

# Simulation numérique du comportement des matériaux hétérogènes par une méthode de calcul fondée sur la description des collisions et l'atomisation des efforts réguliers (méthode A-CD<sup>2</sup>)

**Stefano DAL PONT  
Éric DIMNET\***

Université Paris-Est,  
Laboratoire central des ponts et chaussées,  
Paris, France

## RÉSUMÉ

Une méthode de simulation numérique des matériaux hétérogènes, fondée sur la description des collisions multiples et la méthode des percussions (PM), est présentée. Un matériau hétérogène est constitué d'un ensemble de solides rigides encore appelés grains, déformable en tant que système mécanique, même si chacune des particules qui le constituent est rigide. L'application du principe des travaux virtuels à ce système permet d'obtenir les équations de son évolution pour les collisions qui surviennent entre les grains et occasionnent des discontinuités de vitesse dans le temps (partie irrégulière de l'évolution), ainsi que pour les mouvements où les vitesses sont continues et dérивables par rapport au temps (partie régulière de l'évolution). Les équations décrivant la partie régulière de l'évolution des grains sont discrétisées en temps selon la méthode des percussions, qui consiste à exercer tous les efforts actifs dans le système sous forme de percussions à intervalles de temps réguliers. L'évolution du système est alors décrite par un formalisme unique constitué des équations de discontinuité des vitesses, ce qui constitue la méthode A-CD<sup>2</sup> (Atomized stresses Contact Dynamics respecting a Clausius-Duhem inequality). Cette méthode est appliquée aux lois de comportement associées (frottement visqueux, etc.) et aux lois de comportement non associées comme le frottement de Coulomb. Des exemples de simulation numérique de systèmes multi-solides représentant des matériaux hétérogènes sont présentés.

Numerical simulation of the behavior of heterogeneous materials by a calculation method based on the description of collisions and the fragmentation of efforts regular (method A-CD<sup>2</sup>)

## ABSTRACT

A numerical simulation method for heterogeneous materials, based on a description of multiple collisions and the percussion method (PM), will be presented herein. A heterogeneous material is composed of a set of rigid solids, still called grains, that may be deformed as a mechanical system, even if each component particle indeed remains rigid. Application of the virtual work principle to this system yields the evolution equations for the intergranular collisions that arise and cause velocity discontinuities over time (i.e. the irregular part of evolution) as well as for motions in which velocities are continuous and differentiable with respect to time (the regular part of evolution). Equations describing the regular part of grain evolution are discretized in time according to the percussion method, which consists of applying all active stresses in the system in the form of percussions at regular time intervals. System evolution is thus described by a single formalism composed of velocity discontinuity equations, which gives rise to the method known as A-CD2 (for Atomized stresses Contact Dynamics respecting a Clausius-Duhem inequality). This method in turn is applied to both the associated constitutive laws (viscous friction, etc.) and non-associated constitutive laws, such as Coulomb friction. Numerical simulation examples of multi-solid systems representing heterogeneous materials will also be presented.

\*AUTEUR À CONTACTER :

**Éric DIMNET**  
eric.dimnet@lcpc.fr

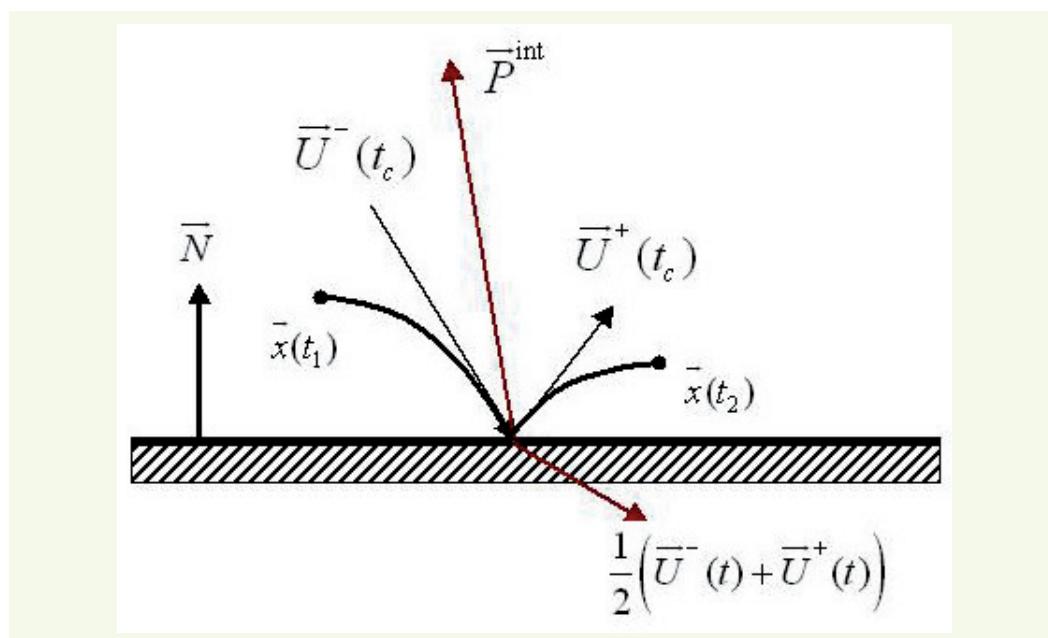
## INTRODUCTION

La simulation numérique d'un essai triaxial sur un matériau hétérogène ou celle de l'éboulement d'un milieu granulaire sont des sujets ouverts du génie civil qui ont en commun la question du contact unilatéral entre plusieurs solides. L'approche classique fondée sur la modélisation continue de la mécanique des sols présente des insuffisances reconnues, spécialement lorsque les contraintes sont importantes ou lorsque des ruptures se produisent au sein du matériau. Pour cette raison, de nombreux auteurs ont proposé des approches discrètes fondées sur la mécanique des milieux granulaires [1-7]. L'approche présentée ici repose sur la description des contacts entre grains selon le principe des travaux virtuels. Pour calculer les discontinuités de vitesse qui surviennent à l'occasion des contacts entre particules, il n'est pas possible d'utiliser les équations usuelles du mouvement puisque la vitesse n'est pas dérivable à ces instants. L'application du principe des travaux virtuels ainsi que l'usage de lois de comportement selon une formulation appropriée permettent d'obtenir les équations du mouvement pour les instants de discontinuité des vitesses. Les lois de comportement utilisées peuvent être des lois associées ou non, ce qui est particulièrement important dans le cas du frottement de Coulomb. L'approche présentée se révèle aussi performante pour la simulation de systèmes évoluant à partir d'un état d'équilibre vers des équilibres infiniment proches puis une rupture (essais triaxiaux) que pour la simulation de systèmes dynamiques (écoulements granulaires). La méthode A-CD<sup>2</sup> est issue du principe plus général de l'atomisation des efforts réguliers [1, 8]. Pour cette raison, elle est appelée « Atomized efforts Contact Dynamics respecting a Clausius-Duhem inequality » [8]. En outre, à partir du formalisme de la méthode A-CD<sup>2</sup>, l'existence et l'unicité de la solution des équations d'évolution ainsi qu'une inégalité de Clausius-Duhem apportant la preuve mathématique du caractère dissipatif de l'évolution du système sont établies. Enfin, des simulations numériques bidimensionnelles viennent illustrer l'approche proposée. Il s'agit de la simulation numérique de l'évolution de deux systèmes multi-particules : la première évolution est dynamique (écoulement granulaire) et la seconde est une évolution à partir d'un état d'équilibre vers une rupture (essai biaxial). Des résultats de simulations tridimensionnelles sont présentés dans les références [1, 9, 10].

## LE MODÈLE DE COLLISION ENTRE GRAINS

La modélisation mécanique des collisions entre particules est présentée à partir de la description de la collision entre un point matériel et un plan rigide et fixe. Ce système simplifié permet de réduire le nombre de degrés de liberté et de se focaliser sur le phénomène collisionnel. Les équations du mouvement sont étudiées sur un intervalle de temps  $[t_1, t_2]$  (**figure 1**) à l'intérieur duquel se trouve

**figure 1**  
Collision instantanée entre un point et un plan rigide et fixe.



l'instant  $t_c$  auquel survient une collision instantanée. La collision est supposée instantanée, ce qui a pour effet de concentrer toutes les forces de contact dans le temps pour les exercer à l'instant de la collision. L'effort ainsi obtenu est une percussion de contact [1, 8]. La vitesse du point  $\vec{U}$  est discontinue à l'instant de collision  $t_c$ . Ses limites à gauche et à droite sont désignées par les exposants - et +.

## ■ Le principe des travaux virtuels

Les efforts intérieurs (les forces et les percussions) sont définis à partir de leur travail. Le principe des travaux virtuels conduit à choisir comme travail virtuel des efforts intérieurs l'expression [1, 10-12] :

$$W^{\text{int}}(t_1, t_2, t_c, \vec{V}) = - \int_{t_1}^{t_2} \vec{r}(\tau) \vec{V} d\tau - \vec{P}^{\text{int}}(t_c) \frac{\vec{V}^-(t_c) + \vec{V}^+(t_c)}{2} \quad (1)$$

où  $\vec{V}$  est une vitesse virtuelle du point et  $t_c$  l'instant virtuel de collision. En particulier, l'équation (1) permet d'établir la dualité entre la percussion intérieure  $\vec{P}^{\text{int}}$  et la quantité  $\frac{\vec{V}^- + \vec{V}^+}{2}$ , qui peut de ce fait être désignée comme la vitesse de déformation à l'instant de la collision du système constitué du point et du plan.

Le travail virtuel des efforts d'accélération est :

$$W^{\text{acc}}(t_1, t_2, t_c, \vec{V}) = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{U}(\tau)}{d\tau} \vec{V}(\tau) d\tau + m (\vec{U}^+(t_c) - \vec{U}^-(t_c)) \frac{\vec{V}^-(t_c) + \vec{V}^+(t_c)}{2} \quad (2)$$

où  $m$  est la masse du point et  $\vec{U}$  sa vitesse réelle [1, 11, 12].

Enfin, le travail virtuel d'une percussion extérieure au système s'écrit :

$$W^{\text{ext}}(t_1, t_2, t_c, \vec{V}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r}^{\text{ext}}(\tau) \vec{V}(\tau) d\tau + \vec{P}^{\text{ext}}(t_c) \frac{\vec{V}^-(t_c) + \vec{V}^+(t_c)}{2} \quad (3)$$

Le principe des travaux virtuels implique que, pour toute vitesse virtuelle  $\vec{V}$  et tout instant  $t_c$ , on a :

$$W^{\text{acc}}(t_1, t_2, t_c, \vec{V}) = W^{\text{int}}(t_1, t_2, t_c, \vec{V}) + W^{\text{ext}}(t_1, t_2, t_c, \vec{V}) \quad (4)$$

Selon ce principe, les équations du mouvement du point dans l'intervalle  $[t_1, t_2]$  sont :

$$m \frac{d\vec{U}}{d\tau} = -\vec{r}^{\text{int}} + \vec{r}^{\text{ext}} \text{ presque partout} \quad (5)$$

et

$$m (\vec{U}^+ - \vec{U}^-) = -\vec{P}^{\text{int}} + \vec{P}^{\text{ext}} \text{ partout} \quad (6)$$

La percussion intérieure  $\vec{P}^{\text{int}}$  présente dans l'équation (6) est l'effort intérieur au système point-plan qui agit à l'instant de collision. La dualité au sens du travail des efforts intérieurs entre  $\vec{P}^{\text{int}}$  et  $\frac{\vec{V}^- + \vec{V}^+}{2}$  invite à exprimer les lois de comportement par l'expression de  $\vec{P}^{\text{int}}$  en fonction de  $\frac{\vec{U}^- + \vec{U}^+}{2}$ , conformément aux usages de la mécanique.

## ■ Les lois de comportement

Les lois de comportement traduisent les différents comportements collisionnels des matériaux et assurent la non-interpénétration des différentes particules lors d'une collision. Afin de distinguer

ces deux aspects, la percussion intérieure est divisée en deux parties : la percussion dissipative  $\vec{P}^d$  qui traduit les différents comportements collisionnels des matériaux et la percussion réactive  $\vec{P}^{reac}$  qui assure la non-interpénétration des particules, soit :

$$\vec{P}^{int} = \vec{P}^d + \vec{P}^{reac} \quad (7)$$

La percussion dissipative décrit les interactions (que l'on exige dissipatives) entre les particules. S'il s'agit d'une loi associée, elle est exprimée à l'aide d'un pseudopotentiel de dissipation  $\Phi^d$ , qui est une fonction positive, convexe et nulle à l'origine [1, 2, 13-16] :

$$\vec{P}^d \in \partial\Phi^d\left(\frac{\vec{U}^+ + \vec{U}^-}{2}\right) \quad (8)$$

où l'opérateur  $\partial$  désigne le sous-différentiel. Le cas des lois non associées comme le frottement de Coulomb est abordé dans la partie consacrée aux collisions simultanées de  $N$  solides.

La percussion réactive  $\vec{P}^{reac}$  est la réaction à la condition de non-interpénétration qui s'écrit  $U_N^+ \geq 0$  avec  $U_N^+ = \vec{U}^+ \cdot \vec{N}$  (*cf. figure 1*). Cette percussion est égale à 0 si  $U_N^+ > 0$ , est non nulle si  $U_N^+ = 0$  et assure que la condition  $U_N^+ < 0$  n'est pas vérifiée. Ces propriétés peuvent être énoncées à l'aide des fonctions indicatrices de la manière suivante [1, 2, 13] :

$$\vec{P}^{reac} \in \partial I_K\left(\frac{\vec{U}^+ + \vec{U}^-}{2} \cdot \vec{N}\right), K = \left[\frac{U_N^-}{2}, +\infty\right] \quad (9)$$

Comme  $K$  est un ensemble convexe contenant l'origine, l'indicatrice  $I_K$  est un pseudopotentiel de dissipation [14-16].

La percussion intérieure peut ainsi être exprimée en fonction d'un seul pseudopotentiel :

$$\vec{P}^{int} \in \partial\Phi\left(\frac{\vec{U}^+ + \vec{U}^-}{2}\right) \text{ avec } \Phi = \Phi^d + I_K \quad (10)$$

c'est-à-dire que la percussion intérieure dérive d'un pseudopotentiel de dissipation.

## COLLISION SIMULTANÉE DE $N$ SOLIDES

La théorie des collisions, présentée à partir du cas simple que constitue la collision d'un point et d'un plan, peut être généralisée à la collision simultanée de  $N$  solides. Les contacts entre solides sont supposés ponctuels. On considère  $N$  solides qui s'entrechoquent à l'instant  $t$ . Le solide  $i$  a comme masse  $m_i$ , pour centre de gravité  $G_i$  et comme tenseur d'inertie  $I_i$ . Le  $k$ -ième contact entre le solide  $i$  et le solide  $j$  se produit au point  $A_{i,j,k} \cdot S_{i,j}$  est l'ensemble des points de contact entre les solides  $i$  et  $j$ . Si ces deux solides ne sont pas en contact,  $S_{i,j}$  n'est pas nécessairement vide. En effet, des interactions instantanées à distance entre des solides qui ne se touchent pas peuvent être ajoutées au modèle [1]. Dans ce cas,  $S_{i,j}$  est non vide même si les solides ne se touchent pas. Cette hypothèse n'est pas envisagée ici.

La percussion  $\vec{P}_{i,j,k}^{int}$  s'exerce au point de contact  $A_{i,j,k} \cdot \vec{V}_i$  est la vitesse virtuelle du centre de gravité  $G_i$  et  $\vec{\omega}_i$  est la vitesse virtuelle de rotation du solide  $i$ . Des percussions extérieures  $\vec{P}_{i,l}^{ext}$  sont exercées aux points  $B_{i,l}$  du solide  $i$ .  $S'_i$  contient les points  $B_{i,l}$  auxquels des percussions extérieures sont appliquées au solide  $i$ . En définissant le vecteur  $\hat{V} = (\vec{V}_i, \vec{\omega}_i)$ , les vitesses relatives des solides aux points de contact  $A_{i,j,k}$  sont :

$$\vec{D}_{i,j}(\hat{V}, A_{i,j,k}) = \vec{V} + \vec{\omega}_i \wedge \overrightarrow{G_i A_{i,j,k}} - (\vec{V}_j + \vec{\omega}_j \wedge \overrightarrow{G_j A_{i,j,k}}) \quad (11)$$

et les vitesses aux points  $B_{i,l}$  du solide  $i$  sont :

$$\vec{E}_i(\hat{V}, B_{i,l}) = \vec{V}_i + \vec{\omega}_i \wedge \overrightarrow{G_i B_{i,l}} \quad (12)$$

Dans la suite, on se limite à considérer le système constitué des  $N$  solides à l'instant de la collision. En notant  $\vec{U}_i$ ,  $\vec{\Omega}_i$  les vitesses du solide  $i$  ( $\vec{V}_i$ ,  $\vec{\omega}_i$  étant ses vitesses virtuelles) le principe des travaux virtuels implique :

$$\begin{aligned} & \forall \hat{V}, \sum_{i=1}^N \left\{ m_i (\vec{U}_i^+ - \vec{U}_i^-) \cdot \left( \frac{\vec{V}_i^+ + \vec{V}_i^-}{2} - \frac{\vec{U}_i^+ + \vec{U}_i^-}{2} \right) + I_i (\vec{\Omega}_i^+ - \vec{\Omega}_i^-) \cdot \left( \frac{\vec{\omega}_i^+ + \vec{\omega}_i^-}{2} - \frac{\vec{\Omega}_i^+ + \vec{\Omega}_i^-}{2} \right) \right\} \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sum_{A_{i,j,k} \in S_{i,j}} \bar{P}_{i,j,k}^{\text{int}} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left( \bar{D}_{i,j}(\hat{V}^+, A_{i,j,k}) + \bar{D}_{i,j}(\hat{V}^-, A_{i,j,k}) \right) - \frac{1}{2} \left( \bar{D}_{i,j}(\hat{U}^+, A_{i,j,k}) + \bar{D}_{i,j}(\hat{U}^-, A_{i,j,k}) \right) \right\} \\ & - \sum_{i=1}^N \sum_{B_{i,l} \in S'_i} \bar{P}_{i,l}^{\text{ext}} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left( \bar{E}_i(\hat{V}^+, B_{i,l}) + \bar{E}_i(\hat{V}^-, B_{i,l}) \right) - \frac{1}{2} \left( \bar{E}_i(\hat{U}^+, B_{i,l}) + \bar{E}_i(\hat{U}^-, B_{i,l}) \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

où  $\hat{U} = (\vec{U}_i, \vec{\Omega}_i)$  et  $\hat{V} = (\vec{V}_i, \vec{\omega}_i)$  sont les vitesses réelles et virtuelles du système. Cette expression conduit aux équations du mouvement du système à l'instant de la collision. Il convient de la compléter par des lois de comportement afin d'obtenir les équations de la collision qui permettent de calculer les vitesses  $\hat{U}^+$  du système après la collision.

## ■ Lois de comportement

### > Lois de comportement associées

Les lois de comportement associées sont exprimées à l'aide de pseudopotentiels de dissipation :

$$\bar{P}_{i,j,k}^{\text{int}} \in \partial \Phi_{i,j,k} \left( \frac{\bar{D}_{i,j}(\hat{U}^+, A_{i,j,k}) + \bar{D}_{i,j}(\hat{U}^-, A_{i,j,k})}{2} \right) \quad (14)$$

$\Phi_{i,j,k}$  est un pseudopotentiel de dissipation. Il est la somme d'un pseudopotentiel décrivant le comportement collisionnel des solides  $i$  et  $j$  et de la fonction indicatrice  $\tilde{I}_K : \vec{D} \rightarrow I_K(\vec{D} \cdot \vec{N})$  qui assure la non-interpénétration des deux solides. Ce dernier terme requiert la définition d'une normale au point de contact. À cette fin, il suffit que l'un des deux solides soit régulier au point de contact. Le cas des collisions pointe-pointe traité dans [14] n'est pas envisagé ici. En substituant la relation (14) dans (13) et en appliquant l'inégalité du sous-différentiel [2], on obtient :

$$\begin{aligned} & \forall \hat{V}, \sum_{i=1}^N \left\{ m_i (\vec{U}_i^+ + \vec{U}_i^-) \cdot \left( \frac{\vec{V}_i^+ + \vec{V}_i^-}{2} - \frac{\vec{U}_i^+ + \vec{U}_i^-}{2} \right) + I_i (\vec{\Omega}_i^+ - \vec{\Omega}_i^-) \cdot \left( \frac{\vec{\omega}_i^+ + \vec{\omega}_i^-}{2} - \frac{\vec{\Omega}_i^+ + \vec{\Omega}_i^-}{2} \right) \right\} \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sum_{A_{i,j,k} \in S_{i,j}} \left\{ \Phi_{i,j,k} \left( \frac{1}{2} \left( \bar{D}_{i,j}(\hat{V}^+, A_{i,j,k}) + \bar{D}_{i,j}(\hat{V}^-, A_{i,j,k}) \right) \right) - \Phi_{i,j,k} \left( \frac{1}{2} \left( \bar{D}_{i,j}(\hat{U}^+, A_{i,j,k}) + \bar{D}_{i,j}(\hat{U}^-, A_{i,j,k}) \right) \right) \right\} \\ & - \sum_{i=1}^N \sum_{B_{i,l} \in S'_i} \bar{P}_{i,l}^{\text{ext}} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left( \bar{E}_i(\hat{V}^+, B_{i,l}) + \bar{E}_i(\hat{V}^-, B_{i,l}) \right) - \frac{1}{2} \left( \bar{E}_i(\hat{U}^+, B_{i,l}) + \bar{E}_i(\hat{U}^-, B_{i,l}) \right) \right\} \geq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Comme chaque fonction

$$\hat{V} \rightarrow \Phi_{i,j,k} \left( \bar{D}_{i,j} \left( \hat{V}, A_{i,j,k} \right) \right) = \Phi_{i,j,k} \left( \vec{V}_i + \vec{\omega}_i \wedge \overrightarrow{G_i A}_{i,j,k} - \left( \vec{V}_j + \vec{\omega}_j \wedge \overrightarrow{G_j A}_{i,j,k} \right) \right) \quad (16)$$

est un pseudopotentiel de dissipation, la fonction

$$\hat{V} \rightarrow \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sum_{A_{i,j,k} \in S_{i,j}} \Phi_{i,j,k} \left( \bar{D}_{i,j} \left( \hat{V}, A_{i,j,k} \right) \right) = \Phi(\hat{V}) \quad (17)$$

est également un pseudopotentiel de dissipation.

La définition du produit scalaire :

$$\langle \hat{U}, \hat{V} \rangle = \sum_{i=1}^N \{ m_i \vec{U}_i \cdot \vec{V}_i + I_i \vec{\Omega}_i \cdot \vec{\omega}_i \} \quad (18)$$

permet de réécrire l'inégalité (15)

$$\left\langle \hat{U}^+ - \hat{U}^- - T^{\text{ext}}, \hat{V} - \frac{\hat{U}^+ + \hat{U}^-}{2} \right\rangle + \Phi(\hat{V}) - \Phi\left(\frac{\hat{U}^+ + \hat{U}^-}{2}\right) \geq 0 \quad (19)$$

pour tout  $\hat{V}$  appartenant à  $R^{6N}$ , où  $T^{\text{ext}}$  est un élément de  $R^{6N}$  défini par

$$\langle T^{\text{ext}}, \hat{V} \rangle = \sum_{k=1}^N \{ \vec{R}_k \cdot \vec{V}_k + \vec{M}_k \cdot \vec{\omega}_k \} \quad (20)$$

$\vec{R}_k$  est la résultante des percussions extérieures appliquées au solide  $k$  et  $\vec{M}_k$  leur moment par rapport au centre de gravité de  $k$ .

Dans  $R^{6N}$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  l'inégalité (19) est équivalente à :

$$-\left( \hat{U}^+ - \hat{U}^- - T^{\text{ext}} \right) \in \partial \Phi\left(\frac{\hat{U}^+ + \hat{U}^-}{2}\right) \quad (21)$$

ce qui se réduit, en notant  $X = \frac{\hat{U}^+ + \hat{U}^-}{2}$ , à :

$$2\hat{U}^- + T^{\text{ext}} \in 2X + \partial \Phi(X) \quad (22)$$

Enfin, les formulations (19) et (22) sont équivalentes au problème de minimisation

$$\inf \left\{ \langle Y, Y \rangle + \Phi(Y) - \langle 2\hat{U}^- + T^{\text{ext}}, Y \rangle \mid Y \in R^{6N} \right\} \quad (23)$$

puisque l'argument  $X$  qui réalise le minimum vérifie la condition de Karush-Kuhn-Tucker [16] :

$$0(6N) \in 2X + \partial \Phi(X) - 2\hat{U}^- - T^{\text{ext}} \quad (24)$$

c'est-à-dire l'inclusion (22), où  $0(6N)$  désigne l'élément nul de  $R^{6N}$ .

L'existence et l'unicité de la solution dans le cas où des lois de comportement associées sont utilisées constituent le théorème suivant :

**Théorème 1 :** Si toutes les lois de comportement dérivent d'un pseudopotentiel de dissipation, la collision simultanée de  $N$  solides rigides admet une solution unique  $\hat{U}^+$ .

La démonstration est une conséquence de la forte convexité de la fonction

$$Y \rightarrow \mathcal{F}(Y) = \langle Y, Y \rangle + \Phi(Y) - \langle 2\hat{U}^- + T^{\text{ext}}, Y \rangle \quad (25)$$

Elle repose sur les majorations suivantes :

$$\left\langle \frac{X+Y}{2}, \frac{X+Y}{2} \right\rangle \leq \frac{1}{4} (\langle X, X \rangle + \langle Y, Y \rangle + 2 \langle X, Y \rangle) \quad (26)$$

$$\left\langle \frac{X+Y}{2}, \frac{X+Y}{2} \right\rangle \leq \frac{1}{4} (2 \langle X, X \rangle + 2 \langle Y, Y \rangle - \langle X-Y, X-Y \rangle) \quad (27)$$

$$\left\langle \frac{X+Y}{2}, \frac{X+Y}{2} \right\rangle \leq \frac{\langle X, X \rangle + \langle Y, Y \rangle}{2} - \frac{2}{8} \langle X-Y, X-Y \rangle \quad (28)$$

Par ailleurs :

$$\Phi\left(\frac{X+Y}{2}\right) \leq \frac{\Phi(X) + \Phi(Y)}{2} \quad (29)$$

puisque  $\Phi$  est un pseudopotentiel de dissipation.

Enfin

$$-\left\langle 2\hat{U}^- + T^{\text{ext}}, \frac{X+Y}{2} \right\rangle = \frac{-\langle 2\hat{U}^- + T^{\text{ext}}, X \rangle - \langle 2\hat{U}^- + T^{\text{ext}}, Y \rangle}{2} \quad (30)$$

On déduit des relations (28), (29) et (30) que, dans  $R^{6N}$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme associée :

$$\mathcal{F}\left(\frac{X+Y}{2}\right) \leq \frac{\mathcal{F}(X) + \mathcal{F}(Y)}{2} - \frac{2}{8} \|X-Y\|^2 \quad (31)$$

Ainsi,  $\mathcal{F}$  est fortement convexe puisqu'elle est  $\alpha$ -convexe ( $\alpha=2$ ) [1, 16]. De telles fonctions admettent un minimum unique sur  $(R^{6N}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$  qui est un espace de Hilbert. Ceci démontre l'existence et l'unicité de la solution au problème (23).

Les lois de comportement (14) dérivant d'un pseudopotentiel de dissipation, l'inégalité du sous-différentiel fournit :

$$\bar{P}_{i,j,k}^{\text{int}} \cdot \left( \frac{\bar{D}_{i,j}(\hat{U}^+, A_{i,j,k}) + \bar{D}_{i,j}(\hat{U}^-, A_{i,j,k})}{2} \right) \geq 0 \quad (32)$$

pour chaque  $A_{i,j,k}$ , d'où :

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sum_{A_{i,j,k} \in S_{i,j}} \bar{P}_{i,j,k}^{\text{int}} \cdot \left( \frac{\bar{D}_{i,j}(\hat{U}^+, A_{i,j,k}) + \bar{D}_{i,j}(\hat{U}^-, A_{i,j,k})}{2} \right) \geq 0 \quad (33)$$

Si on ne tient pas compte de la variation instantanée de température à l'instant de la collision, cette inégalité constitue une inégalité de Clausius-Duhem pour la collision [17]. Elle prouve que l'évolution est dissipative, c'est-à-dire qu'en l'absence d'effort extérieur exercé sur le système, son énergie cinétique diminue :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left( m_i (\vec{U}_i^+ - \vec{U}_i^-) \cdot \frac{\vec{U}_i^+ + \vec{U}_i^-}{2} + I_i (\vec{\Omega}_i^+ - \vec{\Omega}_i^-) \cdot \frac{\vec{\Omega}_i^+ + \vec{\Omega}_i^-}{2} \right) = - \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sum_{A_{i,j,k} \in S_{i,j}} \bar{P}_{i,j,k}^{\text{int}} \cdot \frac{1}{2} \left( \bar{D}_{i,j}(\hat{U}^+, A_{i,j,k}) + \bar{D}_{i,j}(\hat{U}^-, A_{i,j,k}) \right) \leq 0 \end{aligned} \quad (34)$$

### > Lois de comportement non associées

Précédemment, les lois de comportement ont été considérées comme associées, c'est-à-dire dérivant d'un pseudopotentiel de dissipation. Pourtant, certains comportements n'entrent pas dans ce cadre ; c'est le cas du frottement de Coulomb. Si  $\vec{P}$  est la percussion exercée en un point de contact où la normale est  $\vec{N}$ , sa composante tangentielle  $\vec{P}_T$  appartenant au plan perpendiculaire à  $\vec{N}$  et sa composante normale  $P_N = \vec{P} \cdot \vec{N}$  vérifient :

$$\begin{aligned} \|\vec{P}_T\| &\leq \mu P_N \text{ avec } \mu > 0 \text{ et} \\ \begin{cases} \text{si } \|\vec{P}_T\| < \mu P_N \text{ alors } \vec{X}_T = \vec{0} \\ \text{si } \|\vec{P}_T\| = \mu P_N \text{ alors } \exists \lambda \text{ tel que } \vec{X}_T = \lambda \vec{P}_T \end{cases} \end{aligned} \quad (35)$$

Ce comportement ne peut pas être exprimé par une loi associée. On établit néanmoins que, dans le cas du frottement de Coulomb, la collision est toujours dissipative et qu'elle admet une solution unique à condition que les coefficients de frottement soient petits.

En ce qui concerne le caractère dissipatif, il suffit de remarquer que les percussions  $\vec{P}_{i,j,k}^{\text{int}}$  exprimées selon la loi de Coulomb vérifient l'inégalité (32). Ceci implique également les inégalités (33) et (34), démontrant le caractère dissipatif de la collision.

La question de l'existence et de l'unicité de la solution est traitée à partir d'une suite dont les termes sont les solutions du problème obtenu lorsque la loi de frottement utilisée est une loi de Tresca qui présente la particularité d'avoir un seuil de glissement indépendant de l'effort normal et donc d'être une loi associée. Il a été montré que cette suite de solutions converge vers la solution unique du problème avec frottement de Coulomb si les coefficients de frottement sont petits [1].

Si, en chaque contact, la percussion normale  $P_N$  est connue ou fixée, la percussion tangentielle dérive d'un pseudopotentiel de dissipation :

$$\vec{P}_T \in \partial \Phi_T \left( \frac{\vec{V}_T^+ + \vec{V}_T^-}{2} \right) \quad (36)$$

avec  $\Phi_T \left( \frac{\vec{V}_T^+ + \vec{V}_T^-}{2} \right) = \mu P_N \left\| \frac{\vec{V}_T^+ + \vec{V}_T^-}{2} \right\|$ , où  $\vec{V}_T$  est la vitesse relative tangentielle des deux solides au point de contact. La solution  $X$  du problème pour lequel les percussions normales sont connues

ou fixées est l'argument qui réalise le minimum de la fonction fortement convexe :

$$X = \arg \min \left\{ \langle Y, Y \rangle + \Phi(\hat{P}_N(X), Y) - \langle 2\hat{U}^- + T^{\text{ext}}, Y \rangle \mid Y \in R^{6N} \right\} \quad (37)$$

dans laquelle le vecteur  $\hat{P}_N(X)$  contient les valeurs de  $P_N$  pour chaque contact et le pseudopotentiel  $\Phi(\hat{P}_N(X), Y)$  est la somme sur tous les contacts des termes :

$$\mu P_N \left\| \frac{\vec{V}_T^+ + \vec{V}_T^-}{2} \right\| \quad (38)$$

Le problème avec frottement de Coulomb est ainsi traité par le processus itératif qui consiste à résoudre, à chaque étape, un problème avec loi de Tresca ; les seuils de glissement constants utilisés à l'étape  $n + 1$  sont les percussions normales obtenues à l'étape  $n$  multipliées par le coefficient de frottement :

$$X_{n+1} = \arg \min \left\{ \langle Y, Y \rangle + \Phi(\hat{P}_N(X_n), Y) - \langle 2\hat{U}^- + T^{\text{ext}}, Y \rangle \mid Y \in R^{6N} \right\} \quad (39)$$

L'existence et l'unicité de la solution sont acquises dans le cas où la suite  $X_n$  converge. On montre qu'il existe deux réels positifs  $M$  et  $M'$ , dépendant de la taille des grains, tels que, dans le cas de  $NC$  contacts simultanés, si l'inégalité

$$\mu < \frac{1}{16 * NC^2 * M(1+M')^2} \quad (40)$$

est vérifiée, il existe alors une unique solution à la collision avec frottement de Coulomb [1]. Si les coefficients de frottement sont différents en chaque contact, on peut appliquer cette inégalité au plus grand d'entre eux.

## MÉTHODE NUMÉRIQUE

Une théorie des collisions instantanées de plusieurs solides a été présentée. On s'intéresse maintenant à l'évolution des systèmes multi-particules dans le temps. La méthode proposée permet de calculer une solution approchée de l'évolution des systèmes de  $N$  particules.

Soit  $f_{int}$  l'élément de  $R^{6N}$  contenant les résultantes des forces intérieures (par exemple, des forces de contact) exercées sur chaque particule et leurs moments. Les coordonnées  $6(i-1)+1,2,3$  sont les trois composantes de la résultante des forces exercées sur la particule  $i$  et les coordonnées  $6(i-1)+4,5,6$  sont les trois composantes de leur moment par rapport au centre de gravité de  $i$ .

De même,  $f_{ext}$  contient les résultantes des forces extérieures (par exemple, du poids) exercées sur chaque particule et leurs moments.  $P^{int}$  et  $P^{ext}$  sont les éléments de  $R^{6N}$  contenant les résultantes des percussions intérieures et extérieures exercées sur chaque particule ainsi que leurs moments par rapport aux centres de gravité des particules. Les équations du mouvement du système sont données sur un intervalle de temps quelconque par :

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -f^{int} + f^{ext} \text{ presque partout} \\ U^+ - U^- &= -P^{int} + P^{ext} \text{ partout} \end{aligned} \quad (41)$$

où  $U$  est le vecteur qui contient les vitesses de toutes les particules.

Entre l'instant 0 et l'instant  $t$ , les efforts cumulés  $R^{int}$  et  $R^{ext}$  sont :

$$\begin{aligned} R^{int}(t) &= \int_0^t f^{int}(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^t P^{int}(t_i) \delta_{t_i}(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t f^{int}(\tau) d\tau + \sum_{i=1}^t P^{int}(t_i) H(t-t_i), \text{ et} \\ R^{ext}(t) &= \int_0^t f^{ext}(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^t P^{ext}(t_j) \delta_{t_j}(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t f^{ext}(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^t P^{ext}(t_j) H(t-t_j) \end{aligned} \quad (42)$$

où  $t_i$  et  $t_j$  sont les instants auxquels des percussions intérieures et extérieures sont exercées.  $H$  est la fonction d'Heaviside et  $\delta$  la distribution de Dirac. Les équations du mouvement s'écrivent, au sens des mesures,

$$dV(t) = -dR^{int}(t) + dR^{ext}(t) \quad (43)$$

en fonction des efforts cumulés.

La méthode des percussions (PM) consiste à approcher les éléments réguliers de  $R_{int}$  et de  $R_{ext}$  par des percussions, ce qui est appelé *l'atomisation des efforts*. Une évolution approchée est alors obtenue, qui se caractérise par une succession de discontinuités de vitesse séparées par des évolutions à vitesse constante. Lorsqu'elle est appliquée à des systèmes de solides, cette méthode porte le nom de méthode A-CD<sup>2</sup>.

D'un point de vue pratique, l'application de la méthode A-CD<sup>2</sup> consiste :

- à découper la durée de simulation  $[0, T]$  en  $n$  intervalles  $[t_k, t_{k+1}]$  de longueur  $\Delta_n = \frac{T}{n}$ . Sur chacun de ces intervalles, les efforts réguliers (forces et moments) sont atomisés, c'est-à-dire remplacés par une percussion exercée à l'instant  $\theta_k = t_k + \frac{1}{2}\Delta_n$  ;
- à considérer que tous les efforts irréguliers (percussions exercées à l'occasion des collisions) que subit le système pendant l'intervalle de temps  $[t_k, t_{k+1}]$  sont exercés à l'instant  $\theta_k$ .

Il en découle que les vitesses sont discontinues aux instants  $\theta_k$  où des percussions sont exercées et qu'elles sont constantes partout ailleurs. Les percussions exercées aux instants  $\theta_k$  sont les percussions résultant de l'atomisation des efforts réguliers (forces et moments) qui s'exercent pendant  $[t_k, t_{k+1}]$  ainsi que les percussions dues aux collisions survenant pendant  $[t_k, t_{k+1}]$ .

### ■ L'atomisation des efforts réguliers

L'atomisation d'une force  $f$  sur l'intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$  consiste à la remplacer par une percussion  $P$  exercée à l'instant  $\theta_k$ . Dans le cas le plus général,  $f$  dépend d'une variable  $y$  qui dépend du temps. L'approximation utilisée part de la constatation du fait que :

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y(\tau)) d\tau \approx (t_{k+1} - t_k) f\left(\frac{y^+(\theta_k) + y^-(\theta_k)}{2}\right) \quad (44)$$

ainsi,  $f$  est remplacée par la percussion :

$$P(t) = \Delta_n f\left(\frac{y^+(\theta_k) + y^-(\theta_k)}{2}\right) \delta_{\theta_k}(t) \quad (45)$$

qui est la dérivée de

$$E_P(t) = \Delta_n f\left(\frac{y^+(\theta_k) + y^-(\theta_k)}{2}\right) H(t - \theta_k) \quad (46)$$

par rapport au temps.

En pratique, on rencontre le plus souvent l'une des quatre situations suivantes : les forces constantes, celles qui dépendent du temps (la fonction  $y$  est l'identité), celles qui dépendent des positions (la fonction  $y$  désigne les positions) et celles qui dépendent des vitesses (la fonction  $y$  désigne les vitesses).

Une force constante  $f_0$  est remplacée par une percussion d'intensité  $f_0 \Delta_n$ . Par exemple l'action du poids,  $- \int_{t_k}^{t_{k+1}} g dt$ , est remplacée par celle de la percussion

$$(0, 0, -g\Delta_n, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, -g\Delta_n, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, -g\Delta_n, 0, 0, 0) \quad (47)$$

exercée à l'instant  $\theta_k$

Une force  $f(t)$  exercée sur le système pendant l'intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$ , est remplacée par la percussion d'intensité  $\Delta_n f(\theta_k)$  exercée à l'instant  $\theta_k$ .

Une force  $f(X(t))$  dépendant des positions  $X$  des éléments du système, exercée sur le système pendant l'intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$ , est remplacée par une percussion d'intensité  $\Delta_n f(X(\theta_k))$  exercée à

l'instant  $\theta_k$ . En effet, les positions étant des fonctions continues,  $\frac{X^+(\theta_k) + X^-(\theta_k)}{2} = X(\theta_k)$ . Ainsi,

si deux points du système sont liés par une liaison élastique dont la force de rappel dépend d'un allongement  $x(t)$  (qui est une différence de positions) à l'instant  $t$ , le module de la force de rappel étant  $k|x(t)|$ , cette force est alors remplacée par une percussion d'intensité  $\Delta_n k|x(\theta_k)|$  exercée à l'instant  $\theta_k$ .

Une force  $f(V(t))$  dépendant des vitesses  $V$  du système, exercée sur le système pendant l'intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$  est remplacée par une percussion d'intensité  $\Delta_n f(\frac{V^+(\theta_k) + V^-(\theta_k)}{2})$  exercée à l'instant  $\theta_k$ , puisque les vitesses sont discontinues à l'instant  $\theta_k$ .

## ■ Algorithme de résolution des équations obtenues

La méthode conduit à des vitesses qui sont des fonctions en escalier : elles subissent des discontinuités aux instants  $\theta_k$  et sont constantes partout ailleurs. Ainsi, sur  $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ , les vitesses sont constantes et chaque particule se déplace avec un vecteur vitesse et un vecteur vitesse de rotation constants. La manière de procéder à ces déplacements n'est pas discutée ici. En revanche, la manière de calculer les discontinuités de vitesse qui surviennent aux instants  $\theta_k$  nécessite un développement. On peut tout d'abord remarquer que, grâce à la manière dont est réalisée l'atomisation des efforts réguliers (équation (45)), les équations qui régissent ces discontinuités sont de la même forme que l'équation (13) qui décrit les collisions simultanées de  $N$  solides.

### > Cas où les lois de comportement dérivent d'un pseudopotentiel

Les percussions qui sont responsables de la discontinuité de vitesse à l'instant  $\theta_k$  proviennent soit des collisions survenant sur l'intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$ , soit de l'atomisation des efforts réguliers sur cet intervalle. Dans l'hypothèse où ces percussions dérivent d'un pseudopotentiel, le problème à résoudre est formulé selon les trois manières équivalentes :

$$\begin{aligned} \forall V, \left\langle U^+ - U^- - T^{\text{ext}}, V - \frac{U^+ + U^-}{2} \right\rangle + \Phi(V) - \Phi\left(\frac{U^+ + U^-}{2}\right) &\geq 0 \\ 2U^- + T^{\text{ext}} &\in 2X + \partial\Phi(X) \quad \text{avec} \quad X = \frac{U^- + U^+}{2} \\ \inf_{Y \in R^{6N}} \left\{ \langle Y, Y \rangle + \Phi(Y) - \langle 2U^- + T^{\text{ext}}, Y \rangle \right\} \end{aligned} \tag{48}$$

chacune des percussions dérivant du pseudopotentiel

$$X \rightarrow \Phi_{i,j,k}(D_{i,j}(X, A_{i,j,k})), \tag{49}$$

La fonction

$$X \rightarrow \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sum_{A_{i,j,k} \in S_{i,j}} \Phi_{i,j,k}(D_{i,j}(X, A_{i,j,k})) = \Phi(X) \tag{50}$$

est également un pseudopotentiel et peut être séparé en deux parties :

$$\Phi(X) = \Phi^d(X) + \Phi^r(X) \tag{51}$$

$\Phi^r(X)$  est la somme des fonctions indicatrices assurant la non-interpénétration aux points de contact qui sont pour l'occasion renommés  $B_l (l=1,p)$  ( $p$  étant le nombre de contacts) :

$$\Phi^r(X) = \sum_{i=1}^p I_{\left[d_i\left(\frac{V^-}{2}\right), +\infty\right]}(\varphi_l(X)), d_i(X) = D_{i,j}(X, B_l) \cdot \bar{N}_l \quad l=1,p \quad (52)$$

$\Phi^d(X)$  est la somme de tous les pseudopotentiels de dissipation associés à la partie dissipative des percussions. Dans la suite, elle sera supposée différentiable.

L'équation qui gouverne la discontinuité de vitesse est alors équivalente à la minimisation de :

$$\mathcal{F}(Y) = \langle Y, Y \rangle + \Phi(Y) - \langle 2V^- + P^e, Y \rangle, \text{ avec } Y \in R^{6N} \quad (53)$$

ou encore de

$$\mathcal{F}(Y) = \langle Y, Y \rangle + \Phi^d(Y) - \langle 2V^- + P^e, Y \rangle \quad (54)$$

$$\text{avec } Y \in \Omega, \Omega = \left\{ Y \in R^{6N} / \varphi_l(Y) = -d_l(Y) + d_l\left(\frac{V^-}{2}\right) \leq 0 \quad l=1,p \right\}$$

$P^e$  est défini de la même manière que  $T^{ext}$  par la relation (20).  $T^{ext}$  contient les résultantes et les moments des percussions extérieures appliquées au système à l'instant d'une collision.  $P^e$  contient les résultantes et les moments des percussions extérieures exercées sur le système pendant l'intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$  ainsi que ceux des percussions issues de l'atomisation des forces qui ne dépendent pas des vitesses.

La minimisation de cette fonction est équivalente à la recherche de point-selle du Lagrangien qui lui est associé [1] :

$$L(Y, \mu) \in \Omega \times R_+^p \rightarrow \mathcal{F}(Y) + \sum_{l=1}^p \mu_l \varphi_l(Y) \quad (55)$$

Le domaine  $\Omega$  ainsi que les fonctions  $F$  et  $\Phi^d(Y)$  sont convexes. Aussi, si  $X$  est une solution, il existe au moins un  $\lambda$  dans  $R_+^p$  tel que  $(X, \lambda)$  soit un point-selle de  $L$  [13, 16] :

$$L(X, \lambda) = \inf_{Y \in R^{6N}} \sup_{\mu \in R_+^p} L(Y, \mu) = \sup_{\mu \in R_+^p} \inf_{Y \in R^{6N}} L(Y, \mu) \quad (56)$$

Ceci conduit à considérer le problème dual ( $\mathcal{Q}$ ) qui est la maximisation de :

$$G(\mu) = \inf_{Y \in R^{6N}} L(Y, \mu) \text{ avec } \mu \in R_+^p \quad (57)$$

La résolution du problème consiste à appliquer au problème dual une méthode de gradient à pas fixe suivie d'une projection sur le domaine d'optimisation. Cette approche est appelée méthode d'Uzawa [1].

En un point  $\mu \in R_+^p$ , on note  $X_\mu$  l'élément qui minimise  $L(Y, \mu)$ . Ainsi

$$G(\mu) = L(X_\mu, \mu) = \mathcal{F}(X_\mu) + \sum_{l=1}^p \mu_l \varphi_l(X_\mu) \quad (58)$$

ce qui permet de remarquer que  $\nabla(G(\mu))_l = \varphi_l(X_\mu)$  est le gradient de  $G(\mu)$ . Le pas est noté  $\rho$ . La projection sur le domaine  $R_+^p$  se fait aisément :

$$\max\{0, \rho \varphi_l(X_\mu)\}, \quad (l=1,p) \quad (59)$$

L'algorithme peut être résumé comme suit :

1.  $\mu^0 \in \mathbb{R}_+^p$  est choisi à l'étape 0.
2. À chaque itération  $n$ ,  $X_n = \arg \min \left\{ \mathcal{F}(Y) + \sum_{l=1}^p \mu_l^n \varphi_l(Y), Y \in \mathbb{R}^{6N} \right\}$  est calculé
3.  $\mu^{n+1}$  est actualisé selon  $\mu_l^{n+1} = \max \{0, \rho \varphi_l(X_n)\}$ .

Cet algorithme permet de remplacer le problème initial de minimisation sous contrainte

$$\arg \min \left\{ \langle Y, Y \rangle + \Phi^d(Y) - \langle 2V^- + P^e, Y \rangle, Y \in \Omega \right\} \quad (60)$$

par une suite de problèmes de minimisation sans contrainte

$$\arg \min \left\{ \mathcal{F}(Y) + \sum_{l=1}^p \mu_l^n \varphi_l(Y), Y \in \mathbb{R}^{6N} \right\} \quad (61)$$

Les questions liées à la convergence en fonction de la valeur du pas  $\rho$  sont traitées dans la référence [18].

#### > Cas du frottement de Coulomb

La résolution du problème avec frottement de Coulomb se fait selon le même principe que celui utilisé pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution. En partant d'une première approximation des percussions normales,  $G_0 \in \mathbb{R}^p$ , la solution correspondant à la loi de Tresca (dont les seuils de glissement sont calculés à partir des éléments de  $G_0$ ) est calculée :

$$X_{G_0} = \arg \min \left\{ \langle Y, Y \rangle + \Phi(G_0, Y) - \langle 2U^- + P^{\text{ext}}, Y \rangle \mid Y \in \mathbb{R}^{6N} \right\} \quad (62)$$

Le pseudopotentiel  $\Phi(G_0, Y)$  est défini par l'équation (38) et le **théorème I** permet de conclure à l'existence et l'unicité de  $X_{G_0}$ .

La résolution de ce problème permet, à partir des percussions normales,

$$P_{N_{i,j,k}}^{G_0} = \vec{P}_{A_{i,j,k}}^{\text{int}} \cdot \vec{N}_{A_{i,j,k}} = D_{i,j} \left( 2U^- + P^{\text{ext}} - 2X_{G_0}, A_{i,j,k} \right) \cdot \vec{N}_{A_{i,j,k}} \quad (63)$$

de réactualiser les seuils de glissement pour l'itération suivante.

Chacun des problèmes avec loi de Tresca est un problème de minimisation sous contraintes. La méthode utilisée pour le résoudre est *a priori* celle qui est décrite dans la partie précédente. Cela conduirait à un algorithme constitué de deux boucles imbriquées de minimisations, une pour l'actualisation des seuils de glissement et l'autre constituée de la suite de problèmes de minimisation sous contraintes issue de la méthode d'Uzawa, ce qui conduirait à des temps de calcul prohibitifs. La solution originale proposée ici consiste à ne faire qu'une seule boucle dans laquelle les seuils de glissement ainsi que les valeurs des réactions aux contraintes sont réactualisés simultanément. Afin d'alléger les écritures, la méthode est décrite pour le cas bidimensionnel, ce qui a l'avantage de réduire la tangente au contact à une seule dimension.

Le problème (54) est d'abord modifié par l'ajout de contraintes de non-glissement à chaque contact :

$$\psi(X) = 0, s_l(X) = D_{i,j}(X, B_l) \cdot \vec{T}_l \quad l = 1, p \quad (64)$$

où  $\vec{T}_l$  est la direction tangente au contact  $l$ . On obtient ainsi le problème :

$$\mathcal{F}(Y) = \langle Y, Y \rangle + \Phi^d(Y) - \langle 2V^- + P^e, Y \rangle \quad (65)$$

$$\text{où } Y \in \Omega, \Omega = Y \in R^{6N} / \left\{ \begin{array}{l} \varphi_l(Y) = -d_l(Y) + d_l\left(\frac{V^-}{2}\right) \leq 0 \quad l=1,p \\ \psi_l(Y) = -s_l(Y) + s_l\left(\frac{V^-}{2}\right) = 0 \quad l=1,p \end{array} \right\}$$

Les nouvelles contraintes ont pour effet de forcer la solution à se trouver dans la branche I de la **figure 2**, pour cette première étape. Ce moyen de procéder est parfois désigné sous le terme de *méthode des multiplicateurs*. Le **théorème 1** indique que ce problème possède une solution unique.

La solution est calculée par la méthode précédemment décrite, modifiée pour tenir compte des contraintes supplémentaires d'égalité que comporte la relation (65). La résolution consiste à rechercher le point-selle du Lagrangien :

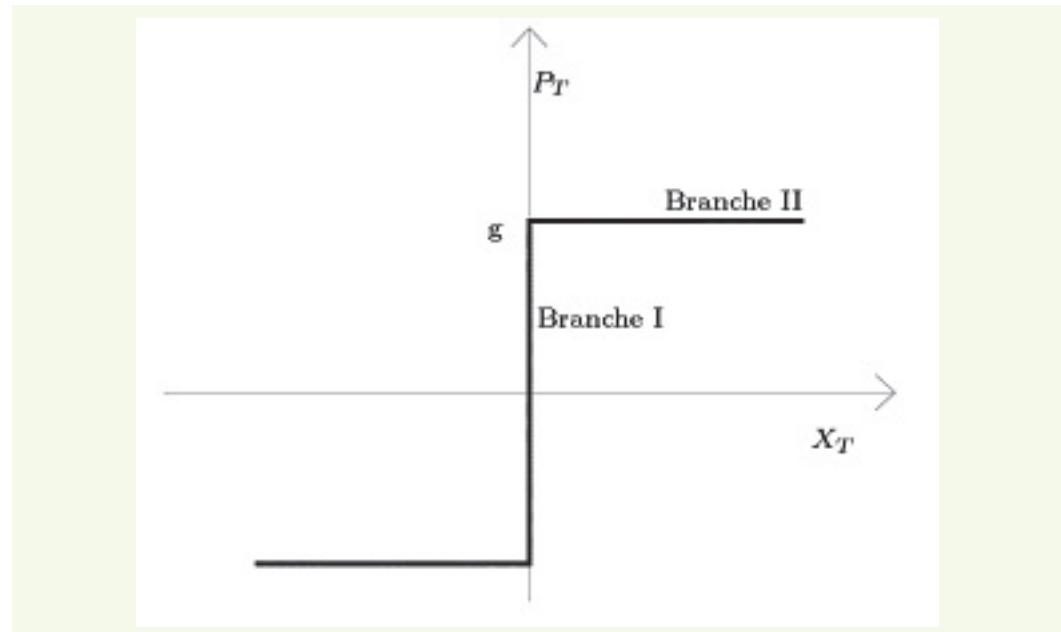
$$L(Y, \mu, \zeta) \in \Omega \times R_+^p \rightarrow \mathcal{F}(Y) + \sum_{l=1}^p \mu_l \varphi_l(Y) + \sum_{l=1}^p \zeta_l \psi_l(Y) \quad (66)$$

Cette recherche est effectuée en notant  $\rho$  le pas correspondant aux contraintes d'inégalité et  $\varrho$  celui correspondant aux contraintes d'égalité :

1.  $\mu^0 \in R_+^p$  et  $\zeta^0 \in R^p$  sont choisis à l'étape 0.
2. À chaque étape  $n$ ,  $X_n = \arg \min \left\{ \mathcal{F}(Y) + \sum_{l=1}^p \mu_l^n \varphi_l(Y) + \sum_{l=1}^p \zeta_l \psi_l(Y), Y \in R^{6N} \right\}$  est calculé.
3.  $\mu^{n+1}$  est réactualisé  $\mu_l^{n+1} = \max \left\{ 0, \rho \varphi_l(X_{\mu^n}) \right\}$ .
4.  $\zeta^{n+1}$  est réactualisé  $\zeta_l^{n+1} = \varrho \psi_l(X_{\zeta^n})$ .

Dans ce qui précède, la manière de résoudre un problème de minimisation sans contrainte n'a pas été discutée. Cette étape ne pose pas de difficulté car les fonctions à minimiser sont fortement convexes. Il en résulte que les méthodes newtoniennes, par exemple la méthode Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno dite BFGS [16], et les méthodes de gradient conjugué convergent facilement vers la solution.

**figure 2**  
*Loi de frottement de Tresca de seuil g.*



Les vecteurs  $\xi$  et  $\lambda$  contiennent les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes  $\psi_\lambda$  et  $\phi_\lambda$ . Leurs composantes sont les valeurs de la percussion tangentielle et de la percussion normale à chaque contact. Aussi, ces termes sont-ils comparés à l'issue du calcul précédent :

$$\begin{cases} \text{si } |\xi_l| \leq \mu |\lambda_l| \text{ alors la contrainte } X_T = 0 \text{ est justifiée au contact } l \text{ selon la relation (35)} \\ \text{si } |\xi_l| > \mu |\lambda_l| \text{ alors la contrainte } X_T = 0 \text{ est impropre au contact } l \text{ selon la relation (35)} \end{cases} \quad (67)$$

Si  $|\xi_l| > \mu |\lambda_l|$ , la condition de non-glissement ne peut être maintenue en ce contact et la solution se trouve dans la branche II de la **figure 2**.

Pour l'étape suivante, le problème est reformulé en tenant compte de la valeur des percussions obtenues à chaque contact.

Pour chaque contact  $i$  où la condition de non-glissement a provoqué une percussion tangentielle plus importante que ce que permet la loi de comportement (35), la contrainte correspondante  $\psi_i$  est abandonnée. Les percussions tangentielles en ces points ne pouvant plus être obtenues comme réactions à cette contrainte, il faut ajouter à la fonction à minimiser le pseudopotentiel correspondant à la loi de frottement, c'est-à-dire le terme :

$$\Phi^{df}(Y) = \sum_i \mu_i |\lambda_i| \|Y_{T_i}\| \quad (68)$$

Les contacts pour lesquels les contraintes  $\psi_i$  sont maintenues sont renumérotés de 1 à  $q$ .

Une variante consiste à étendre cette somme à tous les contacts. Le fait d'ajouter le terme  $\mu_l \|Y_{T_l}\|$  correspondant à un contact  $l$  où la contrainte  $\psi_l$  est maintenue ne modifie pas la solution. En revanche, ce terme accélère la convergence car il constitue une fonction de pénalisation associée à la contrainte  $\psi_l$ .

La seconde étape de la résolution consiste alors en la minimisation de la fonction :

$$\mathcal{J}(Y) = \langle Y, Y \rangle + \Phi^{df}(Y) + \Phi^d(Y) - \left\langle 2V^- + P^e, Y \right\rangle \quad (69)$$

$$\text{pour } Y \in \Upsilon, \Upsilon = Y \in R^{6N} / \left\{ \begin{array}{l} \varphi_l(Y) = -d_l(Y) + d_l\left(\frac{V^-}{2}\right) \leq 0 \quad l=1,p \\ \psi_j(Y) = -s_j(Y) + s_j\left(\frac{V^-}{2}\right) = 0 \quad j=1,p \end{array} \right\}$$

La minimisation du problème (69) est effectuée de la même manière que celle de (65) puisque la fonction à minimiser ne diffère que par le terme  $\Phi^{df}(Y)$  et le domaine de minimisation que par les contraintes  $\psi_i$  qui ont été supprimées.

1.  $\mu^0 \in R_+^p$  et  $\zeta^0 \in R^q$  sont choisis à l'étape 0

2. À chaque étape  $n$ ,  $X_n = \arg \min \left\{ \mathcal{J}(Y) + \sum_{l=1}^p \mu_l^n \varphi_l(Y) + \sum_{j=1}^q \zeta_j^n \psi_j(Y), Y \in R^{6N} \right\}$  est calculé

3.  $\mu^{n+1}$  est réactualisé  $\mu^{n+1} = \max \{0, \rho \varphi_l(X_n)\}$

4.  $\zeta^{n+1}$  est réactualisé  $\zeta_j^{n+1} = \rho \psi_j(X_n)$

À l'issue de cette étape, il faut vérifier si, pour chaque contact, la loi de comportement est respectée.

Pour les contacts auxquels une contrainte de non-glissement a été associée, il faut vérifier que la percussion tangentielle  $|\zeta_l|$  n'excède pas le seuil de glissement  $\mu|\lambda_l|$  permis par la loi de Coulomb. Si  $|\zeta_l| > \mu|\lambda_l|$ , il faut procéder comme précédemment et refaire un nouveau calcul.

Pour les contacts auxquels la contrainte de non-glissement a été retirée, il convient de vérifier que la vitesse de glissement n'est pas nulle. Si c'est le cas, l'hypothèse de différentiabilité de la fonction à minimiser n'est plus vérifiée par la solution obtenue à cause du terme  $\Phi^{df}(Y)$ , ce qui nécessite de reprendre le calcul en rétablissant la contrainte de non-glissement pour ce contact. En pratique, une première étape de calcul pour laquelle tous les contacts sont empêchés de glisser permet de découvrir ceux pour lesquels la répartition des efforts favorise le glissement. En effet, lorsque la percussion tangentielle en un contact (qui est la réaction à la contrainte de non-glissement) excède le seuil de glissement permis, on remarque que le fait de permettre le glissement de ce contact lors de la seconde étape a pour effet que le glissement sera presque toujours réalisé.

## SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Afin d'illustrer la méthode proposée, des simulations ont été réalisées en utilisant des lois de comportement associées ou le frottement de Coulomb. Les méthodes de simulations habituellement utilisées dans ce type de calculs peuvent être classées en deux familles : les méthodes de type CD (Contact Dynamics) et les méthodes de dynamique moléculaire. Les méthodes de type CD sont des méthodes qui respectent rigoureusement les conditions de non-interpénétration des particules. Elles utilisent des relations de type Signorini (relation (9)) pour décrire le caractère unilatéral des contacts et les formulations sont implicites. Les méthodes de type dynamique moléculaire pénalisent les interpénétrations entre les particules par le biais d'une loi de compliance. Les schémas d'intégration sont de type explicite, ce qui en fait des méthodes faciles d'accès et relativement efficaces pour réaliser des simulations en statique. Par contre, du fait de l'emploi de lois de compliance, de nombreuses difficultés apparaissent en dynamique [19].

La méthode A-CD<sup>2</sup> appartient à la famille des méthodes CD. Elle se révèle particulièrement efficace dans les simulations numériques, en statique comme en dynamique, tout particulièrement lorsque les systèmes subissent une évolution qui relève de plusieurs régimes à la fois (statique, quasi-statique, dynamique ou collisionnel).

### ■ Loi de comportement associée

La méthode a été appliquée à la simulation d'un écoulement granulaire sur plan incliné. Le matériau qui s'écoule est constitué de 300 grains rigides de forme polyédrique (**tableau 1**) dont le nombre de côtés est issu d'un tirage aléatoire afin de prendre en compte la nature hétérogène du milieu granulaire. L'intérêt de cette simulation étant d'avoir une variété de forme parmi les grains, ceux-ci ont été choisis avec le même rayon (du cercle sur lequel se situent les sommets). La méthode présentée n'ayant aucune restriction sur la forme, la taille ou la densité des grains, elle peut tout aussi bien être employée pour des systèmes où les grains présentent en plus des tailles et des densités variées. Des simulations similaires avec plus de 1 200 grains sont présentées dans [8]. Les lois de comportement utilisées sont le frottement visqueux pour les forces de frottement entre les particules et une loi linéaire pour les percussions.

**tableau 1**  
Paramètres utilisés pour la simulation numérique de l'éboulement.

|            |                          |
|------------|--------------------------|
| Rayon      | 0,25 m                   |
| Densité    | 2 500 kg.m <sup>-3</sup> |
| $K_N$      | 78 kg.m <sup>-1</sup>    |
| $K_T$      | 78 kg.m <sup>-1</sup>    |
| $\Delta t$ | 10 <sup>-4</sup> s       |

Une des particularités du mouvement simulé est que les efforts réguliers (c'est-à-dire les forces de contact) exercés sur les particules sont accompagnés de nombreuses percussions qui surviennent à l'occasion des fréquentes collisions. C'est dans ce genre de situation que la méthode A-CD<sup>2</sup> présente le plus d'avantages.

La géométrie du système et sa configuration initiale sont celles de la [figure 3](#).

La mise en place est effectuée à partir d'une position et d'une orientation aléatoires des particules ainsi que d'une attribution aléatoire d'un nombre de côtés à chacune des particules. Ces particules sont ensuite soumises à la gravité et un obstacle vertical est ajouté pour retenir les grains. À l'équilibre, la disposition obtenue constitue la condition initiale de l'éboulement qui se produit après la suppression de la retenue. La loi de comportement utilisée pour cette simulation est la loi linéaire qui correspond au pseudopotentiel quadratique :

$$\Phi = \frac{1}{2} K_T \left( (\vec{U}^+ + \vec{U}^-) \cdot \vec{T} \right)^2 + \frac{1}{2} K_N \left( (\vec{U}^+ + \vec{U}^-) \cdot \vec{N} \right)^2, \quad (70)$$

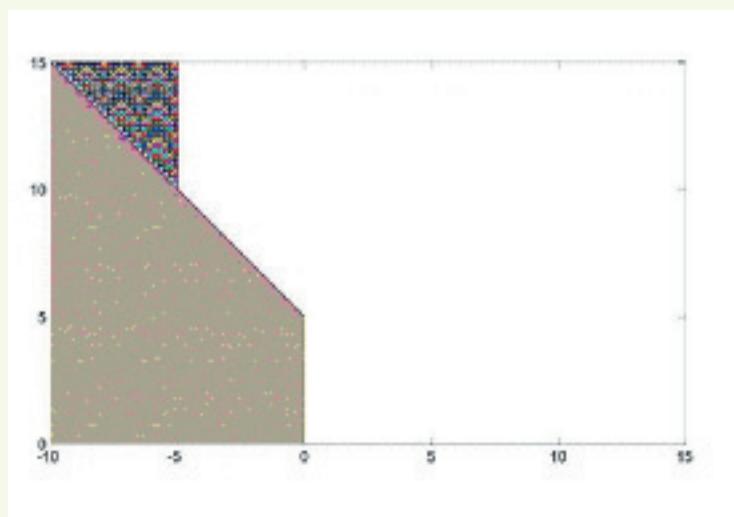
$$K_T \geq 0, K_N \geq 0$$

où  $K_T$  et  $K_N$  sont les coefficients de dissipation pour les composantes tangentielles et normales des percussions.  $K_N$  traduit le caractère inélastique des collisions entre particules [1, 2] et  $K_T$  résulte de l'atomisation du frottement visqueux. Ce choix conduit à des équations de discontinuité des vitesses dont la résolution correspond à la résolution d'un problème quadratique qui s'écrit :

$$\text{Trouver } U^+ \in C \text{ qui minimise } J(V) = \frac{1}{2} a(V, V) - l(V) \quad (71)$$

et qui est résolu selon la méthode numérique présentée.

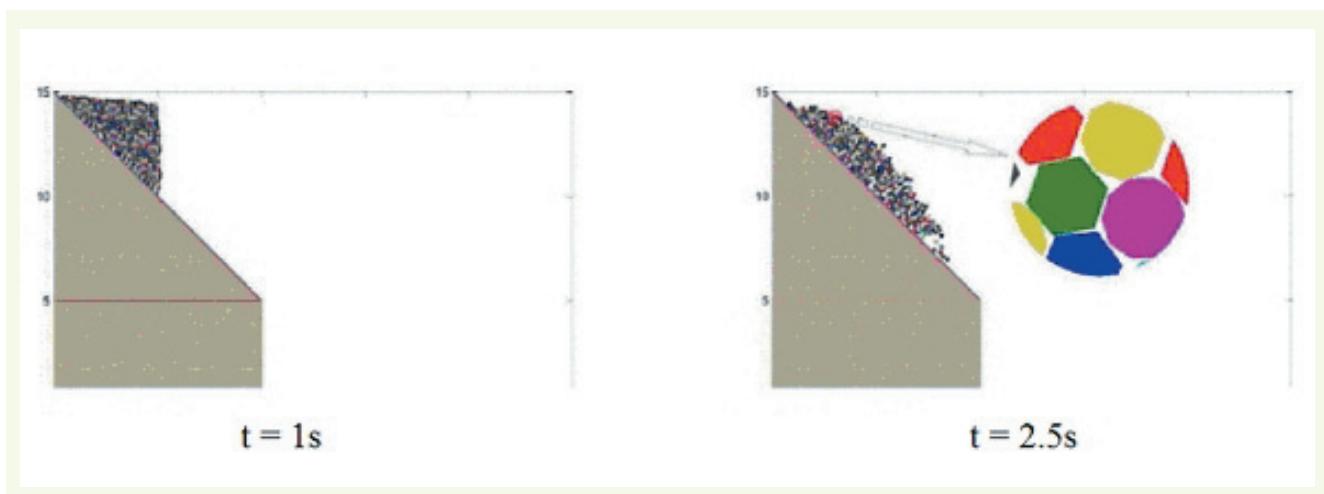
**figure 3**  
Position initiale du système.



Après la suppression de la retenue, le système évolue pendant une dizaine de secondes avant de retrouver une nouvelle position d'équilibre. Le déroulement de cet éboulement est montré sur la [figure 4](#).

### ■ Loi de frottement de Coulomb

La simulation présentée est la compression d'un milieu granulaire dans les conditions d'un essai biaxial. La phase de mise en place est réalisée selon le même principe que dans la simulation précédente : les particules sont disposées selon des positions obtenues par perturbation aléatoire d'un réseau régulier. Elles sont au nombre de 200 et leur orientation ainsi que le nombre de leurs côtés sont aléatoires. Ces particules sont ensuite soumises à la gravité et à deux obstacles verticaux qui assurent leur confinement. La disposition obtenue à l'équilibre constitue la configuration initiale de l'essai.



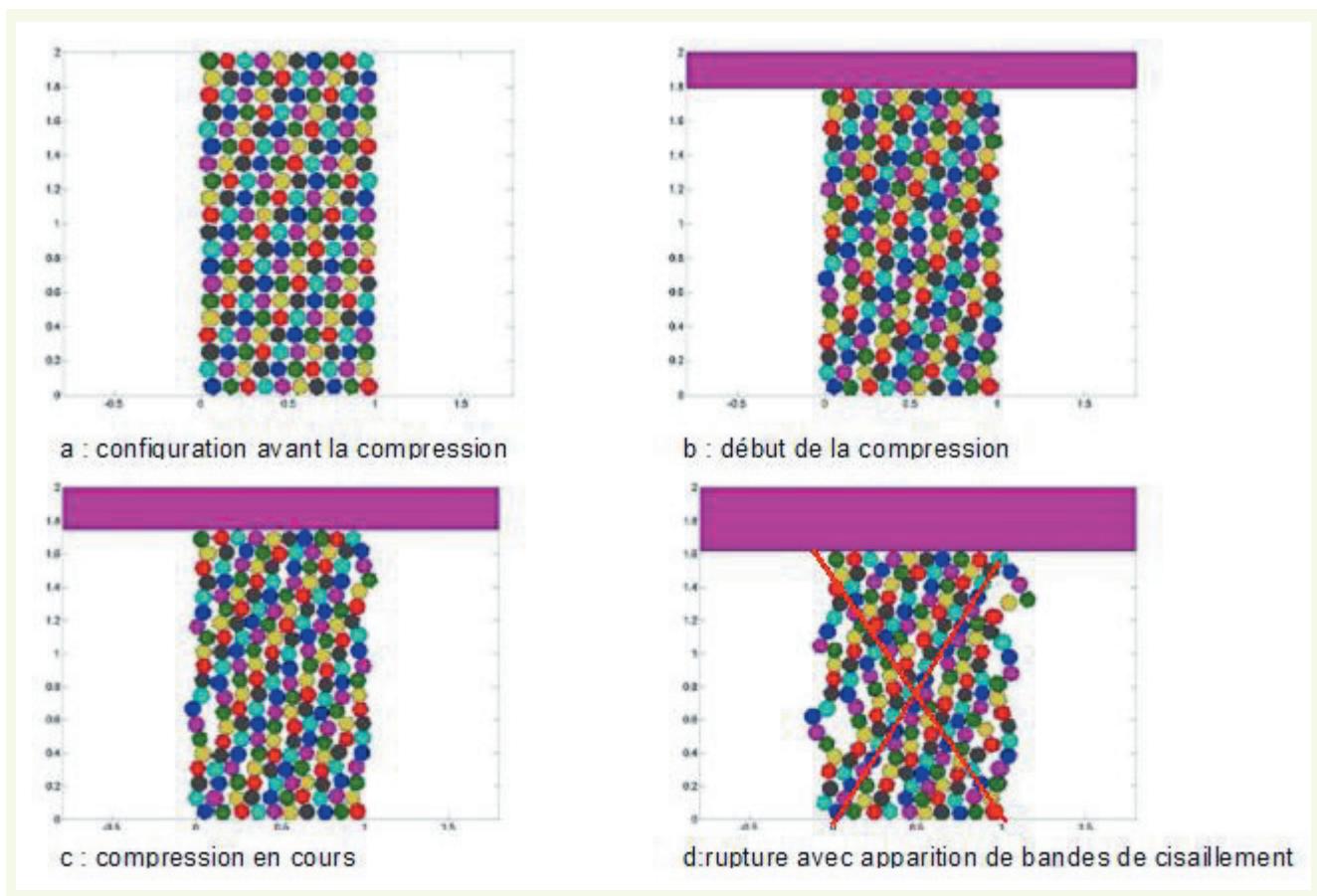
**figure 4**  
Début de l'éboulement.

La simulation de l'essai se fait en imposant le déplacement vers le bas de l'obstacle supérieur et en maintenant l'obstacle inférieur immobile (**figure 5**). Sur les deux bords latéraux de l'échantillon, une force élastique est exercée de manière à simuler l'action de la membrane utilisée pour les essais triaxiaux. Cette force est exercée sur chacune des particules constituant les colonnes de gauche et de droite de l'échantillon.

Enfin les paramètres de cette simulation sont donnés dans le **tableau 2**.

Les résultats de la simulation sont présentés sur la **figure 5**. Ils sont conformes à ce que prévoit la théorie de Mohr-Coulomb. La dernière image montre la configuration de l'échantillon à la rupture : la bande de cisaillement correspond à une bande de glissement entre les particules qui fait un

**figure 5**  
Évolution du système  
de grains pendant  
l'essai biaxial.



angle d'environ 50 degrés. Les bandes de cisaillement que prévoit la théorie de Mohr-Coulomb ( $\pi/4 \pm \phi/2$  où  $\mu = \tan\phi$ ) sont ainsi respectées par la bande de rupture par glissement entre les particules.

**tableau 2**

Paramètres utilisés pour la simulation numérique de l'essai triaxial.

|                           |                          |
|---------------------------|--------------------------|
| Coefficient de frottement | 0,1                      |
| Rayon                     | 0,01 m                   |
| Densité                   | 2 500 kg.m <sup>-3</sup> |
| $K_N$                     | 78 kg.m <sup>-1</sup>    |
| $\Delta_t$                | 10 <sup>-4</sup> s       |

## CONCLUSION

À partir du principe des travaux virtuels, on a proposé une description des collisions instantanées dans les systèmes de solides rigides qui s'accompagne d'un théorème d'existence/unicité de la solution et d'une inégalité de Clausius-Duhem qui assure que l'évolution est dissipative. De plus, une méthode de calcul pour l'évolution des systèmes multi-solides a été présentée : la méthode A-CD<sup>2</sup>. Cette méthode de calcul constitue un formalisme très général capable d'intégrer tous les efforts habituellement rencontrés en simulation numérique des systèmes mécaniques. La manière de procéder est décrite sous le nom d'atomisation des efforts. Les applications présentées ont ainsi pris en compte les forces de gravité, de frottement visqueux, de contact unilatéral, de frottement de Coulomb ainsi que les forces élastiques exercées par une membrane. Cette méthode de calcul est par construction particulièrement adaptée à la simulation des évolutions pour lesquelles des collisions entre particules ou des ruptures de contact avec discontinuité de vitesse surviennent en plus des évolutions régulières. Pour ces raisons, la méthode A-CD<sup>2</sup> est bien adaptée à la simulation numérique du comportement mécanique des matériaux granulaires hétérogènes.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1 **DIMNET É.**, *Mouvement et collisions de solides rigides ou déformables*, thèse de l'ENPC, **2002**.
- 2 **FRÉMOND M.**, Rigid bodies collisions, *Physics Letters*, **1995**, **204**, pp. 33-41.
- 3 **EMERIAULT F.**, **CAMBON B.**, Micromechanical modeling of anisotropic non-linear elasticity of granular medium, *International journal of solids and structures*, **1996**, **18**, 33, pp. 2591-2607.
- 4 **CUNDALL P.**, **STRACK D.**, A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique*, **1979**, **29**, pp. 47-65.
- 5 **NARDIN A.**, **SCHREFLER B.**, Numerical simulation of rock behaviour through a discrete model, *International journal of solids and structures*, **2004**, **41**, 21, pp. 5945-5965.
- 6 **JEAN M.**, **MOREAU J.-J.**, Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid bodies collection, in *Contact Mechanics International Symposium*, A. Curnier eds., Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, **1992**, pp. 31-48.
- 7 **JEAN M.**, The non-smooth contact dynamics method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **1999**, **177**, pp. 235-257.
- 8 **DAL PONT S.**, **DIMNET É.**, Theory and numerical simulation of instantaneous collisions of solids, *International Journal of Solids and Structures*, **2006**, **43**, 20, pp. 6100-6114.
- 9 **DIMNET É.**, Numerical simulations of the evolution of systems of multiple solids based on the description of instantaneous collisions, in : *Proceedings of Fifth World Congress on Computational Mechanics*, Vienna, Austria, **2002**.
- 10 **DIMNET É.**, **FRÉMOND M.**, **GORMAZ R.**, **SAN MARTIN J.**, *Novel approaches in civil engineering - Collisions involving solids and fluids*, Springer Verlag Heidelberg, **2001**.
- 11 **DIMNET É.**, **FRÉMOND M.**, **GORMAZ R.**, **SAN MARTIN J.**, Collisions of rigid bodies, deformable bodies and fluids, *Second M. I. T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, Boston, **2003**.
- 12 **DIMNET É.**, Collision in an incompressible fluid, *APCOM04*, Beijing, **2004**.
- 13 **MOREAU J.**, Fonctionnelles convexes, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, Paris, **1966**.
- 14 **DIMNET É.**, **FRÉMOND M.**, Chocs de solides rigides, *4<sup>e</sup> Colloque national de calcul des structures*, Giens, **1999**.
- 15 **PFEIFFER F.**, Non smooth mechanics, *P. T. R. S.*, London, **2001**.
- 16 **BONNANS J.**, **GILBERT J.**, **LEMARÉchal C.**, **SAGASTIZABAL C.**, *Optimisation numérique*, Springer, **2003**.
- 17 **FRÉMOND M.**, *Non-Smooth Thermo-Mechanics*, Springer Verlag Heidelberg, **2001**.
- 18 **CIARLET P.**, *Introduction to Numerical Linear Algebra and Optimisation*, Cambridge Univ. Pr., **1989**.
- 19 **KANE C.**, **REPETTO A.**, **ORTIZ M.**, **MASDEN J.**, Finite element analysis of nonsmooth contact, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **1999**, **109**, 1-2, pp. 1-26.

