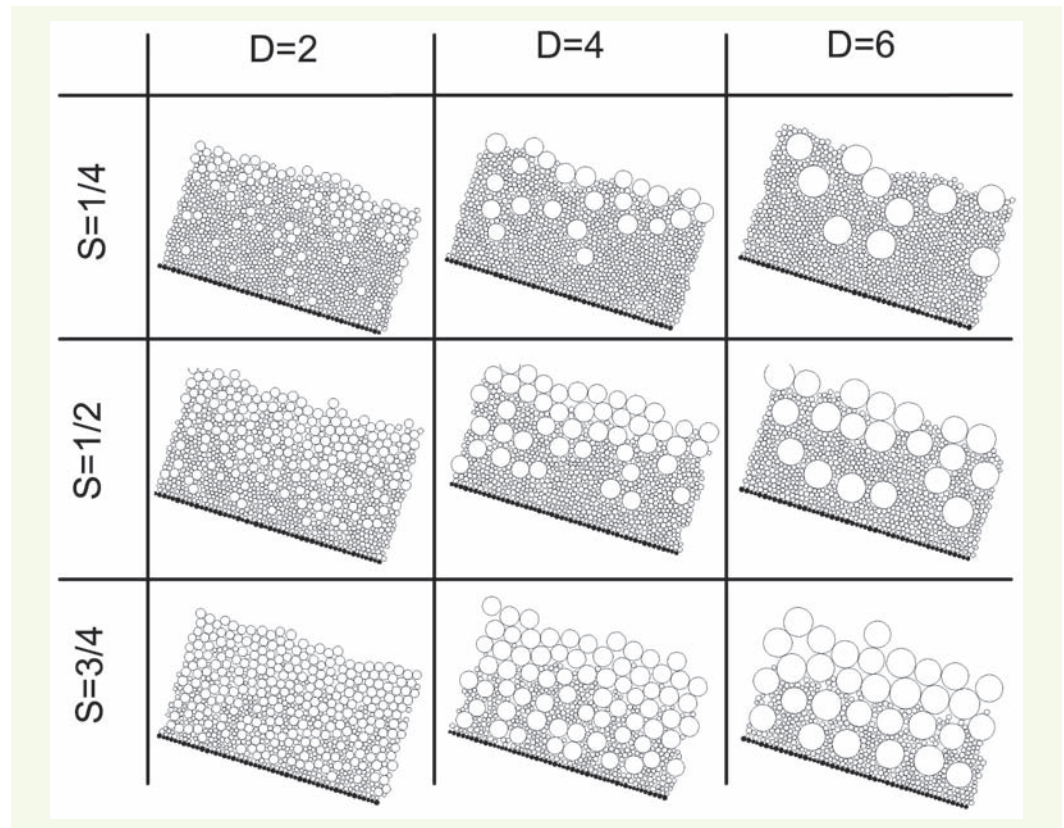
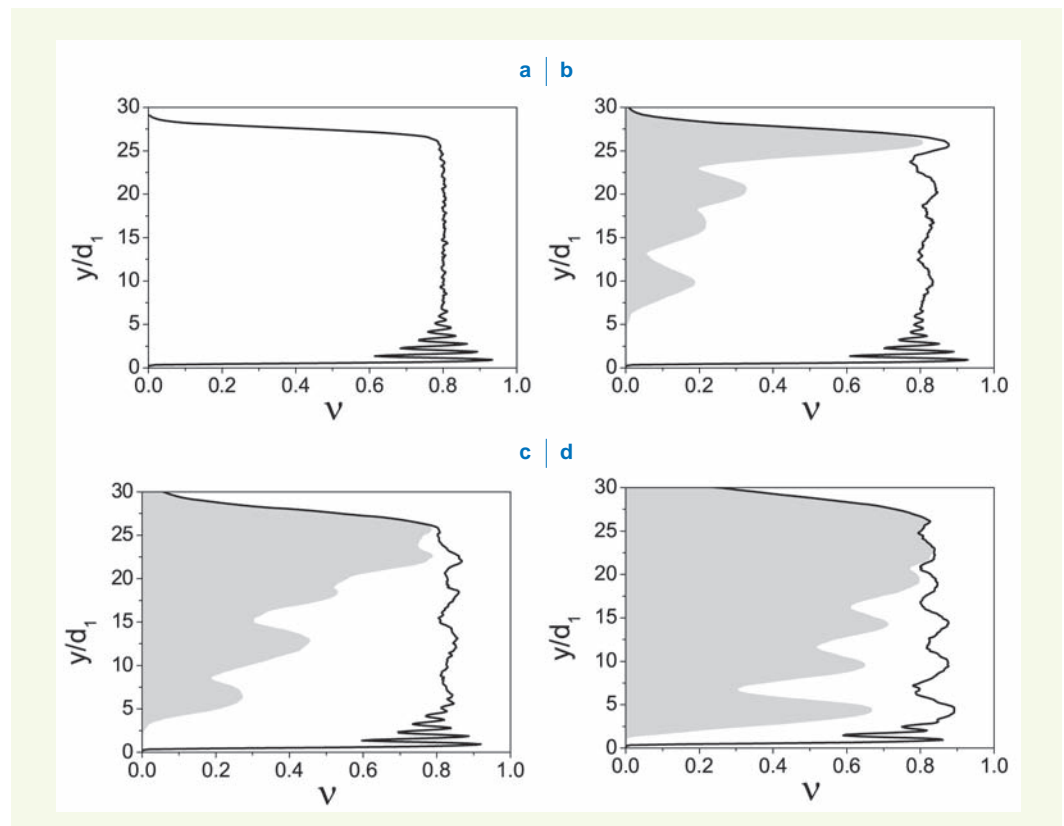


figure 3
Profil de fraction solide ($D = 4$, $\theta = 17$ degrés, $H \approx 30 d_1$) : fraction solide totale $v(y)$ (trait continu), fraction solide partielle de gros grains $v_2(y)$ (surfaces grises). (a) $S = 0$, (b) $S = 1/4$, (c) $S = 1/2$, (d) $S = 3/4$.



■ Préparation de l'écoulement

Le mode de préparation de l'écoulement le plus souvent utilisé consiste à partir d'une configuration initiale où les grains sont placés au hasard et sans contact (fraction solide faible d'environ 0,5) puis à appliquer la gravité. Les grains se déposent sur le socle et commencent à s'écouler. Après un certain temps, l'écoulement peut atteindre un régime stationnaire caractérisé par des grandeurs

telles que l'énergie cinétique totale, le tenseur des contraintes ou la fraction solide, indépendantes du temps. Comme le temps pour atteindre un éventuel régime stationnaire peut être long, une autre méthode plus rapide a été testée. Elle consiste à partir d'un écoulement stationnaire de petits grains et à placer un nombre voulu de gros grains dans l'écoulement (en éliminant les petits grains recouverts). L'une ou l'autre des méthodes, quelle que soit la répartition initiale des gros grains (par exemple tous en bas, tous en haut, ou mélangés aux petits) conduit après un temps plus ou moins long au même écoulement final.

■ Écoulements ségrégés

Pour chaque écoulement, la fraction solide $v(y)$ est approximativement constante : $v(y) \approx 0,8$ (valeur qui varie légèrement selon la composition du mélange). La **figure 3a** représente le profil de fraction solide pour un écoulement de petits grains uniquement. Il y apparaît une légère structuration proche de la paroi (couche d'environ $5 d_1$). Les **figures 3b à 3d** montrent le profil de fraction solide pour des mélanges bidisperses ($D = 4, S = 1/4, 1/2, 3/4$). La structuration des grains en couches parallèles à proximité de la paroi est toujours présente et il s'y ajoute une légère structuration liée aux gros grains.

Si la fraction solide totale est constante, les gros grains se trouvent préférentiellement en haut de l'écoulement. Cet état ségrégé, stable dans le temps et indépendant des conditions initiales, est visible sur les images de la **figure 2** ainsi que sur les profils de fraction solide partielle de la **figure 3** (surface occupée par les gros grains divisée par la surface totale). Les écoulements bidisperses tendent à se structurer en trois couches (voir par exemple le cas $S = 1/2$ et $D = 4$ sur la **figure 2**) :

- une couche de petits grains au fond,
- une couche de gros grains à la surface,
- une couche mixte au centre.

Si la proportion de gros grains est faible ($S = 1/4$) la couche supérieure de gros grains est peu épaisse (**figure 3b**). Si la proportion de gros grains augmente ($S = 1/2$), la couche supérieure s'épaissit et la couche de petits grains diminue. Si la proportion de gros grains augmente encore ($S = 3/4$), ils occupent toute l'épaisseur de l'écoulement et la couche basale de petits grains disparaît (**figure 3d**).

À partir des fractions solides partielles v_1 et v_2 des petits et gros grains ($v = v_1 + v_2$), on définit un nombre sans dimension \mathcal{D} qui exprime le diamètre moyen des grains (pondéré en masse) :

$$\mathcal{D} = \frac{v_1 + v_2}{v} D \quad (4)$$

dont le profil est représenté sur la **figure 4** pour différents mélanges.

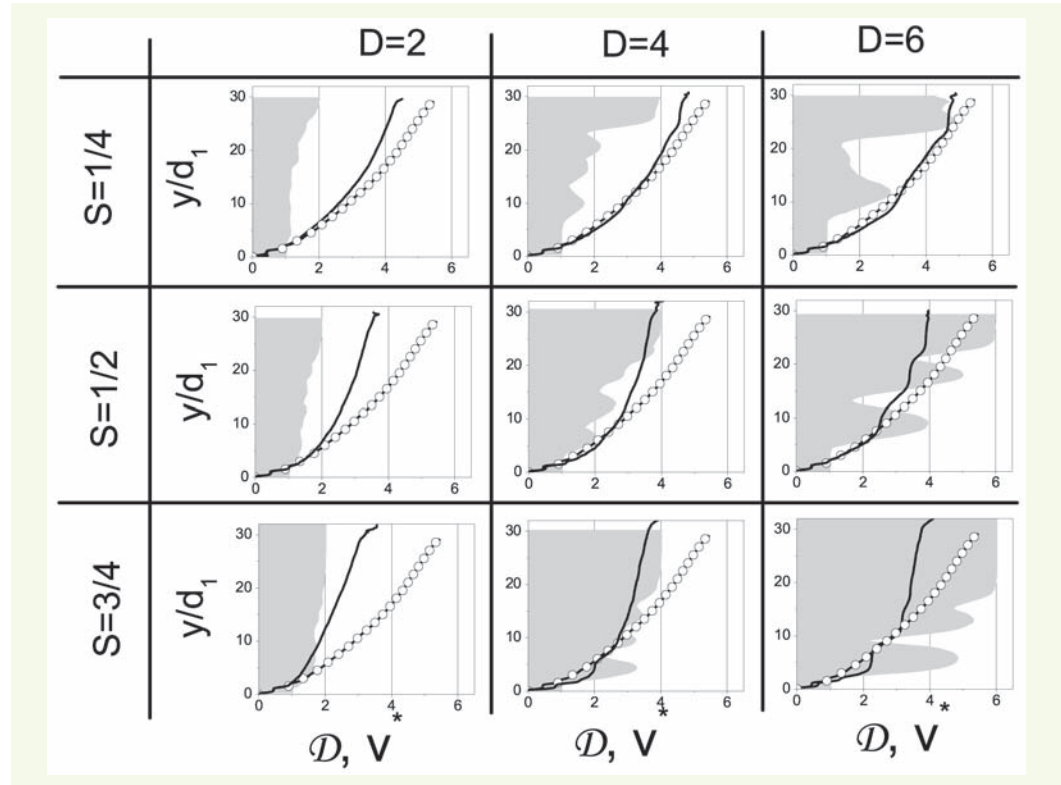
■ Profils de vitesse

La **figure 4** montre aussi les profils de vitesse adimensionnés $v^* = v_x / \sqrt{gd_1}$ pour différents mélanges. Pour l'écoulement monodisperse, le profil de vitesse est donné par l'équation (5) [18]. Pour un écoulement bidisperse, le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ diminue systématiquement dans la couche supérieure de l'écoulement. La couche concernée est d'autant plus épaisse que les gros grains sont nombreux, et $\dot{\gamma}$ diminue d'autant plus que les gros grains sont gros. Si les gros grains sont assez nombreux ($S \geq 3/4$) et assez gros ($D \geq 3$), le cisaillement augmente fortement près de la paroi.

■ Modèle bi-couche

L'observation des écoulements bidisperses met en évidence, d'une part, la ségrégation des gros grains en surface et, d'autre part, la modification du profil de vitesse. Il est tentant de relier ces deux phénomènes. Pour ce faire, une approche consiste à intégrer la loi de comportement de grains

figure 4
 Profils de vitesse adimensionnés ($\theta = 17$ degrés, $H \approx 30 d_1$) : mélange bidisperse (trait continu) et quasi-monodisperse (\circ) ; profils de diamètre moyen adimensionné (gris).



monodisperses dans la géométrie du plan incliné en considérant un modèle *bicouche* où les grains sont supposés parfaitement ségrégués (pas de couche mixte), puis à comparer les prédictions de ce modèle avec les mesures.

Pour une couche de grains monodisperses d'épaisseur H en écoulement stationnaire et uniforme sur un plan incliné de θ , le coefficient de frottement effectif est directement relié à la pente : $\mu^* = \tan \theta \approx \theta$. À partir de la loi de comportement identifiée par simulations numériques discrètes en cisaillement homogène (équations (1), (2)) et de la distribution des contraintes pour un écoulement stationnaire et uniforme sur plan incliné (équation (3)), on prédit théoriquement le profil de taux de cisaillement suivant ($\cos \theta \approx 1$) :

$$\dot{\gamma}(y) \approx \frac{\sqrt{v}g(\theta - \phi)}{bd} \sqrt{H - y}. \quad (5)$$

Des comparaisons avec les profils de taux de cisaillement mesurés par simulations numériques discrètes ont été réalisées [16, 18, 27, 28]. Elles montrent un bon accord dans la masse de l'écoulement mais certaines déviations à proximité de la paroi rugueuse. De cette relation ressort la dépendance du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ avec le diamètre d des grains : $\dot{\gamma}(y) \propto 1/d$. Le rapport Γ des taux de cisaillement entre une couche de gros grains ($\dot{\gamma}_2$) et une couche de petits grains ($\dot{\gamma}_1$) s'écrit donc :

$$\Gamma = \frac{\dot{\gamma}_2}{\dot{\gamma}_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{D}. \quad (6)$$

En considérant un modèle où la ségrégation des gros grains vers le haut est parfaite, l'écoulement bidisperse se divise en deux couches :

- une couche près de la paroi d'épaisseur $(1-S)H$ composée uniquement de petits grains,
- une couche supérieure d'épaisseur SH composée uniquement de gros grains.

Dans ce modèle bicouche, le rapport Γ est égal à 1 dans la couche de petits grains, et à $1/D$ dans la couche de gros grains. La figure 5 compare ce modèle avec les mesures réalisées pour différents mélanges.

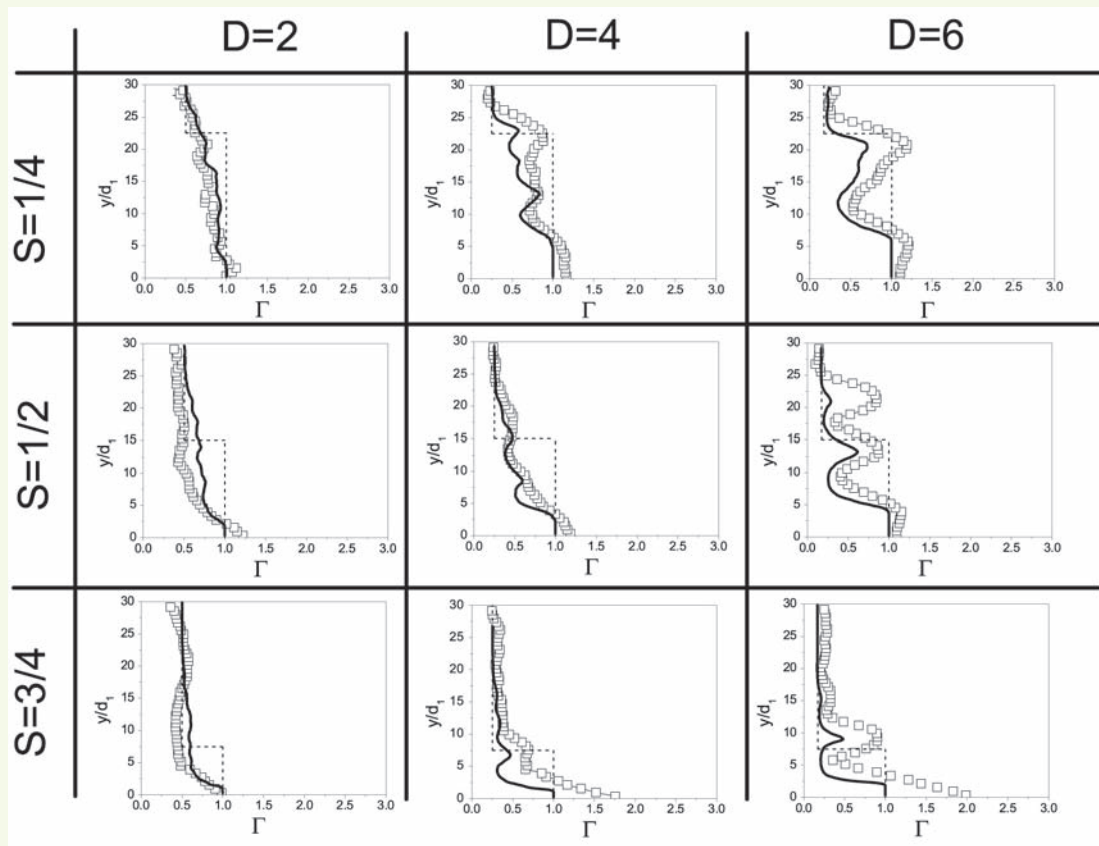


figure 5

Comparaison des taux de cisaillement ($\theta = 17$ degrés, $H \approx 30 d_1$, $D = 4$) : mesures (\square), moyenne glissante sur un diamètre d_1 (trait continu) et modèle bi-couche (trait tiré).

Pour une faible proportion de gros grains ($S = 1/4$), le modèle décrit bien la couche basale ($y \leq 6 d_1$) et la couche supérieure (gros grains) mais cette dernière est très fine ($y \geq 0,75 H$). La couche mixte centrale est très large et n'est pas bien représentée par le modèle, ce qui souligne l'importance de la rhéologie particulière d'un mélange de petits et de gros grains.

En augmentant la proportion de gros grains ($S = 1/2$), le modèle décrit correctement les deux couches composées d'un seul type de grains, mais l'épaisseur de la couche de petits grains diminue ($y \leq 3 d_1$) alors que celle de la couche supérieure augmente ($y \geq 0,5 H$). La couche mixte centrale n'est toujours pas bien représentée.

En augmentant encore la proportion de gros grains ($S = 3/4$), la couche supérieure est bien représentée et s'épaissit ($y \geq 0,25 H$). Par contre, la couche de petits grains n'existe plus : les gros grains occupent toute l'épaisseur de l'écoulement, y compris les zones proches de la rugosité. Pour des gros grains assez gros ($D \geq 4$), le taux de cisaillement augmente fortement à proximité de la rugosité. Elle peut être interprétée comme une conséquence d'un piégeage moins efficace des gros grains par une rugosité faite de petits grains [29].

LOI DE FROTTEMENT MACROSCOPIQUE

Les méthodes de type Saint-Venant [30-35] couramment utilisées pour simuler des écoulements à l'échelle 1 dans des géométries complexes nécessitent une donnée cruciale : l'expression du coefficient de frottement μ_p^* entre l'écoulement et la paroi, défini comme le rapport des contraintes tangentielle τ_p et normale P_p à la paroi.

Pour des grains monodisperses (diamètre d , masse volumique ρ_p) en écoulement sur un plan incliné rugueux, il a été montré que cette loi de frottement dépend à la fois de l'épaisseur H et d'une vitesse caractéristique de l'écoulement (vitesse moyenne ou vitesse à la surface $v_x(H)$) [28, 36, 37]. Cette loi s'exprime de façon unique pour différentes épaisseurs :

$$\mu_p^* \approx \phi + BI_g, \quad (7)$$

où ϕ est l'angle de frottement interne et B dépend du couple matériau-rugosité considéré. Le nombre sans dimension I_g , appelé nombre inertiel global, s'écrit :

$$I_g = \frac{v_x(H)}{H} d \sqrt{\frac{\rho_p}{P(0)}}. \quad (8)$$

Il est équivalent au paramètre $Fr/(H/d)$ introduit par Pouliquen [38] où $Fr = v_x(H)/\sqrt{gH}$ est le nombre de Froude. La question qui se pose est de savoir si une telle loi existe pour des écoulements bidisperses et, si oui, comment elle est influencée par la composition du mélange.

■ Mesure de la loi de frottement

Pour chaque mélange, un écoulement stationnaire est généré. Une fois établi, la pente θ est modifiée assez lentement pour que l'écoulement puisse être considéré comme stationnaire à chaque pas de temps. Les variations de la pente θ se font dans une gamme où l'écoulement est stationnaire : $\phi < \theta < \theta_{max}$ (ϕ est la pente en dessous de laquelle l'écoulement s'arrête, et θ_{max} la pente au-dessus de laquelle l'écoulement est accéléré). La mesure de l'épaisseur H et celle de la vitesse à la surface $v_x(H)$ en fonction de $\theta \approx \mu_p^*$ donnent accès à la loi de frottement du mélange. La figure 6 représente ces courbes pour différentes épaisseurs ($H/d_1 \approx 10, 20, 30$) et différents mélanges. On observe certaines tendances. Il apparaît que, pour un mélange donné, les courbes tendent à se regrouper dès que l'épaisseur est suffisamment grande ($H/d_1 \geq 10$). La courbe est approximativement affine pour les faibles valeurs de I_g , avec une incurvation assez nette quand S augmente. La loi de frottement d'un mélange bidisperse peut donc en première approximation s'exprimer d'une façon similaire à celle d'un écoulement monodisperse (équation (7)) :

$$\mu_p^*(S, D) \approx \phi(S, D) + BI_g, \quad (9)$$

figure 6 où
Loi de frottement
macroscopique pour
différents mélanges, avec
 $H/d_1 = 10$ (\square), 20 (Δ) et
30 (\circ).

$$I_g = \frac{v_x(H)}{H} d_1 \sqrt{\frac{\rho_p}{P(0)}}. \quad (10)$$

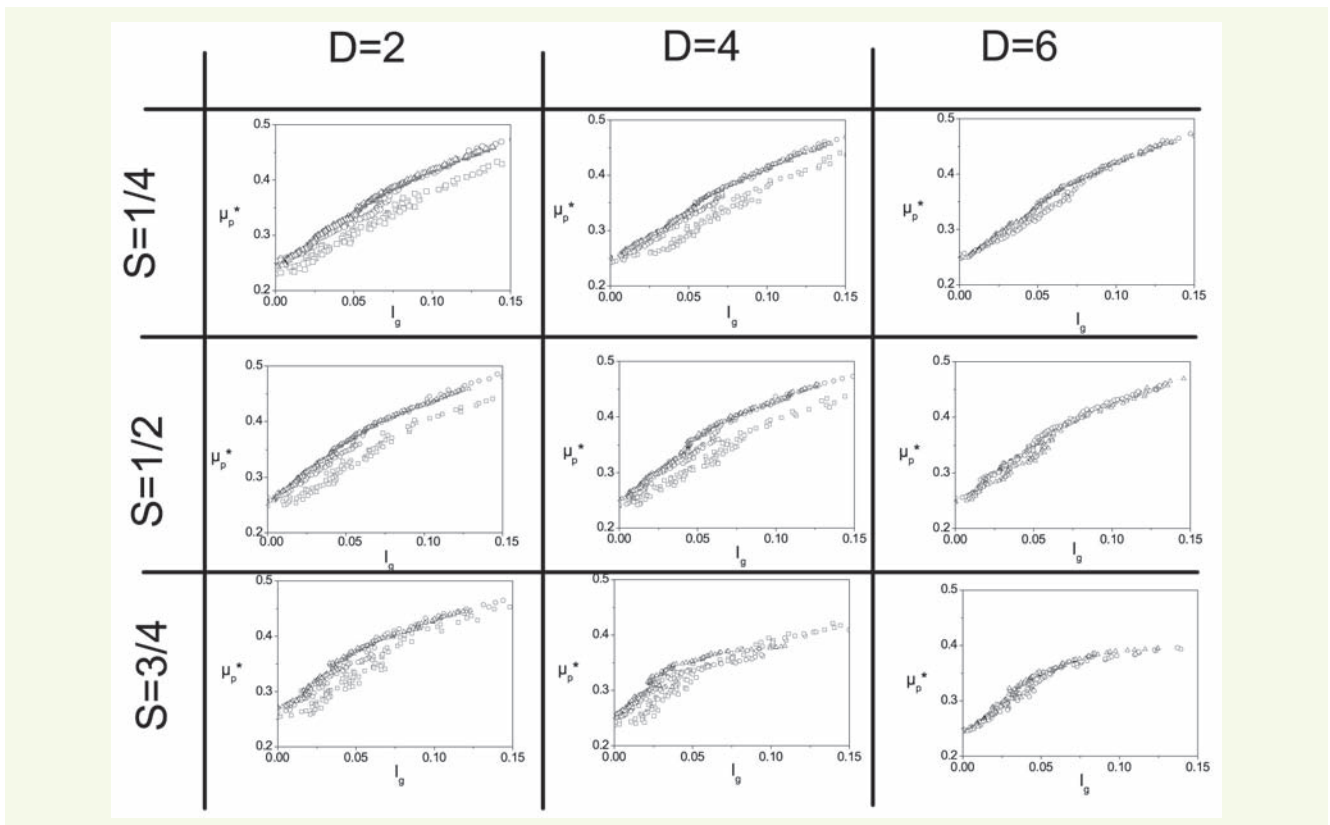
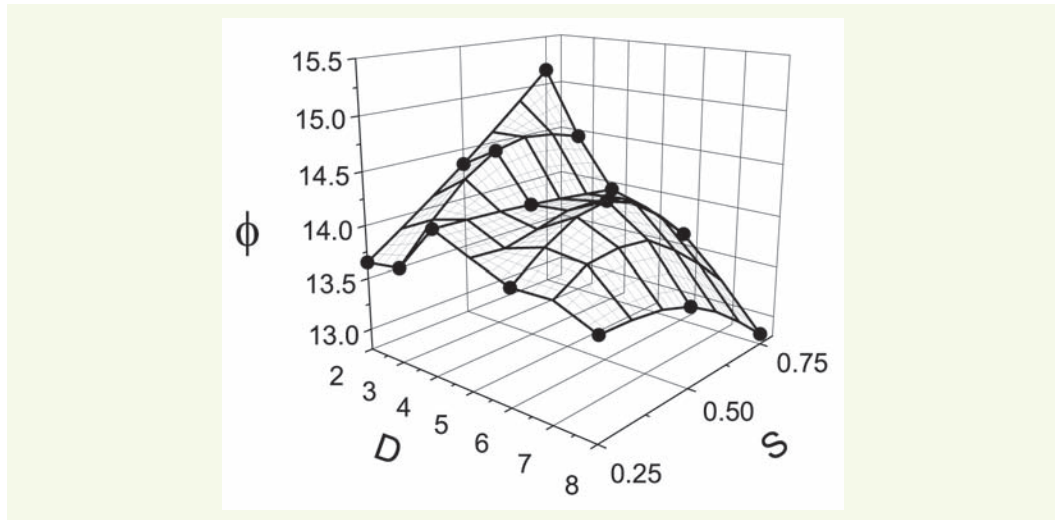


figure 7
 Comparaison des taux de cisaillement
 ($\theta = 17$ degrés,
 $H \approx 30 d_1, D = 4$) : mesures
 (trait continu), modèle bi-
 couche (trait tireté).



ϕ est la valeur de l'angle pour lequel l'écoulement s'arrête, mesuré avec une précision d'environ 0,1 degré. B est mesuré par un ajustement linéaire des données, en ne retenant que les premières valeurs de I_g . Les mesures montrent que les paramètres de mélange ne modifient pas la pente B , mais leur effet sur l'angle d'arrêt ϕ est bien visible sur la **figure 7**. Pour un rapport de taille assez petit ($D \leq 3$), plus la proportion de gros grains augmente, plus le frottement augmente. Pour un rapport de taille plus grand ($D \geq 3$), le frottement augmente aussi lorsque la proportion passe de 1/4 à 1/2, mais diminue lorsqu'elle passe de 1/2 à 3/4. Il y apparaît de nouveau les deux effets antagonistes :

- l'augmentation du frottement lorsque les gros grains n'occupent que la couche supérieure de l'écoulement (diminution du taux de cisaillement) ;
- la diminution du frottement lorsque les gros grains interagissent avec la paroi et qu'ils sont assez gros pour favoriser une vitesse de glissement au socle. Dans ce cas, plus la taille des gros grains est importante, plus le glissement est favorisé.

■ Discussion

Dans le cadre du modèle bicouche, l'équation (5) fournit le taux de cisaillement dans chacune des couches, soit :

$$\dot{\gamma}(y) \approx \begin{cases} \frac{\sqrt{vg}(\theta - \phi)}{bd_1} \sqrt{H - y} & \text{pour } 0 \leq y \leq (1 - S)H \\ \frac{\sqrt{vg}(\theta - \phi)}{bd_2} \sqrt{H - y} & \text{pour } (1 - S)H \leq y \leq H \end{cases} \quad (11)$$

dont on déduit le profil de vitesse et finalement le nombre inertiel global I_g . Comme $\mu^* \approx \theta$, on en déduit que la loi de frottement dépend de façon affine du nombre inertiel global :

$$\mu^* \approx \phi + B(S, D)I_g, \quad (12)$$

avec une forte dépendance de la pente $B(S, D)$ en fonction des paramètres de mélange :

$$B(S, D) = \frac{B}{(1 - S^{3/2}) + S^{3/2} / D}, \quad (13)$$

mais sans influence sur l'angle de frottement interne ϕ . Ceci est en contradiction avec les mesures qui montrent une influence de S et D sur ϕ , mais pas sur B . La conclusion est que la rhéologie particulière de la couche mixte et plus encore l'influence de la rugosité de la paroi [29], non décrits par le modèle bi-couche, ont un rôle majeur sur la rhéologie globale d'un écoulement bidisperse sur plan incliné.

LOI DE FROTTEMENT LOCALE

On cherche maintenant à analyser la loi de frottement locale, y compris dans la couche de mélange. Pour cela, on suppose que la grandeur essentielle qui varie au sein du mélange est le diamètre moyen des grains $\mathcal{D}d_1$. On définit alors un nombre inertiel généralisé $I_{\mathcal{D}}$ à l'aide de ce diamètre moyen des grains :

$$I_{\mathcal{D}} = \dot{\gamma} \mathcal{D}d_1 \sqrt{\frac{\rho_p}{P}}. \quad (14)$$

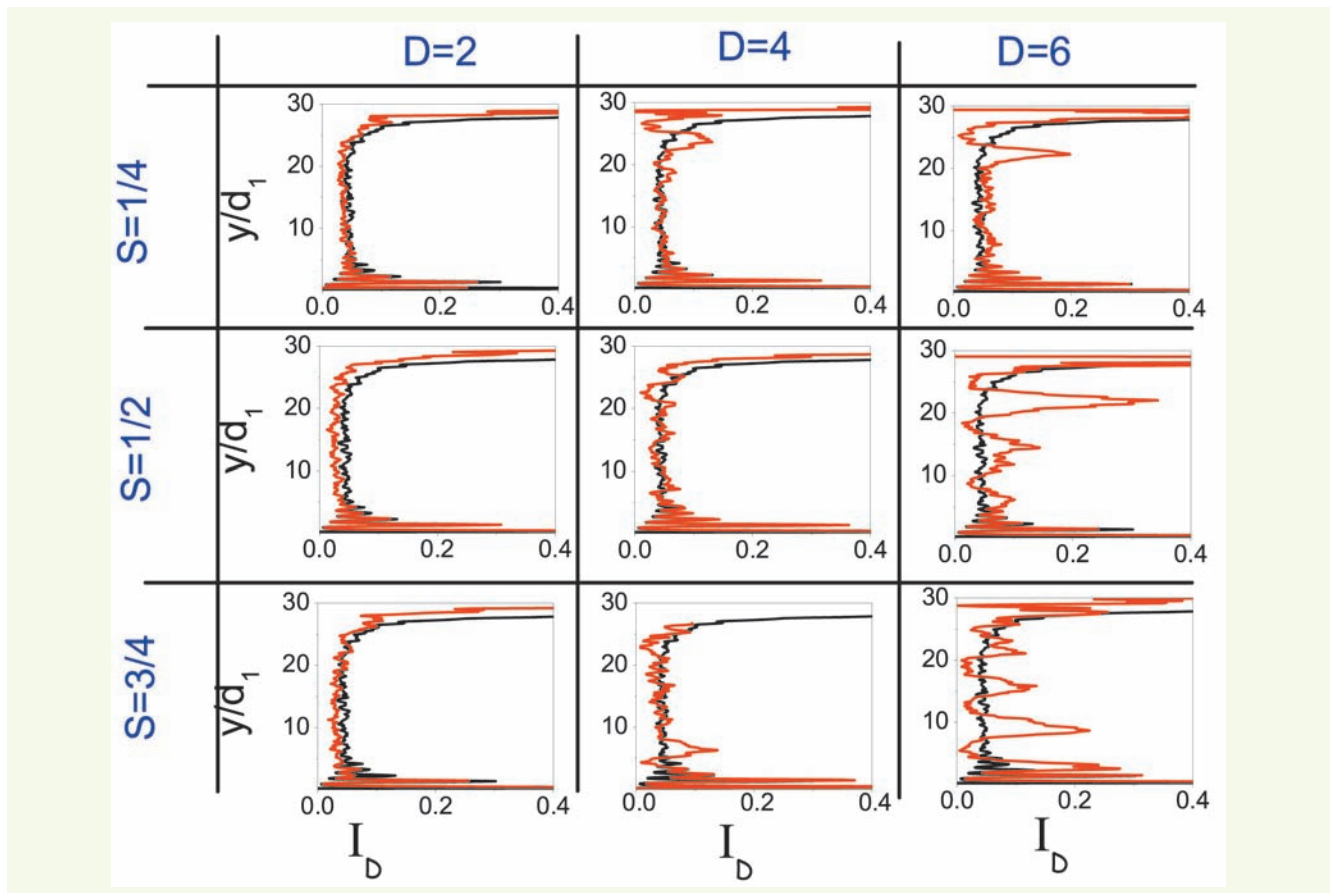
dont la **figure 8** présente le profil pour divers mélanges. On constate qu'en dehors des fortes oscillations pour les systèmes constitués d'un petit nombre de couches de gros grains, $I_{\mathcal{D}}$ est à peu près constant dans l'épaisseur de la couche, et voisin de la valeur pour un système monodisperse. Ceci en fait un bon candidat pour l'écriture d'une loi de frottement locale.

Revenant alors au tracé de la loi de frottement, c'est-à-dire la relation entre l'inclinaison et le nombre inertiel généralisé, la **figure 9** met assez clairement en évidence une loi de frottement locale pour ces mélanges, en bon accord quantitatif avec les mélanges monodisperses tant que la proportion de gros grains et le rapport de taille ne sont pas trop grands :

$$\mu^* \approx \phi + bI_{\mathcal{D}}. \quad (15)$$

figure 8
Profil du nombre inertiel généralisé $I_{\mathcal{D}}$ pour divers mélanges (en rouge), en comparaison d'un système quasi-monodisperse (en noir).

L'accord reste qualitativement bon pour les autres mélanges mais les paramètres ϕ et b sont affectés. La réduction du coefficient de frottement effectif pour un nombre inertiel généralisé $I_{\mathcal{D}}$ donné, qui apparaît lorsque D ou S augmentent, pourrait s'interpréter par une action lubrifiante des petits grains qui s'interposent entre les gros grains.



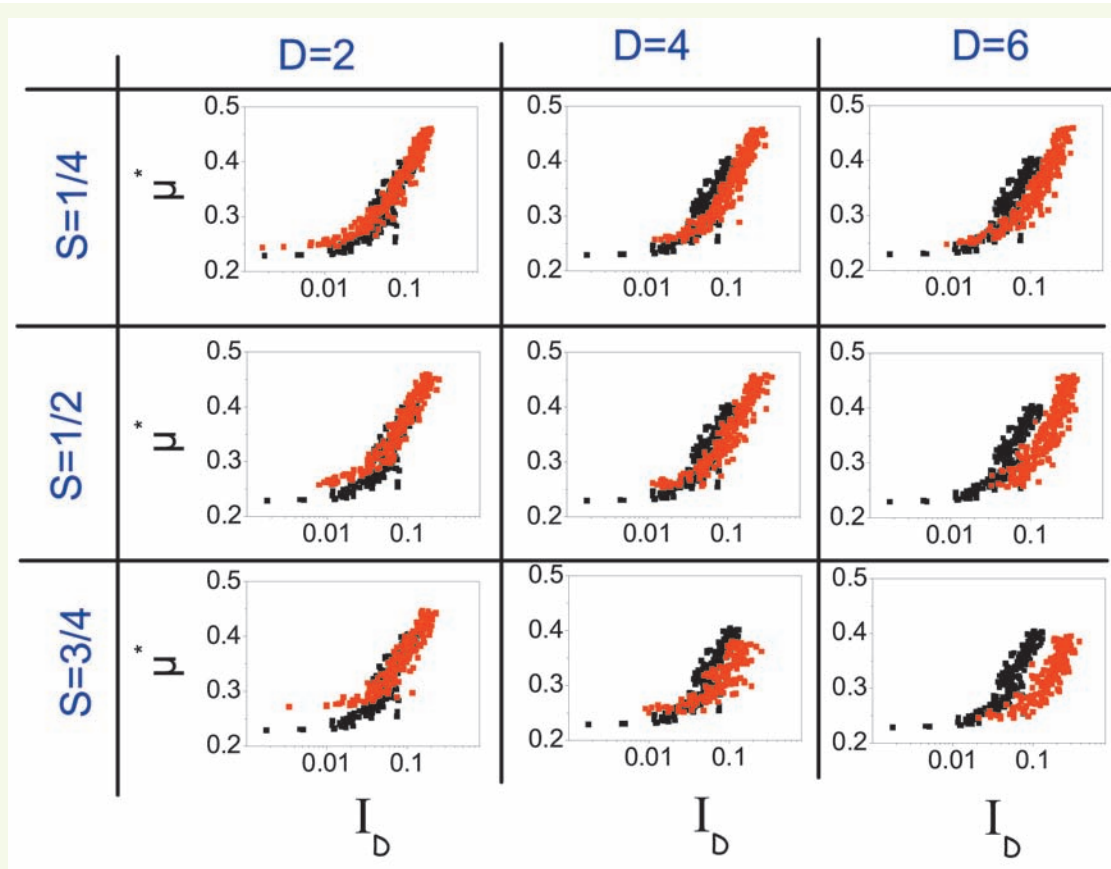


figure 9

Loi de frottement locale $\mu^*(I_D)$ pour divers mélanges (en rouge), en comparaison d'un système quasi-monodisperse (en noir).

CONCLUSION

Les simulations numériques discrètes d'écoulements bidisperses sur plan incliné rugueux ont mis en évidence une phénoménologie assez riche. Le premier point est que le mélange se ségrège [20-23] et forme trois couches : une couche de petits grains en bas, une couche de gros grains en haut et une couche mixte au centre. L'intégration de la rhéologie locale de grains monodisperses dans un modèle bicouche où la ségrégation est totale (petits en bas et gros en haut) permet de comprendre en quoi la présence des gros grains diminue le cisaillement dans la couche supérieure. Par contre, ce modèle simple ne représente ni la rhéologie particulière de la zone mixte, ni l'augmentation du cisaillement près de la paroi interprétés comme une conséquence d'un piégeage moins efficace des gros grains par la rugosité.

Par ailleurs, les mesures montrent l'existence d'une loi de frottement macroscopique qui décrit les écoulements bidisperses sur plan incliné et soulignent l'importance de la rhéologie particulière de la zone mixte, et à plus forte raison celle de l'apparition d'un glissement à la paroi.

Enfin, l'introduction d'un nombre inertiel généralisé, fondé sur l'introduction du diamètre moyen, permet de généraliser au cas des mélanges la loi de frottement mise en évidence antérieurement pour des systèmes quasi-monodisperses. Cette étude ouvre plusieurs pistes de recherche. On voit la nécessité d'étudier en détail l'influence de la rugosité sur la loi de frottement. L'étude de la loi de comportement du mélange pourrait être précisée au moyen de simulations en cisaillement homogène, où l'on peut espérer éviter la ségrégation. Il serait aussi intéressant d'étudier d'autres polydispersités (mélange à trois tailles, ou distribution continue) et le cas d'un système tridimensionnel.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1 **BAGNOLD R. A.**, *The physics of blown sand and desert dunes*, Chapman and Hall, London, **1941**.
- 2 **BRUNSDEN D.**, **PRIOR B.** éditeurs, *Slope instability*, John Wiley and Sons, **1984**.
- 3 **SAVAGE S. B.**, Flow of granular materials, in *Theoretical and applied mechanics* édité par M. Piau et D. Caillerie, North Holland, Amsterdam, **1989**, pp. 241-266.
- 4 **ROGNON P.-G.**, *Écoulements granulaires cohésifs - Application aux avalanches de neige dense*, Thèse de l'École nationale des ponts et chaussées, **2006**.
<http://pastel.paristech.org/2450/>
- 5 **FÉLIX G.**, **THOMAS N.**, Relation between dry granular flow regimes and morphology of deposits : formation of levées in pyroclastic deposits, *Earth And Planetary Science Letters*, **2004**, vol. **221**, pp. 197-213.
- 6 **BROWN R.L.**, **RICHARDS J.-C.**, *Principles of powder mechanics*, Pergamon Press, Oxford, **1970**.
- 7 **NEDDERMAN R.M.**, *Statics and kinematics of granular materials*, Cambridge University Press, Cambridge, **1992**.
- 8 **RIETEMA K.**, *The dynamics of fine powders*, Elsevier, New York, **1991**.
- 9 **CHEVOIR F.**, **ROUX J.-N.** éditeurs, *Colloque physique et mécanique des matériaux granulaires*, Laboratoire central des ponts et chaussées, Paris, **2000**.
- 10 **COUSSOT PH.**, *Rheometry of pastes, suspensions and granular materials*, Wiley, New-York, **2005**.
- 11 **ROUX J.-N.**, **CHEVOIR F.**, Simulations numériques discrètes et comportement mécanique des matériaux granulaires, *Bulletin des laboratoires des ponts et chaussées*, **2005**, **254**, pp. 109-138.
- 12 **COMBE G.**, **ROUX J.-N.**, Quasi-static rheology and the origin of strain, *Comptes Rendus Physique*, **2002**, vol. **3**, pp. 131-140.
- 13 **CAMPBELL C. S.**, Rapid granular flows, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **1990**, vol. **22**, pp. 57-92.
- 14 **AZANZA E.**, **CHEVOIR F.**, **MOUCHERONT P.**, Experimental study of collisional granular flows down an inclined plane, *Journal of Fluid Mechanics*, **1999**, vol. **400**, pp. 199-227.
- 15 **POULIQUEN O.**, **CHEVOIR F.**, Dense flows of dry granular materials, *Comptes Rendus Physique*, **2002**, vol. **3**, pp. 163-175.
- 16 **GDR MIDI**, On dense granular flows, *Euro. Phys. J. E*, **2004**, vol. **14**, pp. 341-365.
- 17 **DA CRUZ F.**, **EMAM S.**, **PROCHNOW M.**, **ROUX J.-N.**, **CHEVOIR F.**, Rheophysics of dense granular flows : Discrete simulation of plane shear flows, **2005**, *Phys. Rev. E*, vol. **72** : 021309.
- 18 **CHEVOIR F.**, **AZANZA E.**, **DA CRUZ F.**, **KOVAL JUNIOR G.**, **PROCHNOW M.**, **ROGNON P.**, **COUSSOT PH.**, **MOUCHERONT P.**, **ROUX J.-N.**, **TOCQUER L.**, Écoulements granulaires : physique et applications in *Rhéologie des pâtes et des milieux granulaires*, Roux J.-N., Cazacliu B. éditeurs, **2006**, ERLPC, SI12, 190 pages.
- 19 **DE LARRARD F.**, *Structure granulaire et formulation des bétons*, **2000**, ERLPC, OA34, 202 pages.
- 20 **SAVAGE S. B.**, **LUN C.K.K.**, Particle size segregation in inclined chute flow of dry cohesionless granular solids, *Journal of Fluid Mechanics*, **1988**, vol. **189**, pp. 311-335.
- 21 **HIRSHFELD D.**, **RAPAPORT D.C.**, Molecular dynamics studies of grain segregation in sheared flow, *Phys. Rev. E*, **1997**, vol. **56**, pp. 2012-2018.
- 22 **OTTINO A. V.**, **KHAKHAR D. V.**, Mixing and segregation of granular materials, *Annual review of fluid mechanics*, **2000**, vol. **32**, pp. 55-91.
- 23 **BERTON G.**, **DELANNAY R.**, **RICHARD P.**, **TABERLET N.**, **VALANCE A.**, Two-dimensional inclined chute flows : Transverse motion and segregation, *Phys. Rev. E*, **2003**, vol. **68** : 051303.
- 24 **ALAM M.**, **LUDING S.**, Rheology of bidisperse granular mixtures via event driven simulations, *Journal of Fluid Mechanics*, **2003**, vol. **476**, pp. 69-103.
- 25 **DAHL S.R.**, **CLELLAND R.**, **HRENYA C.M.**, Three-dimensional, rapid shear flows of particles with continuous size distribution, *Powder technology*, **2003**, vol. **138**, pp. 7-12.
- 26 **MONTANERO J. M.**, **GARZO V.**, **ALAM M.**, **LUDING S.**, Rheology of two and three dimensional granular mixtures under uniform shear flow : Enskog kinetic theory versus molecular dynamics simulations, *Granular Matter*, **2006**, vol. **8**, pp. 103-115.
- 27 **PROCHNOW M.**, *Écoulements denses de grains secs*, Thèse de l'École nationale des ponts et chaussées, **2002**. <http://pastel.paristech.org/321/>
- 28 **DA CRUZ F.**, **PROCHNOW M.**, **AZANZA E.**, **RAGOUILLIAUX A.**, **TOCQUER L.**, **MOUCHERONT P.**, **ROUX J.-N.**, **COUSSOT PH.**, **CHEVOIR F.**, Écoulements denses de grains secs sur plan incliné, in *Actes des Journées Sciences de l'Ingénieur du LCPC*, Paris, **2003**, pp. 541-546.
- 29 **GOUJON C.**, **THOMAS N.**, **DALLOZ-DUBRUJEAUD B.**, Monodisperse dry grain flows on inclined planes : role of roughness, *Euro. Phys. J. E*, **2003**, vol. **11**, pp. 147-157.
- 30 **SAVAGE S. B.**, **HUTTER K.**, The motion of a finite mass of granular material down a rough inclined, *Journal of Fluid Mechanics*, **1989**, vol. **199**, p. 177.
- 31 **NAAIM M.**, **VIAL S.**, **COUTURE R.**, Saint Venant approach for rock avalanches modelling in multiple scale analysis and coupled physical systems, in *Saint Venant Symposium*, Paris, **1997**, Presse de l'École nationale des ponts et chaussées.
- 32 **DOUADY S.**, **ANDREOTTI B.**, **DAERR A.**, On granular surface flow equations, *Euro. Phys. J.*, **1999**, vol. **11**, pp. 131-142.
- 33 **HEINRICH P.**, **GRILLON Y.**, Modélisation numérique des écoulements granulaires. Application aux avalanches de débris, in *Colloque physique et mécanique des matériaux granulaires*, édité par F. Chevoir et J.-N. Roux, **2000**, vol. **2**, pp. 407-410, Laboratoire central des ponts et chaussées, Paris.
- 34 **POULIQUEN O.**, **FORTERRE Y.**, Friction law for dense granular flow : application to the motion of a mass down a rough inclined plane, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. **453**, **2002**, pp. 133-151.
- 35 **MANGENEY-CASTELNAU A.**, **BOUCHUT F.**, **VILLOTTE J.-P.**, **LAJEUNESSE E.**, **AUBERTIN A.**, **PIRULLI M.**, On the use of Saint Venant equations to simulate the spreading of a granular mass, *Journal of Geophysical Research*, **2005**, vol. **110** : B09103.
- 36 **DA CRUZ F.**, *Écoulements de grains secs : Frottement et blocage*, Thèse de l'École nationale des ponts et chaussées, **2004**.
<http://pastel.paristech.org/946/>
- 37 **JOP P.**, **FORTERRE Y.**, **POULIQUEN O.**, Crucial role of sidewalls in granular surface flows : consequences for the rheology, *Journal of Fluid Mechanics*, **2005**, vol. **541**, pp. 167-192.
- 38 **POULIQUEN O.**, Scaling laws in granular flows down a rough inclined plane, *Phys. Fluids*, **1999**, vol. **11**, pp. 542-548.