

Maillages d'éléments finis pour les ouvrages de géotechnique

Conseils et recommandations

Philippe MESTAT
Directeur de recherche
Chef de la section Rhéologie et modélisation des sols
Division Mécanique des sols et géologie de l'ingénieur
Laboratoire central des Ponts et Chaussées

RÉSUMÉ

Cet article présente des recommandations générales pour la réalisation des maillages d'éléments finis d'ouvrages de géotechnique. Les principaux types d'éléments finis sont décrits et les performances de chacun détaillées. Ensuite, pour chaque grand type d'ouvrage (fondations, tunnels, remblais, soutènements), des conseils particuliers sont proposés. De nombreux exemples bidimensionnels et tridimensionnels, tirés des études réalisées avec le progiciel CÉSAR-LCPC, viennent illustrer ces conseils.

MOTS CLÉS : 42 - *Éléments finis (méthode) - Ouvrage d'art (gén.) - Recommandation - Tunnel - Remblai - Soutènement (tunnel) - Fondation - Modèle numérique - Sol - Bidimensionnel - Tridimensionnel -/Maillage.*

Introduction

Depuis une quinzaine d'années, l'utilisation de la méthode des éléments finis a connu un développement très important dans les bureaux d'études et les centres de recherches en géotechnique. Ainsi, il est aujourd'hui courant de réaliser, pour des grands projets, des analyses par éléments finis afin de vérifier la stabilité d'un ouvrage en interactions avec son environnement, de contrôler les valeurs de déplacements admissibles et d'aider au dimensionnement des structures.

En pratique, les logiciels de calcul par éléments finis sont devenus des outils pour l'ingénieur, au même titre que les méthodes de calcul traditionnelles de la mécanique des sols. L'utilisation d'un code de calcul a été rendue très facile par le développement de pré- et de post-processeurs conviviaux et simples d'emploi. Les mailleurs automatiques offrent des possibilités très intéressantes, mais la construction du maillage d'éléments finis dépend encore pour beaucoup des choix de l'ingénieur. Cette étape est fondamentale dans la mise au point du modèle d'éléments finis, et il n'est pas toujours évident de savoir jusqu'à quel point il faut aller dans la discrétisation et le raffinement.

L'objectif de cet article consiste à regrouper des conseils et des recommandations pratiques pour la construction des maillages de massifs dans le domaine de la géotechnique.

Description des principaux éléments de massif

Un massif est défini généralement comme un milieu continu représentant un certain volume de matériau dans l'espace. Un élément fini de massif représente alors un volume élémentaire de matériau solide ou non (métal, béton, roche, sol, liquide) dont le comportement mécanique peut être décrit par un ensemble d'équations (lois de comportement et d'interactions).

Malgré cette définition, un maillage d'éléments finis de massif n'est pas systématiquement à trois dimensions. En effet, si l'une des dimensions de l'ouvrage est prépondérante (remblai de grande longueur, section courante d'un tunnel, etc.) et si toutes les autres caractéristiques du modèle (chargements, conditions aux limites, interfaces) le permettent, il est possible d'analyser l'ouvrage dans un plan : cette analyse est dite en déformation plane (la composante du déplacement perpendiculaire au plan considéré est supposée uniformément nulle). Le maillage est plan mais, en réalité, il s'agit d'un maillage de profondeur égale à l'unité. Ainsi, les forces appliquées sur ce type de modèle ne s'expriment pas en Newton mais en Newton par mètre (force par unité de longueur). Dans le cas d'une symétrie de révolution, l'analyse peut être effectuée dans un demi-plan passant par l'axe de révolution (méridien).

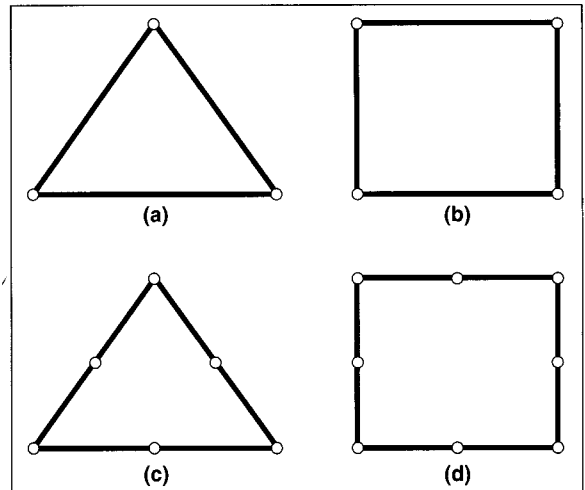
La plupart des codes généraux de calcul offrent ainsi une gamme d'éléments finis de massif bidimensionnels et tridimensionnels pour résoudre les problèmes de mécanique des milieux continus. Le nombre de nœuds situés sur chaque côté (et parfois à l'intérieur de l'élément) est alors caractéristique d'un élément.

Éléments de massif bidimensionnels

Les éléments finis de massif bidimensionnels sont constitués par des éléments de forme triangulaire ou quadrangulaire.

Élément de massif triangulaire à trois nœuds

L'élément de massif triangulaire à trois nœuds est l'élément bidimensionnel le plus simple (fig. 1a). Les fonctions d'interpolation des déplacements sont de type linéaire sur l'élément. Dans le cas de la déformation plane, les déformations et les contraintes sont alors constantes sur l'élément. Cette particularité a fait le succès de cet élément, car les expressions des matrices de rigidité et des forces élémentaires peuvent être exprimées de manière analytique. Il est donc très facile de programmer cet élément et de construire autour de lui un code de calcul aux éléments finis.



a. Triangle à 3 nœuds (T3) - b. Quadrilatère à 4 nœuds (Q4) - c. Triangle à 6 nœuds (T6) - d. Quadrilatère à 8 nœuds (Q8).

Fig. 1 - Éléments de massif bidimensionnels les plus couramment utilisés.

Si ce type d'élément donne d'assez bons résultats dans les cas courants (avec des maillages suffisamment denses), il n'en est plus de même dans le cas des ouvrages complexes pour lesquels la flexion est prédominante, ou dans le cas de lois de comportement non linéaire, pour lesquelles la précision sur le champ de contraintes est primordiale. Une précision satisfaisante n'est alors obtenue qu'avec des maillages extrêmement raffinés.

De même, ces éléments sont peu performants pour les problèmes à symétrie de révolution (les contraintes sur l'élément ne sont plus constantes et sont moins précises au voisinage de l'axe de symétrie). Pour ces raisons, d'autres types d'éléments ont été développés afin de permettre une meilleure description des champs de contraintes et de déformations.

Élément de massif quadrangulaire à quatre nœuds

L'élément de massif quadrangulaire à quatre nœuds (ou quadrilatère à quatre nœuds) est le deuxième élément utilisé pour le découpage naturel d'un plan en sous-ensembles élémentaires (fig. 1b). Les fonctions d'interpolation sont des formes bilinéaires de degré 1. En déformation plane, les déformations et les contraintes ont une variation linéaire sur l'élément. Cette propriété rend cet élément plus performant que l'élément triangulaire à trois nœuds.

Cependant, l'élément quadrangulaire à quatre nœuds a quelques insuffisances. En particulier, les côtés de l'élément restent des lignes droites au cours des déformations, ce qui peut être préjudiciable pour décrire certaines géométries si la densité des éléments n'est pas assez élevée. De

plus, cet élément ne permet pas un calcul suffisamment rigoureux de la flexion. Ceci a incité certains auteurs à imaginer des éléments quadrangulaires enrichis en flexion.

Malgré cela, ces éléments permettent, dans de nombreux problèmes en comportement linéaire et en milieu homogène ou comportant peu de matériaux différents, de raffiner les maillages sans trop accroître la largeur de bande. En revanche, il n'en est pas de même lorsque les problèmes réels font intervenir des géométries complexes avec de nombreuses couches de sol, des comportements parfois fortement non linéaires et des interactions particulières entre les matériaux. Il est alors souvent plus simple, pour la modélisation, de faire directement appel à des éléments assurant une meilleure précision.

Élément de massif triangulaire à six nœuds

D'une manière générale, des éléments de haute précision sont obtenus en ajoutant des nœuds sur les frontières des éléments de base, triangulaires ou quadrangulaires (fig. 1c). Ainsi, l'élément triangulaire à six nœuds (triangle à trois nœuds sommets et trois points milieux sur les côtés) est l'élément quadratique le plus simple. Les fonctions d'interpolation sont des formes quadratiques complètes. En déformation plane, les contraintes et les déformations varient linéairement sur l'élément, ce qui conduit à une meilleure description des variations des contraintes. Il en est de même pour les problèmes à symétrie de révolution. La présence d'un nœud milieu sur chaque côté de l'élément rend possible la description de contours géométriques courbes avec relativement peu d'éléments (notamment pour les tunnels) en autorisant la déformation des côtés initialement droits ou courbes.

Cet élément est bien adapté à la modélisation des problèmes de géotechnique. De plus, il est devenu d'un emploi très aisé avec le développement des mailleurs automatiques et des procédés de renumérotation.

Élément de massif quadrangulaire à huit nœuds

L'élément quadrangulaire à huit nœuds (quatre nœuds sommets et quatre points milieux sur les côtés) est aussi un élément quadratique (fig. 1d). Les fonctions d'interpolation sont des formes quadratiques incomplètes (le terme $\zeta^2\eta^2$ n'apparaît pas dans les polynômes utilisés).

Cet élément, de continuité C^0 , est le plus performant pour le calcul des structures de massifs bidimensionnels. Il permet de décrire d'une manière très satisfaisante les champs de déformations et de contraintes. De plus, les résultats peuvent être améliorés par l'utilisation d'une intégration réduite (à 2×2 points de Gauss) pour le calcul des intégrales et pour celui des gradients.

Éléments de massif tridimensionnels

Le tétraèdre à quatre nœuds (pyramide à base triangulaire), comparable au triangle à trois nœuds en déformation plane, est l'élément tridimensionnel par excellence. Les fonctions d'interpolation sont linéaires sur l'élément et, par conséquent, les contraintes et les déformations y sont constantes.

Les autres éléments tridimensionnels usuels sont constitués par des pentaèdres ou prismes (à six, quinze ou dix-huit nœuds) et des hexaèdres (à huit, vingt ou vingt-sept nœuds) (fig. 2). Les fonctions d'interpolation sont trilineaires pour l'élément hexaédrique à huit nœuds, trilineaires en base incomplète pour l'élément pentaédrique à six nœuds, quadratiques en base complète pour les éléments tétraédriques à dix nœuds et hexaédriques à vingt-sept nœuds, quadratiques en base incomplète pour l'élément hexaédrique à vingt nœuds.

Les performances relatives de ces éléments sont assez proches de leur homologue bidimensionnel. Ainsi, l'élément hexaédrique à vingt nœuds est l'élément le plus utilisé actuellement dans les mail-

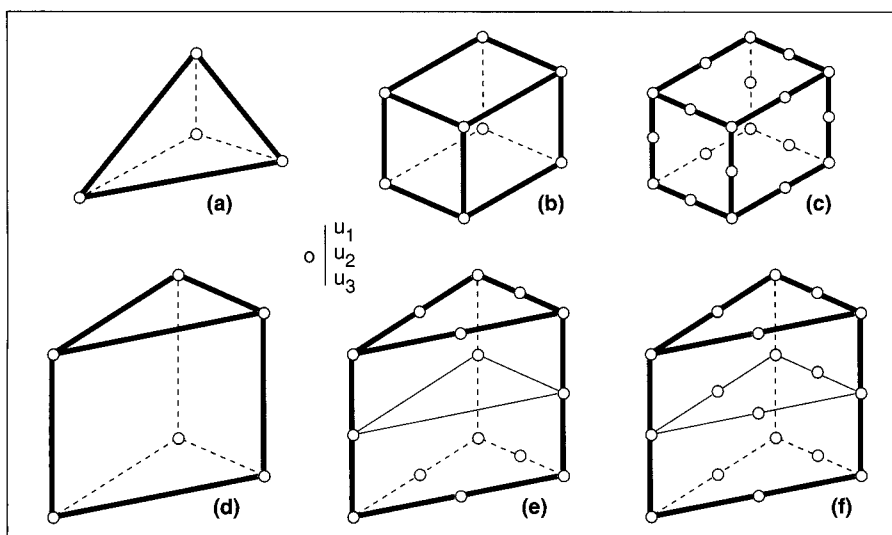


Fig. 2 - Éléments de massif tridimensionnels les plus couramment utilisés.

- a. Tétraèdre à 4 nœuds (T4).
- b. Hexaèdre à 8 nœuds (H8).
- c. Hexaèdre à 20 nœuds (H20).
- d. Pentaèdre à 6 nœuds (P6).
- e. Pentaèdre à 15 nœuds (P15).
- f. Pentaèdre à 18 nœuds (P18).

lages tridimensionnels, comme l'élément quadrangulaire à huit nœuds pour les problèmes bidimensionnels (plan et symétrie de révolution). Cet élément, associé à une intégration réduite (à $2 \times 2 \times 2$ points de Gauss) pour le calcul des gradients, conduit à de bons résultats.

Association d'éléments de massif avec d'autres types d'éléments finis

Au sein d'un même modèle, les éléments de massif peuvent être associés à d'autres types d'éléments compatibles comme les éléments de poutre, de coque, de plaque, les éléments de contact ou encore des éléments de fond de fissure (fig. 3). La compatibilité entre les éléments concerne à la fois l'interpolation du champ de déplacement et l'interpolation de la (ou des) rotations (s). Cette compatibilité doit être parfaitement cohérente : elle peut être assurée par des relations linéaires entre les degrés de liberté ou par des éléments de transition.

Éléments de massif de haute précision

Tous les éléments présentés ci-dessus sont des éléments de continuité C^0 , ce qui signifie que les déformations ne sont pas continues d'un élément à l'autre. Pour améliorer la précision des éléments et la continuité des déformations, des éléments de massif plus performants ont été développés. Ces éléments de haute précision permettent une représentation non linéaire des variations des contraintes sur l'élément. Ils peuvent être construits de deux manières différentes :

- > soit en augmentant le nombre de nœuds et en conservant le nombre de degrés de liberté par nœud ; ces éléments sont de type Lagrange et de continuité C^0 (fig. 4a) ;
- > soit en conservant le nombre de nœuds et en augmentant le nombre de degrés de liberté par nœud. Cette opération est effectuée généralement en ajoutant les gradients de déplacements aux inconnues du problème. Ces éléments sont de type Hermite (fig. 4b) et de continuité semi- C^1 ou C^1 .

Naturellement, il est possible de combiner ces deux techniques pour construire d'autres éléments de haute précision. Toutefois, dans le cas de la géotechnique, il est assez rare d'utiliser des éléments de degré supérieur à celui des éléments quadratiques. Certains auteurs conseillent d'employer des éléments triangulaires à douze ou quinze nœuds pour les problèmes bidimensionnels, mais cette pratique n'est pas habituelle et s'applique à des modèles plutôt simplifiés (bidimensionnels et quasiment homogènes) et non à des modèles complexes (*a fortiori* tridimensionnels).

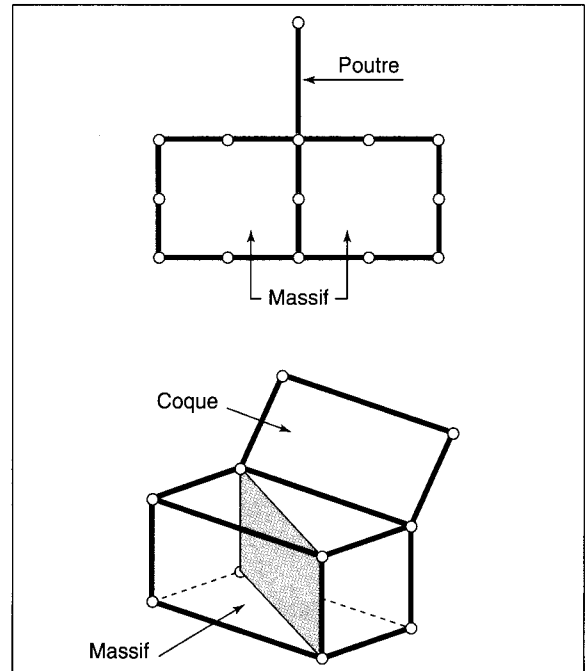
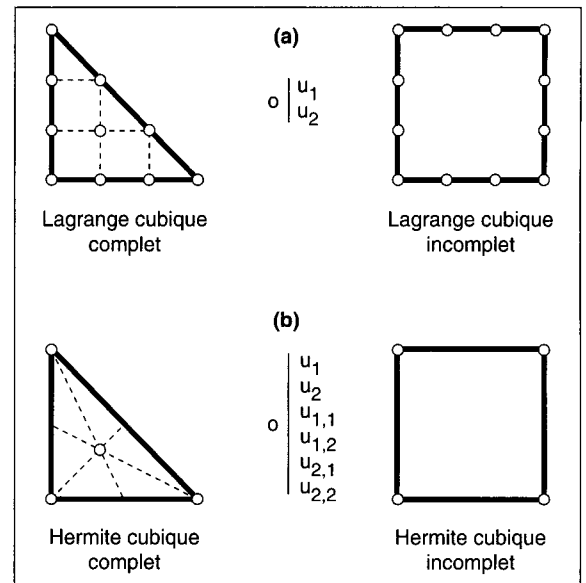


Fig. 3 - Exemples d'association d'éléments de massif avec d'autres types d'éléments finis.



a. Éléments de type Lagrange - b. Éléments de type Hermite.

Fig. 4 - Exemples d'éléments de massif de haute précision.

Par ailleurs, les éléments de type Hermite (avec continuité des déplacements et des déformations) posent un problème d'utilisation en géotechnique. En effet, l'immense majorité des problèmes fait intervenir des massifs de sol hétérogènes et donc de multiples interfaces entre des matériaux différents. Or, les équations de la mécanique des milieux continus n'imposent pas la continuité des contraintes à ces interfaces, mais seulement la continuité du vecteur $(\sigma_{ij}n_j)$, avec (n_j) le vecteur normal à l'interface. Cette difficulté peut être levée par des traitements particuliers aux interfaces.

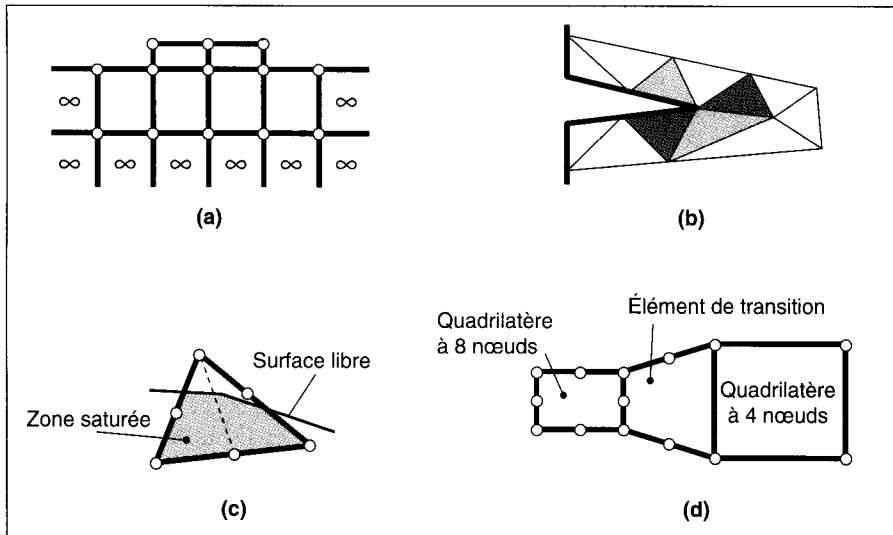


Fig. 5 -
Quelques éléments
de massif particuliers.

- a. Éléments infinis
- b. Éléments de fissuration.
- c. Élément pour l'étude des écoulements.
- d. Élément de transition.

Quelques éléments de massif particuliers

Les éléments de massif sont donc des éléments généraux qui imposent notamment des limites finies à la géométrie du milieu modélisé. Ils ne sont pas forcément adaptés au traitement de certains problèmes de fondations ou d'interactions sol-structures (statique ou dynamique) pour lesquels il peut être important d'imposer des conditions aux limites à l'infini. Des éléments particuliers sont alors proposés pour prendre en compte les variations des inconnues jusqu'à l'infini (par exemple, champ de déplacements nul à l'infini). Ces éléments particuliers sont appelés éléments infinis et possèdent une longueur infinie dans une ou plusieurs directions (fig. 5a).

D'autres éléments particuliers sont utilisés pour traiter les problèmes suivants :

➤ pour les problèmes de fissuration : des éléments finis sont transformés pour tenir compte de la singularité des déplacements en fond de fissure. Un de ces éléments est construit à partir d'un élément quadrangulaire à huit nœuds en confondant les trois nœuds d'un côté en un nœud unique. L'élément apparaît alors sous la forme d'un triangle. Cette technique fournit un champ singulier en fond de fissure (fig. 5b) ;

➤ pour les problèmes d'écoulement dans un milieu indéformable avec recherche de la position de la surface libre : des éléments finis spécifiques sont conçus pour être traversés par la surface libre. La surface de l'élément est alors partagée en deux zones : une zone avec perméabilité en dessous de la surface libre et une zone à perméabilité nulle, ou très faible, au-dessus de la surface libre (fig. 5c).

Afin d'optimiser la taille d'un problème, il peut être intéressant de mélanger dans un même maillage des éléments ayant des degrés d'interpola-

tion différents : par exemple, des éléments triangulaires à trois nœuds (pour une région située relativement loin de la zone sollicitée) et des éléments quadrangulaires à huit nœuds. Ce type d'assemblage nécessite des éléments de transition qui assurent une compatibilité entre les interpolations (fig. 5d). De tels éléments sont assez peu employés pour la résolution des problèmes bidimensionnels. En revanche, pour les problèmes tridimensionnels, ils permettent de réduire notablement le nombre d'inconnues.

Construire un maillage d'éléments finis

Règles générales pour la construction des maillages

Un maillage d'éléments finis de massif doit tenir compte de l'essentiel de la géométrie de la structure (y compris les singularités : courbures et cassures) et des couches de sol mises en évidence par les reconnaissances (hétérogénéité des matériaux, présence de discontinuités). Mais un maillage doit être aussi le fruit d'un compromis entre la capacité de calcul disponible (nombre maximal de degrés de liberté) et la précision acceptable sur les résultats numériques. Le maillage de compromis doit être construit en considérant les points suivants :

➤ toutes les symétries compatibles avec le problème mécanique (géométrie, conditions limites, chargements) doivent être utilisées afin de réduire la taille du système étudié ;

➤ le maillage doit être suffisamment fin dans les zones les plus sollicitées, c'est-à-dire dans les zones où les plus fortes variations des déplacements et des contraintes sont attendues. Ces variations sont occasionnées soit par un chargement important, soit par la présence d'une singu-

larité géométrique (angle vif, changement d'épaisseur), soit par des contours géométriques à forte courbure (cavité), soit encore par des caractéristiques mécaniques localement plus faibles ou plus fortes par rapport à celles du milieu environnant (inclusion, renforcement, effet de la loi de comportement) ;

➤ la taille des éléments doit rester, dans la mesure du possible, telle que le rapport de la plus grande dimension de l'élément sur sa plus petite dimension soit proche de l'unité. En particulier dans les zones de forts gradients, les triangles doivent ressembler le plus possible à des triangles équilatéraux, les quadrilatères à des carrés et les hexaèdres à des cubes pour ne pas introduire de perturbation dans les calculs numériques (distorsion des éléments) ;

➤ dans les zones moins sollicitées, des éléments de taille plus importante sont généralement mis en place pour atteindre les frontières extérieures. Il n'y a pas de règle précise pour augmenter la taille des éléments, il suffit d'assurer une augmentation progressive et régulière loin des zones sensibles ; par exemple, en doublant la surface des éléments adjacents suivant des lignes dirigées vers les frontières.

Pour les problèmes bidimensionnels, les mailleurs automatiques peuvent facilement être utilisés, même au voisinage de singularités. En revanche, pour les problèmes tridimensionnels, les maillages raffinés sont difficiles à réaliser : bien des raffinements ne sont pas envisageables car la taille des systèmes matriciels peut très vite dépasser la capacité des ordinateurs actuels (notamment pour des calculs non linéaires complexes). Par conséquent, la modélisation est fréquemment plus approximative dans le cas tridimensionnel que dans le cas bidimensionnel : autrement dit, les maillages tridimensionnels sont souvent plus grossiers que les maillages bidimensionnels.

Maillages fins et grossiers

Les termes de « maillage grossier » et de « maillage fin » sont relatifs et il n'est possible d'affirmer qu'un maillage est suffisamment fin pour traiter un problème que parce que l'ingénieur possède déjà l'expérience de ce type de calcul ou qu'il a déjà effectué une autre modélisation avec un maillage plus raffiné. Si la différence entre les résultats est faible, le raffinement n'est pas nécessaire. En revanche, si des différences significatives apparaissent, le raffinement est indispensable et l'étude doit être poursuivie avec un maillage plus raffiné. Sans procéder à un remaillage et à un second calcul, certains algorithmes permettent d'obtenir une estimation de l'erreur commise *a priori* à partir d'un maillage donné.

D'autres algorithmes (post-processeurs) plus récents proposent un raffinement automatique en cours de calcul (par exemple, pour le traitement des grandes déformations). Cependant, ces algorithmes ne sont pas encore très répandus dans les codes de calcul. Aussi, en pratique, l'ingénieur doit-il savoir décider de l'arrêt du raffinement.

Forme et taille des éléments finis dans les maillages

La réalisation des maillages nécessite souvent de faire varier la forme et la taille des éléments pour décrire les structures de massif. Les éléments peuvent donc être déformés et avoir des longueurs de côté inégales. Si ces déformations ou distorsions deviennent trop importantes, des problèmes numériques peuvent compliquer la résolution.

Forme des éléments

Si la représentation des bords d'une structure exige de donner une courbure aux éléments de frontière, les côtés des éléments des couches intérieures doivent rester droits, ou parallèles aux lignes d'égaux contraintes. Dans les zones de fortes sollicitations, la géométrie des éléments doit se rapprocher au maximum de celles des éléments de référence (triangle rectangle isocèle, carré, cube, etc.). Pour respecter cela, il faut bien sûr prévoir dans le maillage des espaces de transition entre les régions où un raffinement est nécessaire et celles où il n'est pas utile (faible gradient de contrainte).

Ces considérations qualitatives rejoignent en fait la condition du jacobien positif, qui assure que la transformation liant l'élément fini dans le maillage à l'élément de référence est une bijection. Pour que cette condition soit respectée, il ne faut pas que l'élément soit trop déformé, ni tordu. Il convient donc d'éviter certaines formes inadaptées ou certaines proportions des éléments.

Distorsion des éléments

En pratique, les valeurs acceptables pour les angles ou pour les longueurs d'éléments dépendent du problème physique traité (échelle de modélisation, linéarité, plasticité, statique, dynamique, etc.). Néanmoins, plusieurs auteurs indiquent que les angles internes des éléments doivent rester compris entre 15 et 165°. La figure 6 présente des éléments droits et courbes avec des angles internes inacceptables.

Pour les éléments quadratiques, les nœuds intermédiaires sont de préférence situés au milieu des côtés des éléments.

Dimensions des éléments

Bien que liées aux angles, les dimensions des éléments sont des paramètres fondamentaux pour la construction des maillages et, notamment, le rapport de la plus grande dimension de l'élément à la plus petite. Ce rapport est appelé *rapport de forme* (aspect ratio dans la littérature anglo-saxonne). Les dimensions significatives sont, par exemple, les longueurs des côtés pour les quadrilatères et les longueurs et les hauteurs pour les triangles (fig. 7).

Comme pour les angles, les valeurs acceptables du rapport de forme dépendent de la nature du problème. Toutefois, l'expérience montre que, pour obtenir une solution correcte en déplace-

ments, un rapport de forme de 10 est un maximum et que, pour obtenir une solution correcte en contraintes, le rapport de forme ne doit pas dépasser 3. Dans les régions à comportement non linéaire, il semble préférable d'avoir un rapport de forme plus faible que dans les régions qui demeurent en comportement linéaire.

Dimensions des éléments adjacents

Par ailleurs, des considérations énergétiques permettent de démontrer que les tailles des éléments adjacents ne doivent pas excéder un rapport global de 2. Cette règle donne un moyen simple de réaliser des maillages fins avec une certaine confiance.

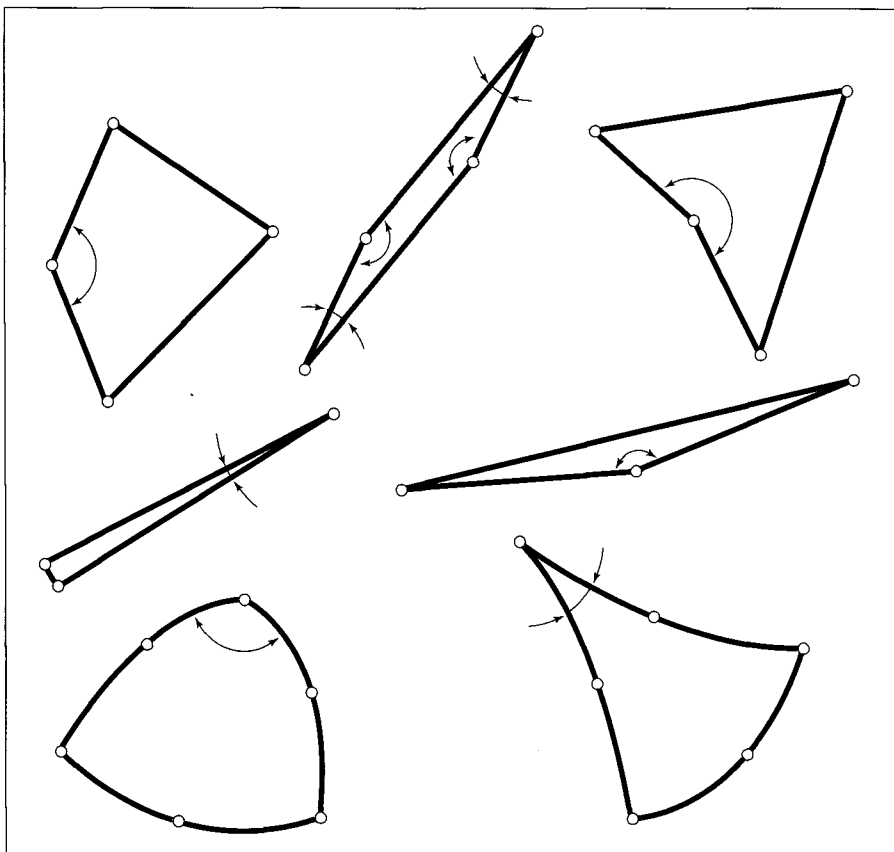


Fig. 6 - Éléments finis de massif avec des angles internes inadmissibles (Reddy, 1993).

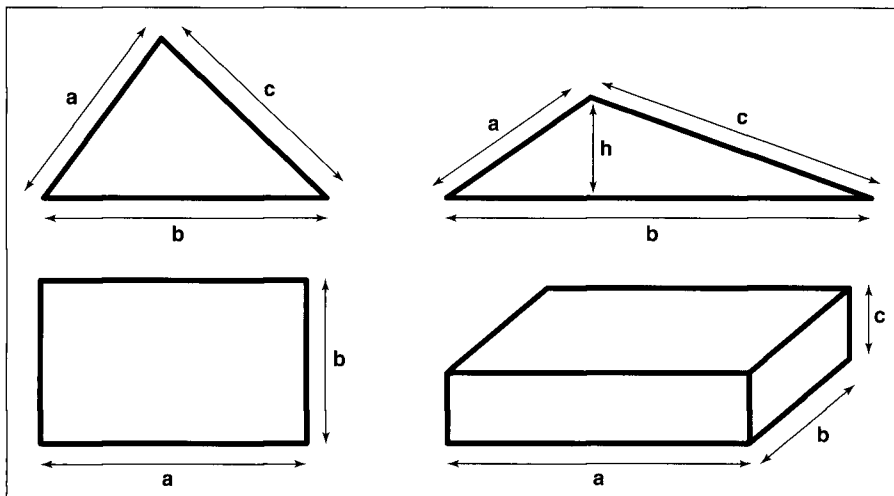


Fig. 7 - Dimensions des éléments finis pour le calcul du rapport de forme.

Autres règles pour les problèmes hydrauliques et dynamiques

D'autres règles existent pour les problèmes dynamiques et les problèmes de diffusion. Ces règles associent alors la dimension caractéristique des éléments avec les pas de temps ou les longueurs d'onde pour prendre en compte les variations des inconnues du problème physique et éviter les oscillations numériques.

Remarques sur le choix des éléments finis

Le choix des éléments finis constitue l'un des aspects essentiels de la modélisation : il est lié au code de calcul dont dispose l'ingénieur, au type d'analyse effectué et à la capacité de son ordinateur. Ainsi, un maillage peut fournir de bons résultats pour un type d'analyse et de mauvais résultats pour un autre type. De plus, pour une analyse donnée, par exemple en mécanique statique, un maillage peut donner de bonnes valeurs de déplacements et des contraintes très incorrectes. Ce dernier point s'explique par le fait que les contraintes et les déformations sont d'un ordre d'interpolation inférieur aux déplacements.

Par conséquent, le critère de choix des éléments, prépondérant en mécanique statique, est une bonne représentation du champ des contraintes dans les structures étudiées et dans les massifs de sol. Ce critère élimine donc les éléments à fonction d'interpolation linéaire, bilinéaire ou trilineaire (ce qui correspond au triangle à trois nœuds, au quadrilatère à quatre nœuds, au tétraèdre à quatre nœuds, au pentaèdre à six nœuds et à l'hexaèdre à huit nœuds). Les éléments conseillés sont alors les éléments qui prennent en compte une variation véritablement linéaire des contraintes (ce qui correspond au triangle à six nœuds, au quadrilatère à huit nœuds, au tétraèdre à dix nœuds, au pentaèdre à quinze nœuds et à l'hexaèdre à vingt nœuds).

Toutefois, pour certaines modélisations tridimensionnelles complexes, il est pratiquement impossible d'utiliser des éléments quadratiques car ceux-ci conduisent rapidement à des systèmes algébriques trop importants, d'où l'intérêt de faire appel à des éléments de transition pour combiner des éléments linéaires (dans les zones à faible variation de contraintes) avec des éléments quadratiques (dans les zones à forte variation de contraintes).

Calcul des contraintes à l'intérieur des éléments finis

En élasticité linéaire, les contraintes calculées directement aux nœuds d'un élément (à partir des dérivées partielles du champ de déplacement) ne sont pas en général satisfaisantes, sauf pour des maillages très raffinés. Aussi est-il pré-

férable de calculer les contraintes à l'intérieur d'un élément, afin d'éviter les imprécisions dues aux contributions des éléments voisins.

Pour les éléments finis quadratiques, l'expérience numérique montre que les gradients de déplacements (ou d'une autre inconnue nodale) sont les plus précis en certains points internes à l'élément, parfois moins nombreux que les points d'intégration numérique nécessaires au calcul des matrices de rigidité élémentaires (points de Gauss, points de Hammer, etc.). Ces points internes sont souvent appelés points d'intégration réduite, notamment dans le cas des quadrilatères à huit nœuds.

La précision sur le calcul des contraintes est fondamentale lorsque le comportement des matériaux est non linéaire. En effet, l'algorithme de résolution itératif nécessite le calcul des forces internes correspondant à l'état de contraintes régnant dans le maillage. Ces forces dépendent de l'ensemble des quantités non linéaires nécessaires à l'expression de la loi de comportement. Il est donc indispensable de déterminer ces quantités et les contraintes avec la meilleure précision possible.

Quant à l'estimation des gradients sur les frontières du domaine étudié, peu d'éléments finis permettent de les obtenir de façon satisfaisante à moins d'avoir mis en place une discrétisation très fine. Des techniques de lissage sont utilisées par certains codes de calcul, car ces gradients sont importants, par exemple, pour la détermination des forces appliquées qui simulent le creusement des terrains.

La technique de l'intégration réduite présente un inconvénient si elle est utilisée pour le calcul des matrices de rigidité élémentaires. En effet, cette technique peut entraîner des singularités dans les matrices de rigidité et donc générer des mécanismes artificiels qui conduisent à des résultats aberrants. Il est donc parfois conseillé de distinguer entre les points d'intégration pour le calcul de la matrice (par exemple, 3×3 points de Gauss pour le quadrilatère à huit nœuds) et les points d'intégration pour le calcul des contraintes (2×2 points de Gauss pour le quadrilatère à huit nœuds).

Maillage et calcul des contraintes aux nœuds

Si le calcul non linéaire est effectué aux points d'intégration, l'exploitation des résultats est souvent facilitée par la connaissance des contraintes et des gradients aux nœuds de la modélisation. La transformation des résultats du calcul est réalisée par une interpolation inverse et une moyenne en chaque nœud des contributions des éléments adjacents.

Cette transformation introduit évidemment des incertitudes supplémentaires dans les zones où la densité du maillage n'est pas assez fine, mais elle peut aussi masquer l'intensité de la discontinuité du champ de contraintes et lisser les contraintes en écrêtant les valeurs au voisinage des singularités.

Maillage et lois de comportement

Le rapport de forme adéquat et la finesse du maillage dépendent également de la loi de comportement (variation des contraintes). Ceci signifie qu'un même maillage, à moins d'être suffisamment fin, ne peut pas servir *a priori* pour étudier l'influence de diverses lois de comportement.

Par exemple, un maillage qui fournit de bons résultats (déplacements et contraintes) en comportement isotrope peut conduire à des résultats non satisfaisants en comportement anisotrope. La linéarité de comportement ne concerne que la relation entre les contraintes et les déformations ; la relation entre les contraintes et les coordonnées peut être très complexe et fortement non linéaire. C'est notamment le cas en comportement anisotrope. La figure 8 présente l'influence de la direction d'anisotropie sur les isovaleurs de contrainte verticale dans un massif semi-infini soumis à l'action d'une force linéique. Cette figure montre clairement qu'il est nécessaire de mailler en tenant compte de cette direction privilégiée et, notamment dans certains cas d'anisotropie, de mailler finement jusqu'à une profondeur importante.

De manière plus quantitative, un exemple intéressant est fourni par le calcul de la contrainte tangentielle autour d'une cavité circulaire soumise à une traction uniforme dans un milieu élastique linéaire et anisotrope (orthotropie de révolution) (fig. 9a). Pour obtenir des résultats satisfaisants, il faut mailler très finement autour

du bord de la cavité, car la contrainte tangentielle théorique varie très rapidement d'un point à un autre (fig. 9b), selon les valeurs des modules d'Young et de cisaillement G .

Par raison de symétrie, seul un quart de la cavité est étudié. Deux maillages ont été réalisés : un premier maillage comporte dix éléments quadrangulaires à huit nœuds sur le bord de la cavité et un second maillage, quarante éléments du même type (fig. 9c et 9d).

Pour différentes valeurs de G , le tableau I montre l'erreur commise, par rapport à la solution analytique, sur les contraintes tangentielles aux points extrêmes du quart de la cavité (représentés par $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 90^\circ$). Ainsi, malgré un maillage très fin (fig. 9c), la solution par éléments finis s'éloigne de la solution analytique lorsque le module de cisaillement G diminue.

En comportement isotrope, les deux maillages conduisent aux résultats exacts avec une très grande précision. Cet exemple prouve ainsi qu'il peut être imprudent d'utiliser le même maillage pour une étude en comportement linéaire isotrope et une étude en comportement linéaire anisotrope. La modélisation d'un massif anisotrope nécessite donc de réaliser plusieurs calculs avec des maillages de densité différente ou d'avoir recours à des indicateurs d'erreurs.

Maillage et singularités

La grande majorité des modèles d'ouvrages de génie civil présentent des singularités dues aux angles vifs, aux variations d'épaisseur des structures, aux cavités, aux renforcements et autres types d'inclusion, aux conditions aux limites et aux changements de caractéristiques mécaniques (hétérogénéité des matériaux, non-linéarité de comportement des matériaux) (fig. 10).

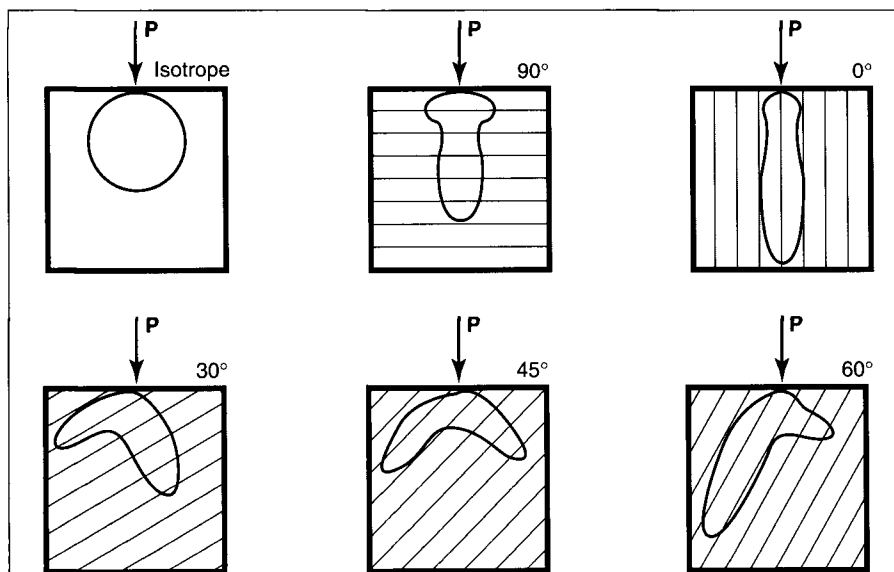
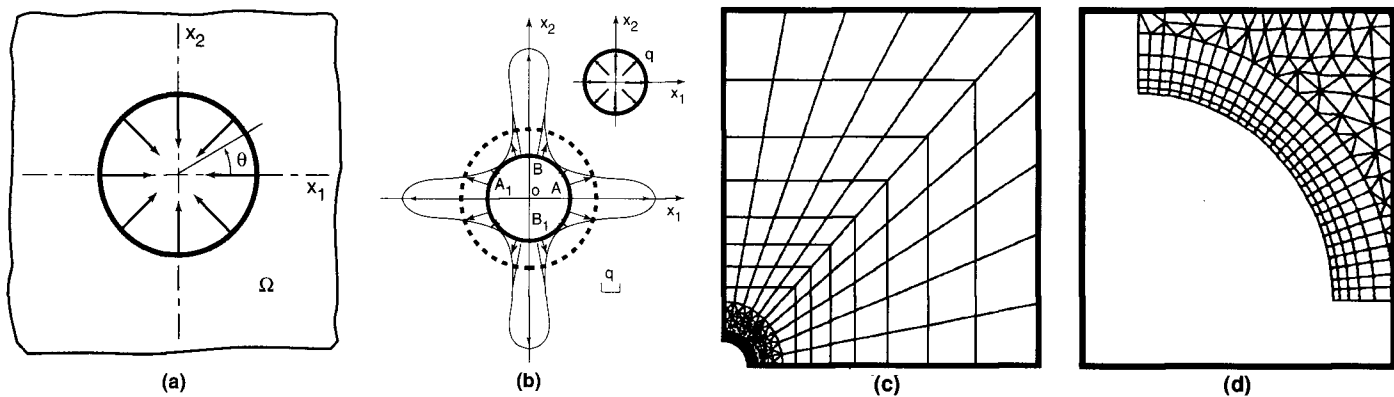


Fig. 8 - Influence de l'anisotropie sur la distribution de la contrainte verticale.



a. Cavité dans un milieu infini élastique orthotrope linéaire (propriétés différentes dans les directions X_1 et X_2) - b. Variation de la contrainte tangentielle autour de la cavité (solution analytique, Lekhnitskii, 1963) - c. Vue d'ensemble du maillage utilisé - d. Maillage de quarante éléments Q8 sur le bord de la cavité.

Fig. 9 - Cavité dans un milieu infini et exemples de maillage.

TABLEAU I
Variation de la contrainte tangentielle calculée en fonction de G

G (MPa)	$\theta = 0^\circ$		$\theta = 90^\circ$	
	Solution exacte	CÉSAR-LCPC	Solution exacte	CÉSAR-LCPC
250	1,0103	1,0016	1,0140	0,9988
125	1,5748	1,5555	1,7853	1,7436
100	1,8105	1,7842	2,1073	2,0476
162,50	2,4133	2,3603	2,9309	2,8011
131,25	3,6310	3,4704	4,5947	4,1893
125	4,1267	3,8963	5,2720	4,6967

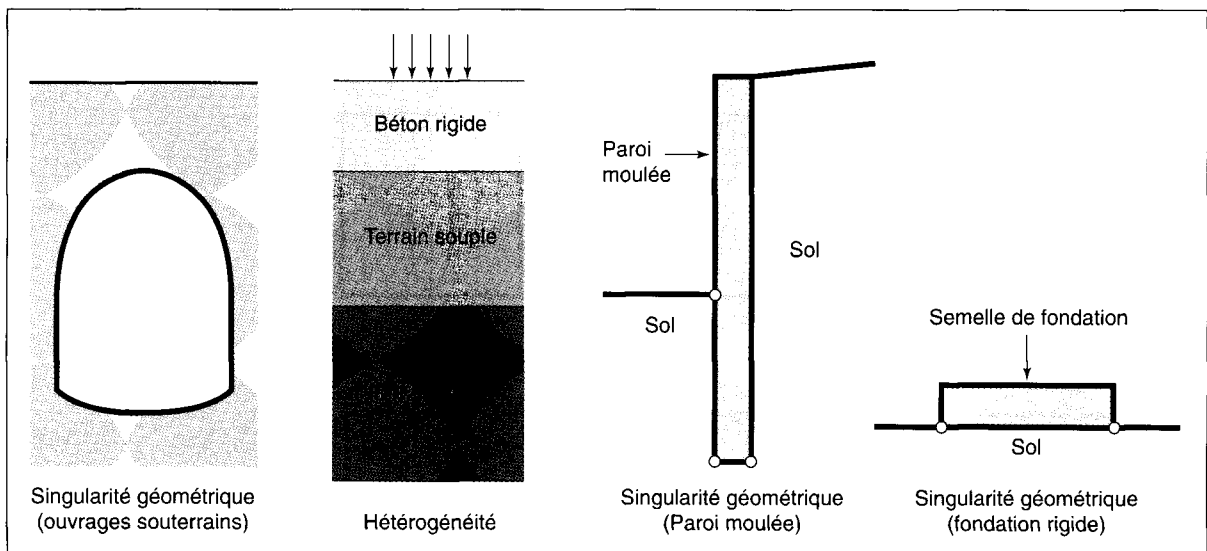


Fig. 10 - Exemples de singularité dans les structures de génie civil.

Lorsqu'un milieu est composé de plusieurs matériaux, certaines composantes du champ de contraintes sont discontinues aux interfaces entre les matériaux. En effet, d'un point de vue mécanique, seule la quantité $(\sigma_{ij}n_j)$ est continue à l'interface, avec (n_j) le vecteur normal à l'interface. C'est la singularité la plus courante en mécanique et il suffit de raffiner le maillage aux interfaces pour décrire de manière satisfaisante les variations des contraintes.

Toutefois, le traitement des interfaces à tangentes discontinues est délicat : c'est notamment le cas des angles vifs. En effet, lorsque le comportement est élastique, les valeurs des contraintes sont théoriquement infinies au point de singularité (au sommet d'un angle vif). En un tel point, les valeurs calculées ne sont pas significatives mais, à une faible distance, la précision devient acceptable si le maillage est assez fin. Au voisinage de la singularité, seules sont significatives les intégrales de contraintes (moments et efforts) dans certaines sections : ceci est important car ce sont ces quantités qui intéressent l'ingénieur pour le dimensionnement des ouvrages ou qui sont représentatives de la modélisation de certains problèmes particuliers (calcul des forces aux frontières pour simuler des excavations dans les massifs de sol).

Il est à noter également qu'aux points singuliers, la contrainte maximale calculée augmente en valeur absolue avec le degré du polynôme des fonctions d'interpolation.

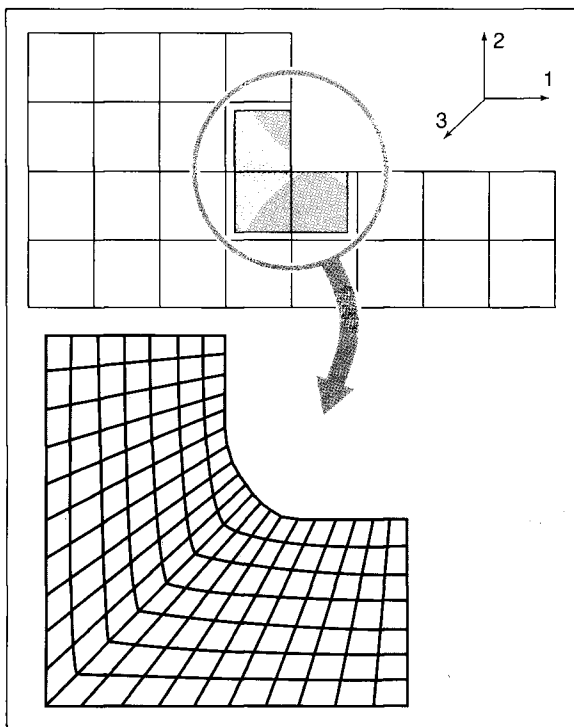


Fig. 11 - Exemple d'angle vif arrondi pour la modélisation.

La présence d'une singularité peut donc donner lieu à des concentrations de contraintes et entraîner une plastification, voire la rupture, de la zone qui entoure la singularité. L'intérêt de l'analyse en plasticité, si la zone plastique reste stable (plasticité contenue), est de limiter les contraintes à des valeurs finies.

Si l'ingénieur s'intéresse précisément à ce qu'il se passe au voisinage d'une singularité (en fond de fissure, par exemple), il peut utiliser des éléments finis spécialement conçus pour décrire les champs de contraintes et de déplacements dans ces zones.

Cependant, il peut être avantageux d'arrondir les angles vifs dans un maillage (fig. 11). Les valeurs de contraintes sont alors théoriquement finies, et les résultats aux points singuliers ont une signification. Mais la variation des contraintes au voisinage de la singularité peut être loin de la variation de la solution exacte. Cette technique est pratiquement impossible à mettre en œuvre dans le cas de géométries complexes et de modélisations tridimensionnelles.

Conseils pour la construction des maillages d'ouvrages de géotechnique

Recommandations générales

L'analyse par éléments finis nécessite la réalisation d'un maillage et la prise en compte de conditions aux limites du domaine étudié : déplacements, contraintes, pressions interstitielles ou températures imposés. Ces conditions peuvent se trouver à une distance « finie » (liaison ou substratum rigide, obstacle empêchant un déplacement) ou « infinie » (déplacement nul à l'infini, état de contraintes imposé). Le plus souvent, les maillages sont construits uniquement avec des éléments finis ; ceci est possible car les effets d'un chargement statique décroissent rapidement avec la distance du point (ou de la zone) d'application. Des études paramétriques permettent alors de déterminer l'étendue minimale du milieu à modéliser pour que l'effet des chargements ne soit pas perturbé par ces conditions aux limites. Ce type de conseils n'est évidemment plus valable si un obstacle quelconque existe à proximité de l'ouvrage.

Pour les calculs en plusieurs étapes, très fréquents en géotechnique, il faut distinguer dès la conception du maillage toutes les zones de massif qui vont progressivement changer de matériau au cours de la simulation des travaux : creusement, remblaiement, pose d'un revêtement, construction d'un mur, etc. Les configurations initiale, finale et intermédiaires doivent être représentées dans le maillage par leur géométrie et leurs interfaces éventuelles.

Maillages d'éléments finis pour les fondations

Modèles d'éléments finis pour les fondations

Les modèles de fondations superficielles peuvent être divisés en trois catégories :

- ❶ les modèles en déformation plane (semelles filantes, radiers parallélépipédiques de grandes dimensions, etc.) ;
- ❷ les modèles axisymétriques (fondations circulaires, réservoirs cylindriques, etc.) ;
- ❸ les modèles tridimensionnels lorsqu'aucune simplification géométrique n'est possible (forte hétérogénéité des couches de sol, plates-formes pétrolières, fondation de centrale nucléaire, interactions tridimensionnelles avec d'autres ouvrages, etc.).

Cas d'une fondation superficielle isolée

Le maillage d'une fondation superficielle isolée, placée dans un massif de sol homogène semi-infini, doit être réalisé en tenant compte des recommandations suivantes :

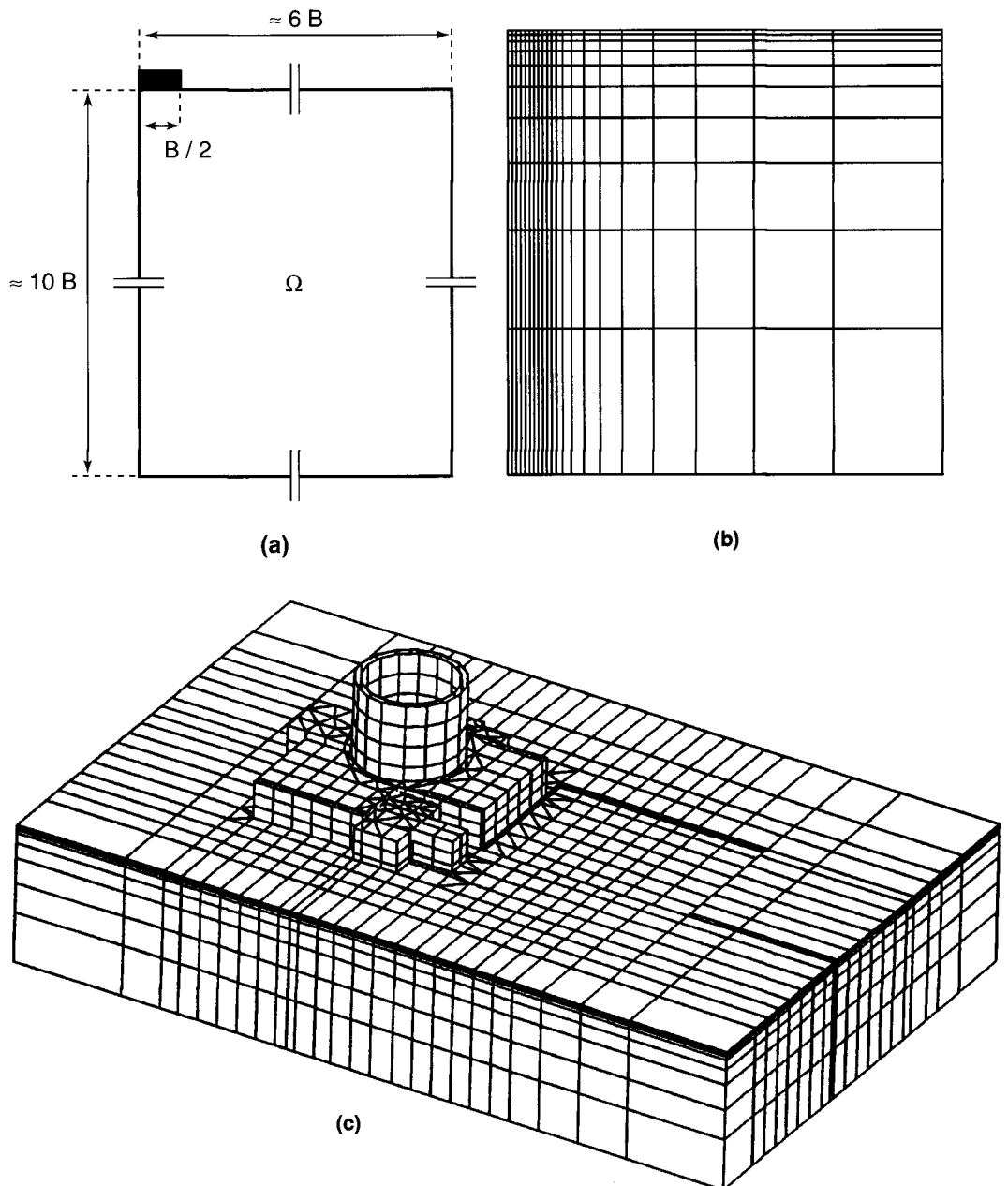
- les limites latérales du maillage (condition $u = 0$) doivent être fixées à environ 10 fois la largeur B de la fondation et la limite horizontale inférieure (condition $v = 0$ ou $u = v = 0$) à au moins 6 fois B sous la base de la fondation, pour que les conditions aux limites n'aient pas d'influence sur le comportement de la fondation (fig. 12a) ;
- le maillage du massif de sol doit être relativement resserré dans les zones où de forts gradients risquent d'apparaître, c'est-à-dire au voisinage des interfaces entre la fondation et le sol, et dans les

Fig. 12 - Maillages de fondations superficielles.

a. Dimensions conseillées pour le maillage d'une fondation isolée en déformation plane ou axisymétrique.

b. Maillage axisymétrique utilisé pour retrouver la solution de Boussinesq dans le cas d'une force appliquée au centre du massif (693 nœuds et 210 quadrilatères à 8 nœuds).

c. Maillage tridimensionnel pour le calcul d'un bâtiment et de son massif de fondation (6 469 nœuds et 6 897 éléments volumiques linéaires, poutres et coques).



régions situées à une distance inférieure à 2 fois B autour de la base de la fondation ;

➤ le rapport de forme (rapport de la plus grande dimension d'un élément fini à la plus petite) devrait être limité à 5 pour les éléments proches de la fondation (i.e. situés dans le domaine $B \times L \times B$ pour un modèle tridimensionnel, où L est la longueur de la fondation, et $B \times B$ pour le cas bidimensionnel) ;

➤ la largeur B' (selon la direction horizontale) du premier élément de sol directement adjacent à la fondation doit être au moins telle que $B' = 0,1B$ (à la rigueur $B' = 0,2B$), pour décrire de manière satisfaisante les variations de la contrainte de cisaillement aux bords de la fondation ;

➤ lorsque la stratigraphie du sol, la géométrie de la fondation et celle de la structure, les charges et les diverses conditions de liaison possèdent des symétries remarquables, il faut en profiter pour simplifier le maillage ;

➤ l'étude pour des charges inclinées ou verticales excentrées exige un maillage complet contrairement aux charges verticales centrées, car une charge inclinée ne présente aucune symétrie particulière. De plus, cette inclinaison peut entraîner l'apparition de zones en traction dans le sol, d'où la nécessité de prendre en compte des éléments d'interface. La base de la fondation peut alors se décoller du massif de sol sur une certaine longueur.

La figure 12b présente un exemple de maillage qui permet de retrouver à moins de 1% les valeurs de la solution analytique de Boussinesq en déformation plane (fondation filante) ou en déformation axisymétrique (fondation circulaire) (Mestat, 1994) et la figure 12c, le maillage tridimensionnel d'un bâtiment et du sol de fondation (Humbert et Mestat, 1995).

Note : Un maillage grossier conduit généralement à une réponse charge-tassement trop raide et à une estimation de la charge limite trop élevée par rapport à la solution exacte ou par rapport aux résultats fournis par un maillage raffiné.

Cas d'un pieu isolé dans un massif de sol

Modèles de pieu en déformation axisymétrique

Le maillage d'un pieu isolé, placé dans un massif de sol homogène semi-infini, doit être réalisé en tenant compte des recommandations suivantes :

➤ les limites verticales du maillage (condition $u = 0$) doivent être fixées à au moins 2 fois la longueur L du pieu et la limite horizontale inférieure (condition $v = 0$ ou $u = v = 0$) à au moins 2 fois la longueur L au-dessous de la pointe (3 L depuis la surface), pour que les conditions aux limites en déplacements n'aient pas d'influence sur le comportement du pieu (fig. 13a) ;

➤ les interfaces entre le pieu et le sol (fût et pointe) sont représentées par des éléments finis d'interface compatibles avec les éléments de massif utilisés pour décrire le sol ;

➤ le maillage d'un pieu isolé doit être relativement resserré au voisinage des interfaces, c'est-à-dire à la pointe et le long du fût, où de forts gradients risquent d'apparaître ;

➤ un même raffinement devrait exister sous la pointe dans la direction verticale vers le substratum ou la condition limite inférieure ;

➤ le rapport de forme (rapport de la plus petite dimension d'un élément à la plus grande) des éléments proches du pieu devrait être limité à 1/5 ;

➤ la largeur B' (selon la direction horizontale) du premier élément directement adjacent au pieu doit être au moins telle que $B' = 0,1d$, où d est le diamètre du pieu.

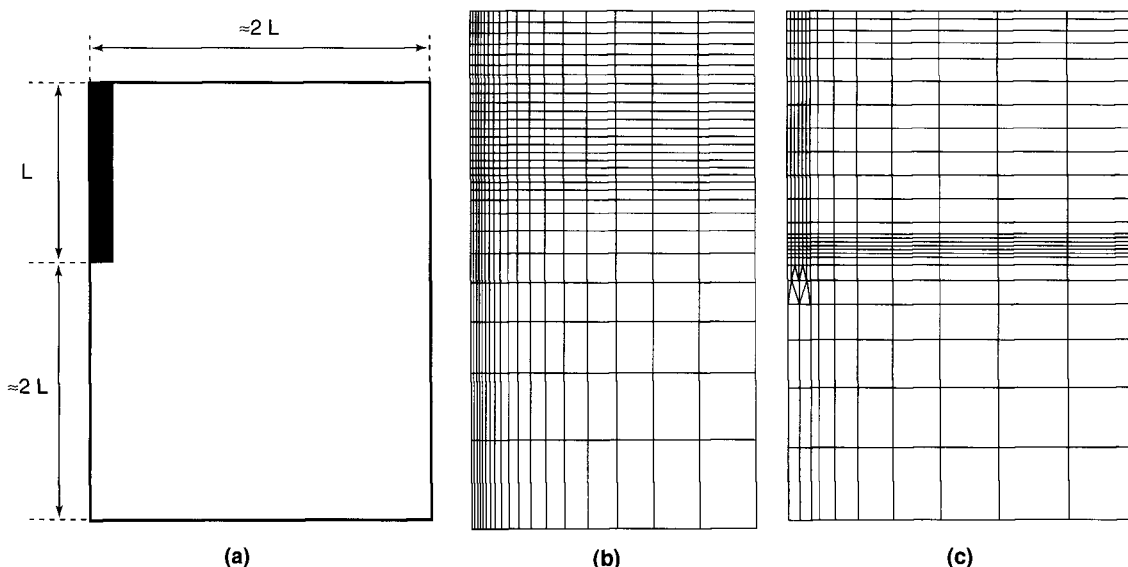


Fig. 13 - Maillages de fondations profondes.
a. Dimensions conseillées pour le maillage d'un pieu cylindrique isolé (symétrie de révolution).
b. Maillage axisymétrique (1 706 nœuds, 522 quadrilatères à 8 nœuds et 22 éléments d'interface à 6 nœuds).
c. Maillage axisymétrique avec zone de transition sous la pointe du pieu (1 109 nœuds, 325 quadrilatères à 8 nœuds, 12 triangles à 6 nœuds, 18 éléments d'interface à 6 nœuds).

Les figures 13b et 13c présentent deux exemples de maillage axisymétrique pour un pieu cylindrique isolé qui respectent globalement les recommandations précédentes : le premier maillage est réalisé uniquement avec des quadrilatères, tandis que le second mélange des quadrilatères et des triangles afin de créer une zone de transition permettant de réduire le nombre des éléments vers les frontières extérieures (Frank, 1984).

Par ailleurs, dans la pratique, à l'exception de certains pieux en acier, les pieux sont rarement des cylindres parfaits. Leur section peut varier avec la profondeur et n'est pas toujours circulaire ; des pieux de section carrée, hexagonale, ou en forme de H sont utilisés. Néanmoins, par commodité, un pieu isolé est très souvent supposé cylindrique (à la rigueur conique), plein et de section circulaire : des caractéristiques équivalentes sont alors cherchées pour les surfaces, les modules et les densités en conservant généralement les rigidités axiales, et les diamètres extérieurs ou les longueurs des pieux réels. Le modèle d'éléments finis du pieu isolé est alors réalisé en symétrie de révolution (déformation axisymétrique).

Le choix du diamètre équivalent pose toutefois une difficulté car il n'existe pas de pieu circulaire qui, pour une longueur identique à celle du pieu réel, ait à la fois la même surface latérale et la même surface en pointe. Il faut donc choisir de privilégier :

➤ soit la surface en pointe ou la surface moyenne. Par exemple, un pieu en H, de longueur L et de dimensions extérieures b et w (fig. 14), peut être remplacé par un pieu cylindrique plein équivalent, de longueur L et de rayon r_0 en posant l'égalité des sections :

$$\pi r_0^2 = bw$$

➤ soit la surface latérale. L'égalité des surfaces conduit à la relation :

$$2\pi r_0 L = S$$

où S est la surface latérale moyenne.

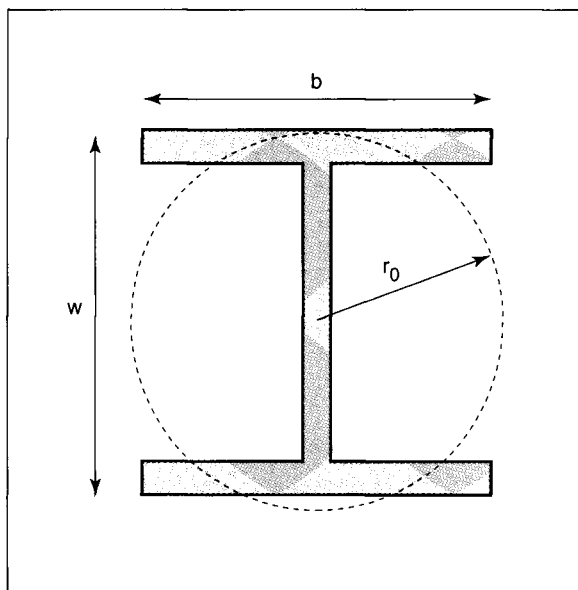


Fig. 14 - Représentation d'un pieu en H par un pieu de section circulaire (Fleming et al., 1992).

Modèles de pieu en déformation plane

Dans la majorité des cas, à moins d'adopter une nouvelle longueur équivalente, il vaut mieux privilégier une équivalence sur la surface latérale. Puis connaissant la valeur de r_0 , il faut affecter au « matériau pieu » un module d'Young, tel qu'il assure une rigidité équivalente à celle du pieu réel. Par exemple, en considérant que la déformation axiale doit être la même, le module équivalent vaut :

$$E_{eq} = \frac{(EA)_{pieu}}{\pi r_0^2}$$

où $(EA)_{pieu}$ est la rigidité du pieu réel et A , la surface d'une section moyenne.

Des modélisations en déformation plane ont été parfois utilisées dans le passé pour étudier l'interaction entre deux ou plusieurs pieux. Mais ce type de modélisation n'est pas réaliste, car les pieux apparaissent alors comme des « rideaux de palplanches » ou comme des plaques de longueur infinie. L'interaction entre les pieux et le sol ne peut donc pas être représentée de manière correcte. Aujourd'hui, la puissance des ordinateurs est devenue telle que les calculs tridimensionnels sont à la portée des ingénieurs ; aussi, une telle modélisation en déformation plane doit être absolument évitée.

En revanche, l'étude en déformation plane est parfois employée pour analyser le comportement local d'une tranche de sol contenant une section de pieu. Par exemple, cette modélisation convient bien à l'étude d'un pieu ou d'un groupe de pieux soumis à des charges latérales, perpendiculaires à leur axe. La géométrie des pieux est respectée dans le plan considéré, et il est facile d'obtenir un maillage fin autour de l'interface (fig. 15).

Modèles de pieu tridimensionnels

Une modélisation tridimensionnelle entraîne toujours un effort important pour réaliser le maillage et des temps de calcul relativement longs. Ainsi, le maillage autour de l'interface entre le sol et un pieu de section circulaire peut nécessiter de nombreux éléments pour décrire correctement la courbure réelle de la section et donc conduire rapidement à des nombres d'éléments et de nœuds excessifs, même pour les moyens informatiques actuels.

Ces raisons poussent souvent les ingénieurs à simplifier, parfois à l'extrême, le maillage des pieux et du massif de sol, notamment dans les régions situées près des interfaces. Cette économie sur la finesse du maillage se fait au détriment de la précision sur les résultats, et notamment sur celle concernant le champ de contraintes.

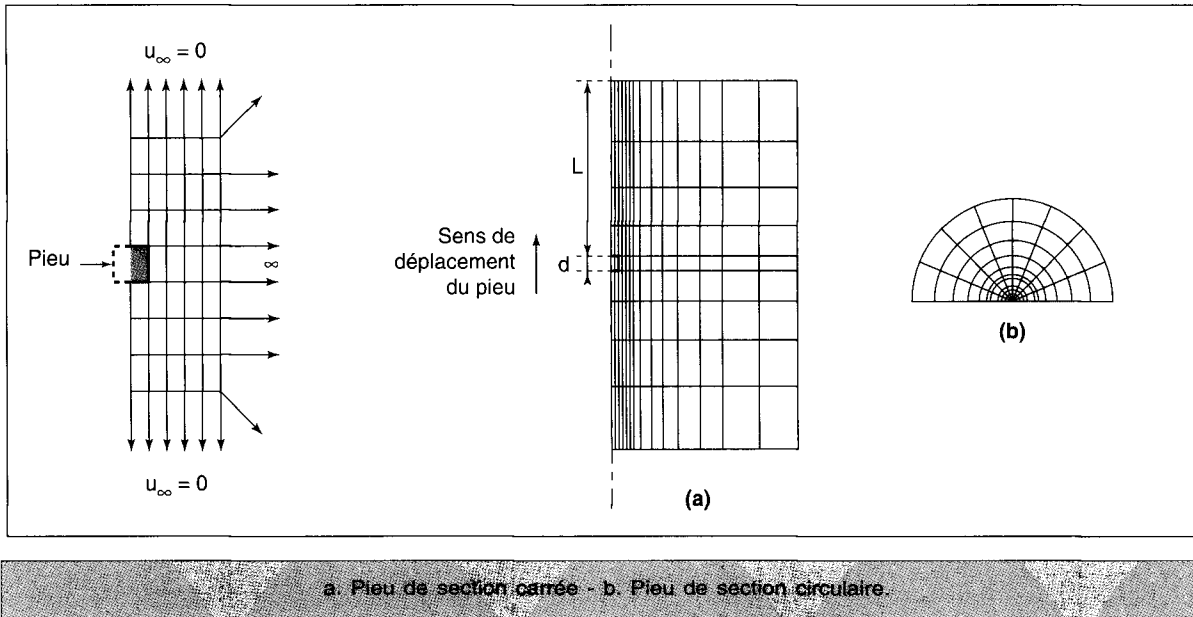


Fig. 15 - Maillages de pieu en déformation plane.

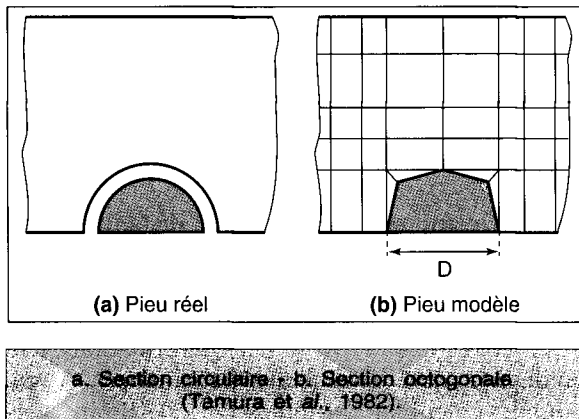


Fig. 16 - Représentation d'une section circulaire par une section octogonale.

Pour éviter de telles modélisations grossières, la section d'un pieu (circulaire ou non, creux ou non) est fréquemment remplacée par une section polygonale pleine équivalente. Cette approximation est utilisée pour la commodité qu'elle procure dans la réalisation des maillages tridimensionnels. Des études paramétriques ont ainsi montré qu'il est possible de représenter une section circulaire par une section octogonale associée à un maillage particulier au niveau de l'interface, tout en conservant une précision satisfaisante (fig. 16). Les dimensions de la section sont déterminées en supposant que les produits EI et AE sont les mêmes que ceux des pieux réels (où E est le module d'Young du matériau constituant le pieu ; I , l'inertie et A la section du pieu).

Cas des groupes de pieux

La modélisation d'un groupe de pieux (inclinés ou non) est un problème très complexe, notamment à cause des multiples interactions et de la géométrie tridimensionnelle qu'il faut dans la

plupart des cas considérer. Quatre approches peuvent être envisagées selon le type d'étude :

- ① une modélisation véritablement tridimensionnelle pour un groupe de pieux avec ou sans chevêtre, et avec la possibilité d'exploiter des symétries remarquables (fig. 17a, 18b, 18c et 18d). Malheureusement, le nombre élevé de pieux rend souvent impossible l'élaboration d'un modèle avec des pieux de section circulaire ou même octogonale. Pour réaliser une modélisation raisonnable, il faut assimiler les pieux réels à des pieux de section carrée. Cette approximation n'a été « justifiée » que pour des pieux soumis à des charges verticales ou peu inclinées ; des comparaisons avec des calculs axisymétriques ont ainsi démontré que les résultats en déplacements sont relativement peu affectés. En revanche pour des charges latérales, cette approximation peut conduire à des erreurs non négligeables ;
- ② une modélisation locale et bidimensionnelle pour un groupe de pieux sans chevêtre. Le modèle est une coupe transversale en déformation plane. Bien que chaque rangée de pieux ait son propre comportement, il est parfois possible, selon le type de chargement et la nature des couches de sol, de réduire l'étude du groupe à celui de deux types de rangées : une rangée de pieux extérieurs au groupe et une rangée de pieux internes (fig. 17b et 18a). L'utilisation des symétries et de conditions limites en déplacements permettent de tenir compte de l'espacement entre les files de pieux ;
- ③ une modélisation bidimensionnelle équivalente d'une tranche verticale comprenant des pieux, le chevêtre et éventuellement la structure. Les pieux sont supposés suffisamment proches pour qu'ils soient représentés par un mur enterré de rigidité équivalente (fig. 17c). Cette approche est vraiment très particulière et n'est pas conseillée ;

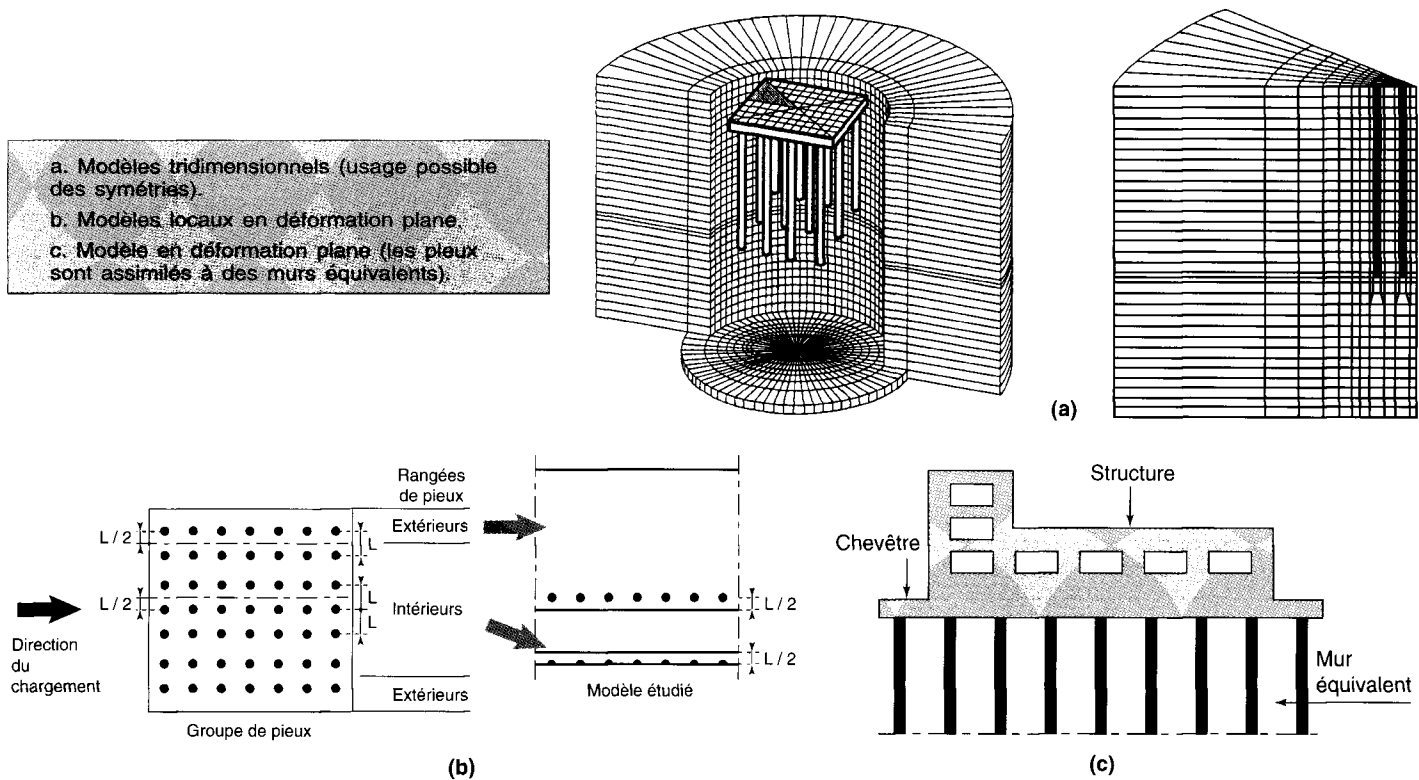


Fig. 17 - Modèles de groupes de pieux.

④ une modélisation équivalente en déformation axisymétrique, dans un plan méridien. Par exemple, les pieux du groupe dont les centres respectifs passent par un même cercle sont assimilés à un tore équivalent de section rectangulaire (fig. 19). L'épaisseur de chaque tore est déterminée pour que sa section soit égale à la somme des sections des pieux qu'il représente et sa hauteur est égale à celle des pieux. Les caractéristiques d'adhérence le long d'un tore sont estimées pour que le frottement total soit le même que celui généré par les pieux réels. Le module d'Young équivalent d'un tore est obtenu en écrivant que les rigidités axiales du tore et des pieux sont égales.

Bien que les équivalences bidimensionnelles supposent de nombreuses approximations et présentent de sérieuses limitations (notamment en ce qui concerne les mouvements du sol au sein du groupe), elles sont encore fréquemment utilisées car elles conduisent à des modèles numériques moins importants en termes de nombres de nœuds et d'éléments.

Maillages d'éléments finis pour les ouvrages de soutènement

Cas d'une excavation non soutenue

Le maillage d'une excavation non soutenue doit être réalisé en tenant compte des recommandations suivantes :

> les limites verticales du maillage (condition $u = 0$) devraient être fixées à environ 10 fois la hauteur

de l'excavation. Toutefois, cette distance est un peu élevée. En effet, elle a été mise en évidence pour une modélisation en élasticité linéaire (Rodriguez, 1975), qui a tendance à exagérer certains effets et à propager trop loin les déformations, tant en dessous de l'ouvrage que latéralement. Aussi, pour des calculs en élastoplasticité, les limites verticales du maillage peuvent être ramenées à environ 6 fois la hauteur de l'excavation, ce qui correspond aux observations effectués sur les ouvrages réels (Burland et al., 1979) ;

> la limite horizontale inférieure (condition $v = 0$ ou $u = v = 0$) à au moins 4 fois la hauteur de la fouille. Lorsque le substratum rigide est situé à une grande profondeur, cette distance est suffisante. En revanche, si le substratum est relativement proche de la surface, c'est sa position qui impose la limite inférieure (fig. 20a) ;

> le maillage doit être relativement resserré autour de la fouille, c'est-à-dire le long de la paroi et sous le fond de fouille pour représenter de manière satisfaisante les concentrations de contraintes provoquées par les singularités géométriques (coin de l'excavation, changement de géométrie, problèmes de courbure, etc.) ;

> s'il existe des symétries dans l'ouvrage (écran et fouille) et dans le massif de sol, il faut les utiliser pour réduire la taille de la modélisation. Ainsi, en déformation plane, il suffit bien souvent de considérer la moitié de l'ouvrage et d'imposer des déplacements horizontaux nuls sur la ligne de symétrie.

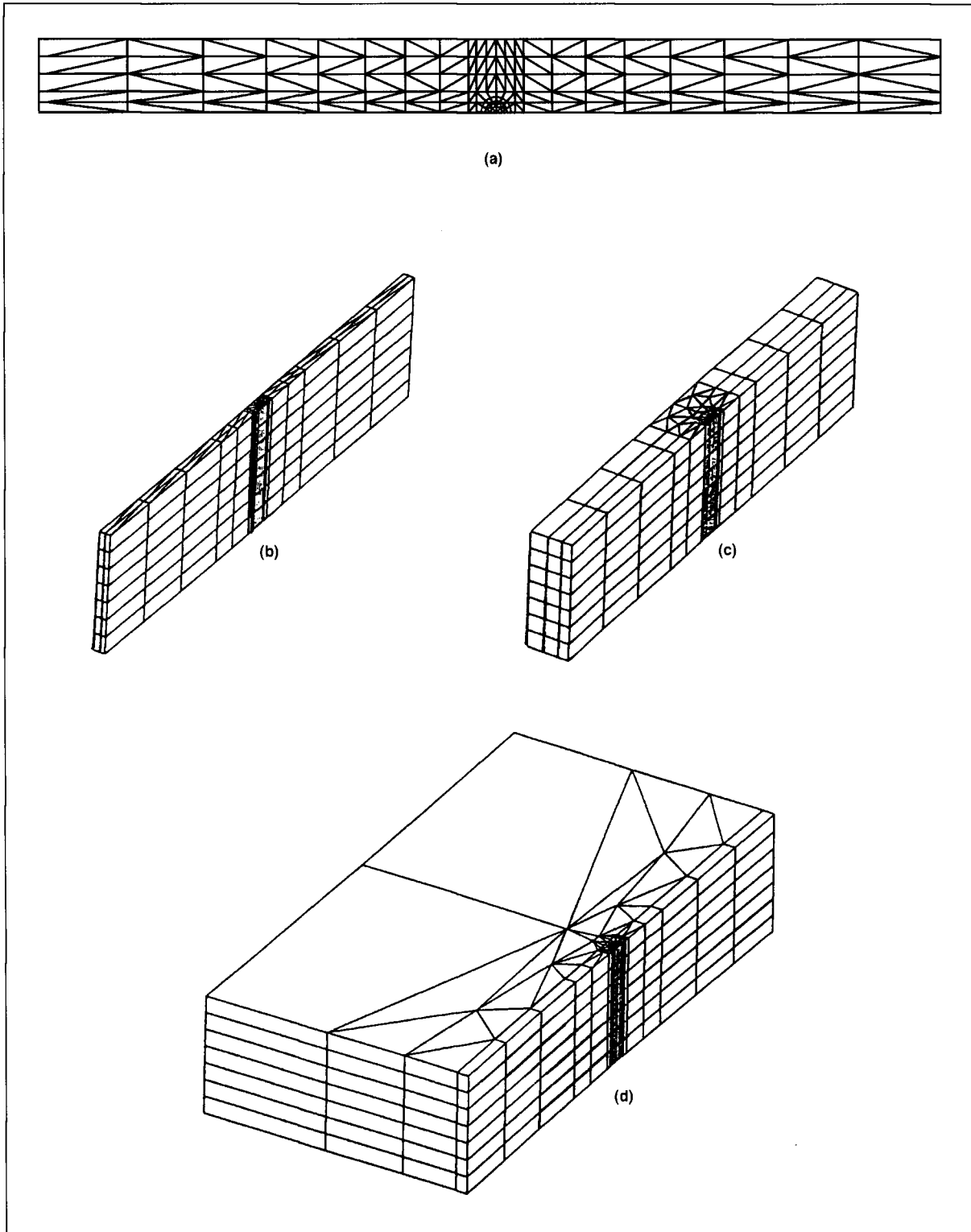
Note : La rigidité de la couche située sous le fond de fouille a une grande influence sur les mouvements du sol.

La figure 20b présente un exemple de maillage utilisé pour l'étude de la stabilité d'une excavation non soutenue.

Cas d'un mur de soutènement gravitaire

Le maillage d'un mur de soutènement gravitaire doit être réalisé en tenant compte des recommandations suivantes :

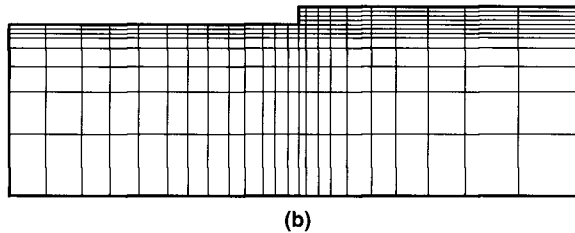
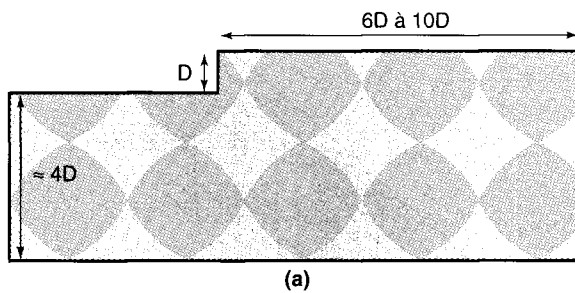
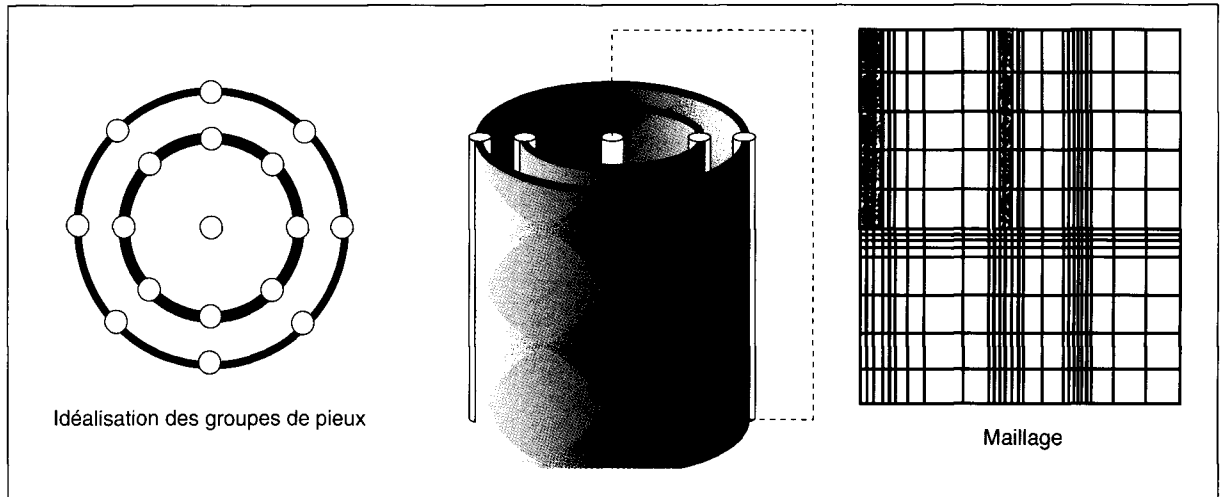
> la frontière latérale à l'amont du mur (condition $u = 0$) doit autoriser le développement du



a. 564 nœuds et 244 éléments - b. 2 418 nœuds et 980 éléments
c. 2 990 nœuds et 742 éléments - d. 2 574 nœuds et 672 éléments (pneu 19016)

Fig. 18 - Maillages bidimensionnels et tridimensionnels pour l'étude de l'effet de groupe dans une file de pieux (Chaoui, 1992).

Fig. 19 -
Modèle
axisymétrique
d'un groupe
de pieux.



a. Dimensions conseillées pour le maillage d'une excavation non soutenue - b. Maillage avec des quadrilatères à 8 nœuds.

Fig. 20 - Maillages d'excavation en déformation plane.

mécanisme de rupture, qui théoriquement peut occuper une zone limitée par un plan incliné d'un angle θ à partir du pied du mur. Cet angle est généralement supérieur à 45° . Il convient donc de placer cette frontière latérale à au moins 2 fois la hauteur du mur (fig. 21). On conseille néanmoins de placer cette frontière à 4 ou 5 fois la hauteur du mur ;

> la frontière latérale à l'aval du mur (condition $u = 0$) est fixée à une distance au moins égale à 3 fois la hauteur du mur (fig. 21) ;

> la frontière inférieure (condition $v = 0$ ou $u = v = 0$) est fixée au minimum à 4 fois la largeur du mur afin de décrire les variations du champ de contraintes autour du mur. Lorsque le substratum rigide est situé à une grande profondeur, cette distance est suffisante. En revanche, si le substratum est relativement proche de la surface, c'est sa position qui impose la limite inférieure (fig. 21) ;

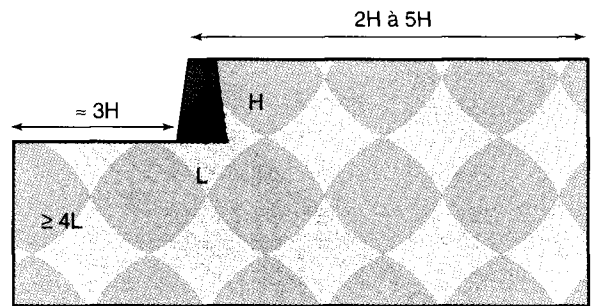


Fig. 21 - Maillages d'un mur gravitaire.
Dimensions conseillées pour le maillage.

> l'inclinaison de la fouille et/ou du remblai et le nombre de couches ou de niveaux d'excavation contrôlent la taille et la forme des éléments finis ;

> des études paramétriques ont montré que le rapport de forme (rapport de la plus grande dimension d'un élément à la plus faible) devrait être de 5 au maximum dans les zones les plus sollicitées et d'environ 10 loin de ces zones ;

> resserrer le maillage dans les régions où des concentrations de contraintes sont attendues, notamment autour du mur.

En déformation plane, il n'y a pas de symétrie exploitable par rapport à l'ouvrage, puisque le comportement à l'amont (excavation ou remblaiement) et à l'aval (remblaiement) sont différents.

La figure 22 décrit le maillage utilisé pour la modélisation en déformation plane du remplètement d'un quai par un rideau de palplanches (Mestat et Delattre, 1996). Le maillage complet intervient uniquement dans le premier calcul pour générer l'état initial du massif de sol. Ensuite, pour chaque étape de calcul (excavation, construction du mur gravitaire, remblaiement, etc.), seuls les éléments actifs interviennent et permettent ainsi de simuler la construction de l'ouvrage. Les éléments actifs forment un maillage différent à chaque étape.

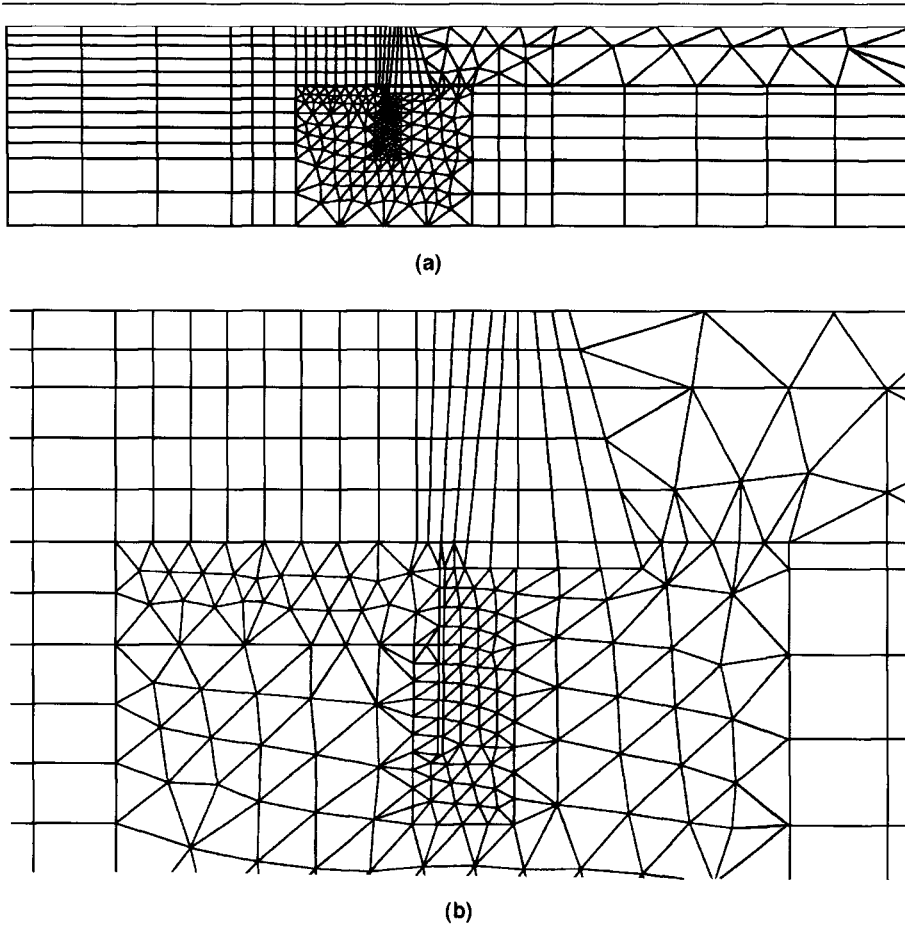


Fig. 22 - Maillage utilisé pour la modélisation d'un remplissage de quai (1 693 nœuds et 698 éléments)

a. Vue générale.
b. Vue agrandie autour du mur et du rideau de palplanches.

Cas d'un rideau de palplanches ou d'une paroi moulée

La plupart des recommandations énoncées pour les murs gravitaires sont également valables pour les rideaux et parois. Seuls sont précisés quelques points particuliers :

- la frontière verticale à l'amont doit être fixée à au moins 5 fois la hauteur totale de l'écran de soutènement ;
- la frontière verticale à l'aval dépend de la géométrie du site. Sans indication particulière, la frontière doit être fixée à au moins 3 fois la hauteur de l'écran ;
- l'écran de soutènement peut être représenté en déformation plane par des éléments de poutre ou de massif. D'une manière générale, les éléments de massif sont plus indiqués pour les parois moulées, mais un rideau peut également être simulé par des éléments de massif à condition de donner à ceux-ci des caractéristiques équivalentes (rigidités et épaisseur) ;
- l'interaction sol-écran est représentée par des éléments d'interface (critère de frottement de Coulomb) ;
- le maillage doit être raffiné dans la zone où se situent les tirants d'ancrage ;
- l'introduction d'éléments d'interface sol-tirant améliore le modèle.

Note : La prise en compte d'éléments d'interface entre le rideau et le massif de sol est un point essentiel pour la modélisation. En effet, sans ces éléments, le sol derrière le rideau a tendance à se soulever comme le rideau, car il est entraîné par les forces d'excavation. Cette cinématique n'est pas conforme aux observations faites habituellement pour ce type d'ouvrage. En revanche, des éléments d'interface sol-rideau permettent d'obtenir une cinématique conforme aux observations ; le sol se tasse derrière l'écran et la tête de la paroi se déplace vers l'excavation.

Cas d'un mur de soutènement en sol renforcé

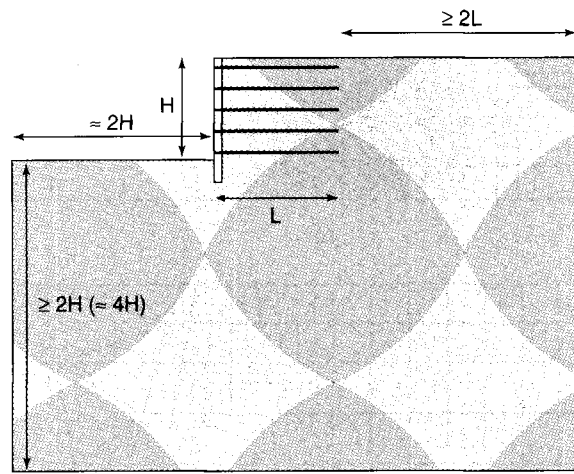
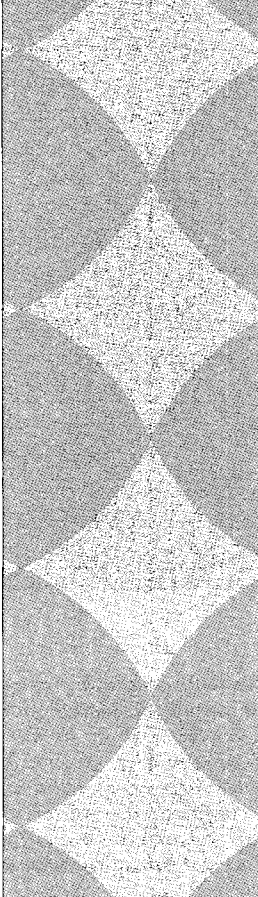
Le maillage d'un mur de soutènement en sol renforcé doit être réalisé en tenant compte des recommandations suivantes :

- la frontière latérale à l'amont (condition $u = 0$) est fixée à 3 fois la longueur maximale des armatures, sauf obstacle particulier à prendre en compte ;
- la frontière latérale à l'aval (condition $u = 0$) est placée au minimum à 2 fois la hauteur du mur ;
- la frontière inférieure (condition $v = 0$ ou $u = v = 0$) est fixée comme pour les autres ouvrages de soutènement à au moins 3 fois la hauteur du mur (jusqu'à 5H si la hauteur H est relativement faible) ;
- il faut également prévoir un maillage fin dans cette zone et augmenter peu à peu la taille des élé-

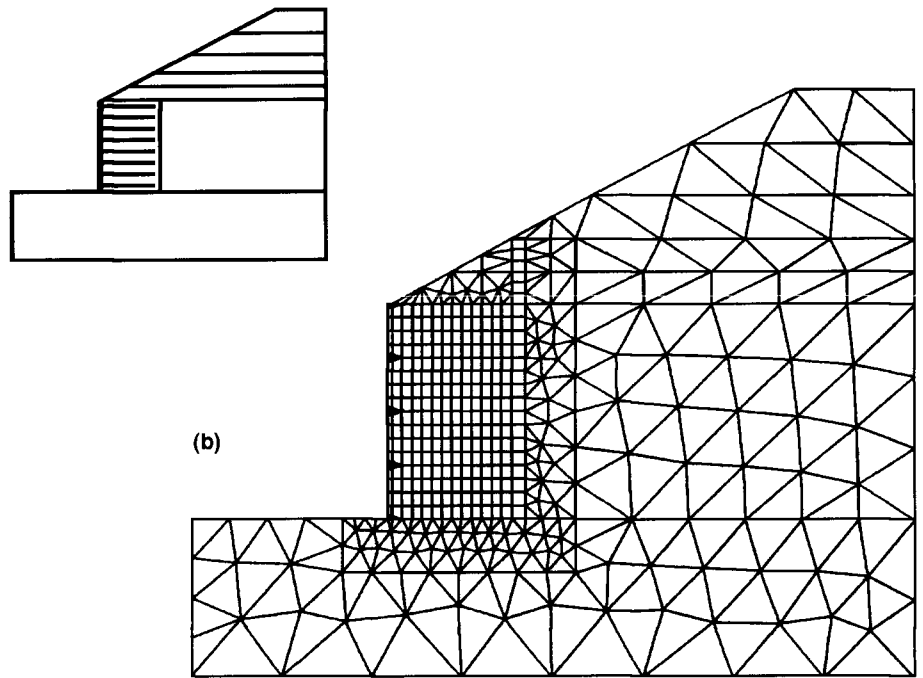
Fig. 23 - Maillages de murs en sol renforcé.

a. Dimensions conseillées pour le maillage en déformation plane.

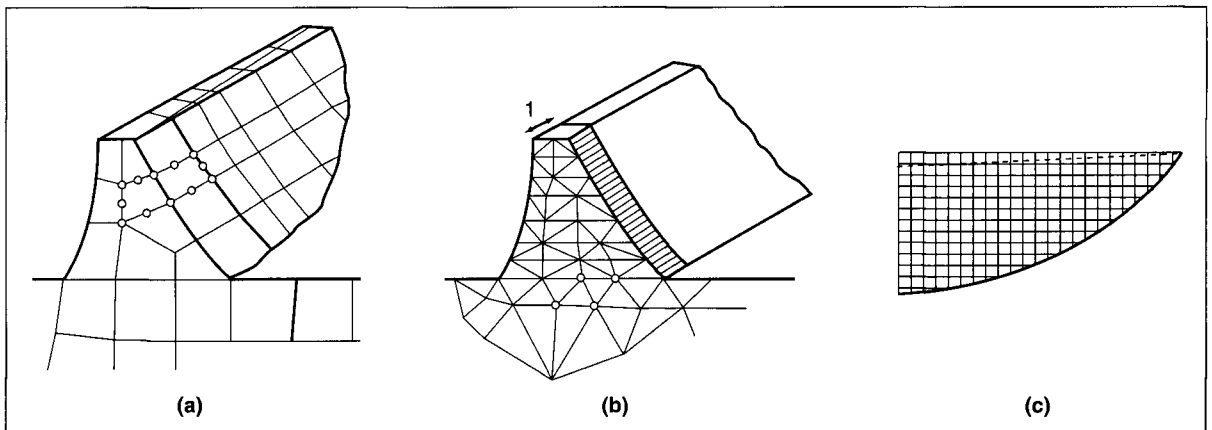
b. Maillage utilisé pour le calcul d'un ouvrage de soutènement en Terre Armée (1 934 nœuds et 1 105 éléments).



(a)



(b)



(a)

(b)

(c)

a. Modèle tridimensionnel - b. Modèle bidimensionnel transversal - c. Modèle bidimensionnel longitudinal.

Fig. 24 - Modèles d'éléments finis pour un barrage en terre (recommandations de la Commission internationale des grands barrages, 1993).

ments en s'éloignant du parement. En effet, les observations expérimentales ont montré que la variation de la traction dans les armatures est forte près du parement ;

➤ l'interaction sol-renforcement est représentée par des éléments d'interface (critère de frottement de Coulomb).

La figure 23 présente un maillage qui respecte globalement les recommandations précédentes. En effet, pour les grandes hauteurs de mur, il faut parfois réduire quelque peu les dimensions conseillées pour ne pas aboutir à des maillages trop importants.

Maillage d'éléments finis pour les ouvrages en terre

Modèles d'éléments finis pour les ouvrages en terre

Les modèles d'ouvrages en terre (remblai, barrage, digue) doivent généralement tenir compte des talus aval et amont. Les modèles les plus courants sont les suivants :

❶ **modèle tridimensionnel**, lorsque le site du barrage est relativement étroit (fig. 24a) ;

❷ **modèle bidimensionnel transversal**, avec ou sans prise en compte du massif de fondation (fig. 24b) ;

❸ **modèle bidimensionnel longitudinal**, selon la coupe de plus grande hauteur. Ce type de modèle peut être utilisé pour l'étude des charges dues à la pesanteur et de leur effet purement mécanique (fig. 24c). Toutefois, ce type de modèle reste rare et n'a plus grand intérêt maintenant que les calculs tridimensionnels sont devenus accessibles.

Sous l'effet de la gravité, les barrages en enrochement avec un noyau central en terre sont soumis à de forts gradients de déformation dans les zones de transition. Aussi des éléments de contact ou d'interface peuvent-ils être introduits dans le modèle afin d'autoriser des glissements et des frottements aux frontières entre les matériaux. Par ailleurs, si des failles existent dans les massifs rocheux de fondation, celles-ci peuvent être représentées également par des éléments d'interface ou de joints.

Cas des remblais

En pratique, pour des remblais qui sont relativement longs, une analyse en déformation plane d'une section courante de l'ouvrage est appropriée, excepté lorsque le sol de fondation présente des discontinuités ou des couches de sol qui ne respectent pas cette condition de symétrie dans les sections courantes. Dans ce cas, l'analyse en déformation plane ne peut fournir qu'une approximation, il est alors fortement conseillé de faire un calcul tridimensionnel.

Le maillage d'un remblai doit être réalisé en tenant compte des recommandations suivantes :

- les frontières latérales (condition $u = 0$) doivent autoriser le développement du mécanisme de rupture qui, théoriquement, peut occuper une zone limitée par un cercle relativement proche des pieds du remblai. Il convient donc de placer ces frontières latérales au minimum à environ 2 fois la demi-largeur du remblai par rapport à son axe (fig. 25) ;
- la frontière inférieure (condition $v = 0$ ou $u = v = 0$) est fixée au minimum à 4 fois la hauteur du remblai par rapport au terrain naturel, afin de décrire les variations du champ de contraintes au voisinage de celui-ci. Lorsque le substratum rigide est situé à une grande profondeur, cette distance est suffisante. En revanche, si le substratum est relativement proche de la surface, c'est sa position qui impose la limite inférieure ;
- la taille et la forme des éléments finis dans le remblai sont contrôlées par les deux inclinaisons dans le plan transversal du remblai, la présence de banquettes et le nombre de couches à mettre en place (fig. 26) ;
- comme des interactions existent lorsqu'une couche est posée à côté ou au-dessus d'une autre, il convient pour une analyse fine de considérer au moins deux rangées d'éléments superposées pour chaque couche ;
- le rapport de forme (rapport de la plus grande dimension d'un élément à la plus faible) devrait être de 5 au maximum dans les zones les plus sollicitées et d'environ 10 loin de ces zones ;
- le maillage doit être resserré dans les régions situées directement sous le remblai et là où des concentrations de contraintes sont attendues, en particulier aux pieds du remblai ;
- des éléments finis de plus faibles dimensions sont à prévoir au voisinage des frontières drainantes ;
- pour une analyse en consolidation, le maillage doit être composé du nombre minimal nécessaire de nœuds et d'éléments. Le raffinement du maillage est le fruit d'un compromis entre le nombre de pas de temps retenu et la précision souhaitée sur les résultats des calculs (fig. 26c).

En déformation plane, seule la symétrie dans le plan transversal du remblai est habituellement exploitée lorsque cela est possible.

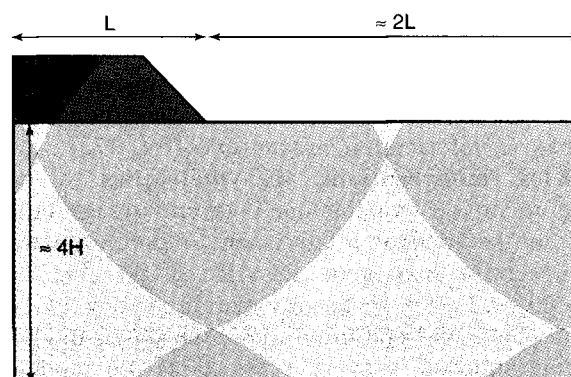


Fig. 25 - Dimensions conseillées pour les maillages de remblais en déformation plane.

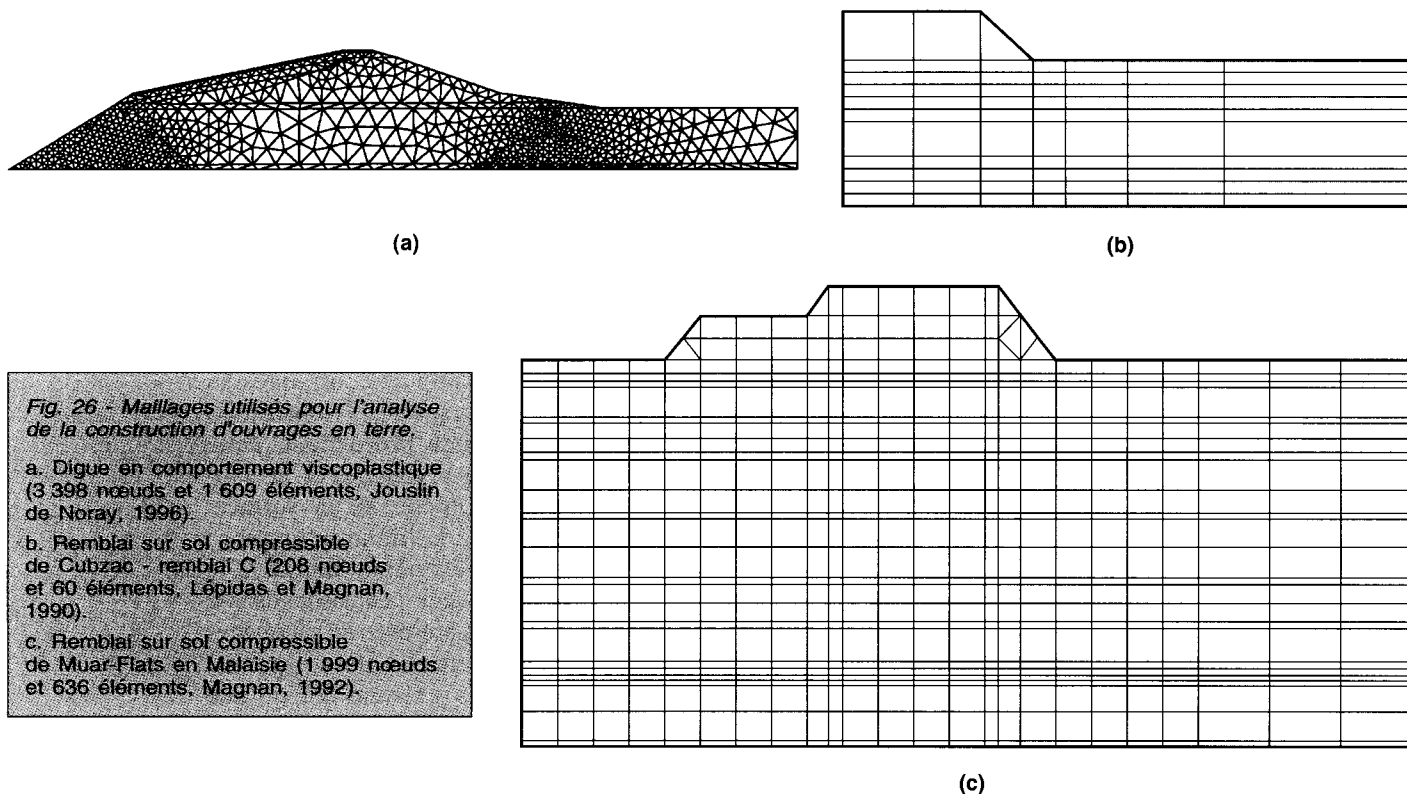


Fig. 26 - Maillages utilisés pour l'analyse de la construction d'ouvrages en terre.

a. Digue en comportement viscoplastique (3 398 nœuds et 1 609 éléments, Jouslin de Noray, 1996)

b. Remblai sur sol compressible de Cubzao - remblai C (208 nœuds et 60 éléments, Lépidas et Magnan, 1990)

c. Remblai sur sol compressible de Muar-Flats en Malaisie (1 999 nœuds et 636 éléments, Magnan, 1992)

Maillage d'éléments finis pour les ouvrages souterrains

Modèles d'éléments finis pour les ouvrages souterrains

Les modélisations d'ouvrages souterrains peuvent être divisées en quatre catégories :

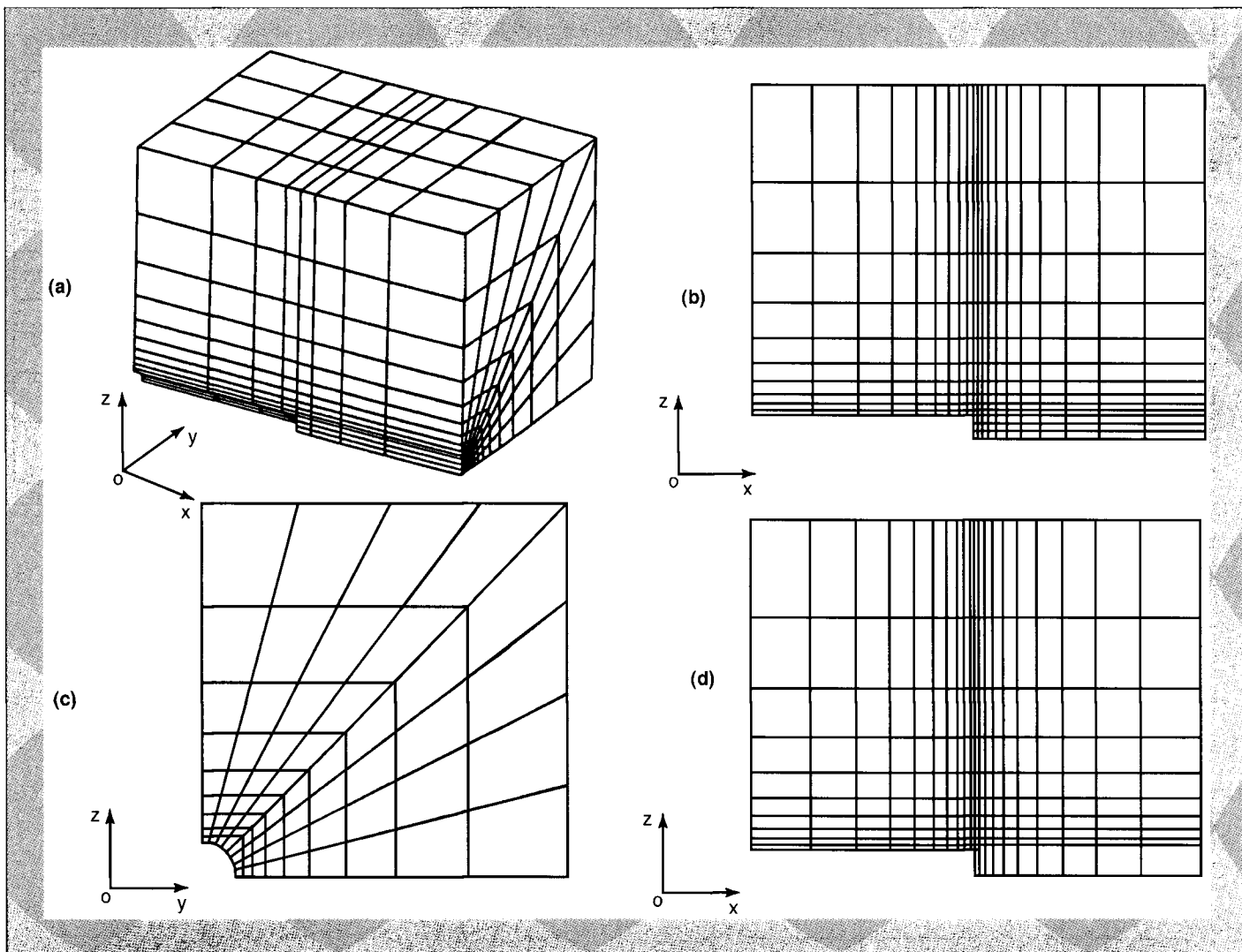
- ❶ les **modélisations tridimensionnelles** pour l'étude du front de taille, d'une intersection de galeries, d'un changement de section, ou lorsque les terrains sont très hétérogènes (fig. 27a) ;
- ❷ les **modélisations bidimensionnelles le long de l'axe de l'ouvrage**. Le tunnel est considéré non plus comme une cavité cylindrique de diamètre D , mais comme une cavité de hauteur D (il s'agit en fait d'une « taille » en langage minier), suffisamment longue dans la direction Ox , pour que l'hypothèse de déformation plane soit justifiée (pas de déformation suivant Ox) (fig. 27b) ;
- ❸ les **modélisations en déformation plane pour une section courante**. La section du tunnel est une cavité circulaire ou non circulaire, située dans un plan perpendiculaire à l'axe du tunnel (pas de déformation suivant Ox) (fig. 27c) ;
- ❹ les **modélisations axisymétriques**. Cette approche n'est valable que pour un ouvrage situé à une profondeur relativement importante dans un terrain homogène et s'il est possible de négliger l'effet de la gravité (notamment en ce qui concerne l'état initial des contraintes, qui est alors supposé isotrope et constant). Le modèle est un cylindre de sol dans lequel se trouve le tunnel circulaire (fig. 27d).

Les approches simplifiées permettent d'éviter, lorsque cela est possible, de réaliser une modélisation tridimensionnelle. Si le tunnel est relativement proche de la surface et le relief de celle-ci véritablement tridimensionnel, il est encore possible de réaliser une modélisation en déformation plane en se plaçant dans des situations extrêmes (par exemple, en considérant la plus grande hauteur de recouvrement). Les résultats constitueront alors une borne supérieure par rapport aux résultats d'un calcul tridimensionnel.

Cas des ouvrages souterrains

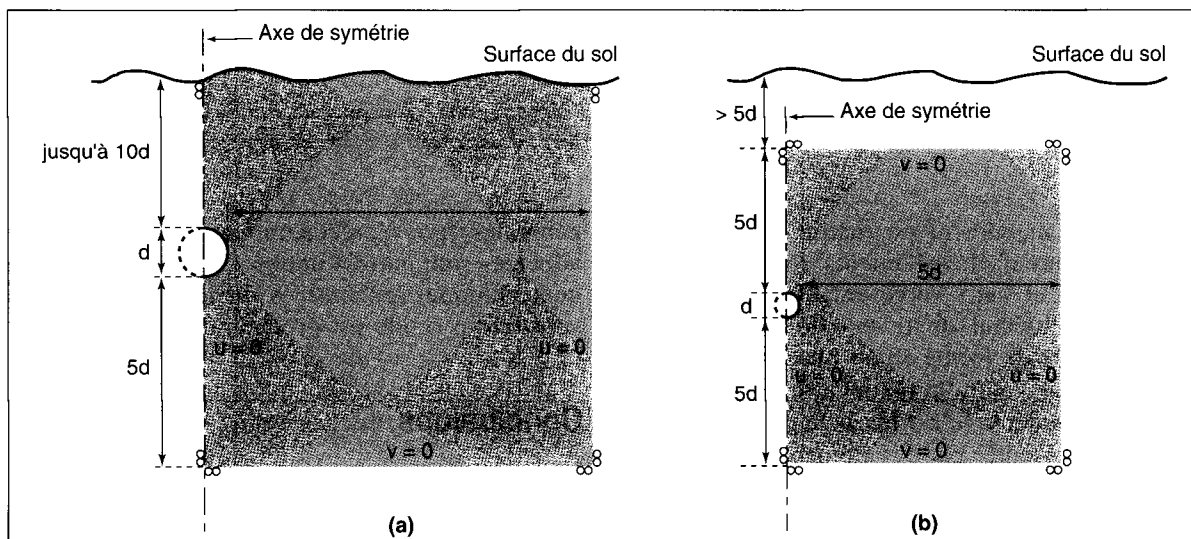
Le maillage d'un ouvrage souterrain doit être réalisé en tenant compte des recommandations suivantes :

- les conditions de nullité des déplacements sont généralement imposées assez loin de l'ouvrage. En pratique des distances d'environ 5 fois le diamètre moyen de la galerie doivent être respectées (fig. 28) ;
- les limites entre des terrains de caractéristiques différentes et les plans de discontinuité doivent obligatoirement coïncider avec des contours intérieurs au maillage ;
- la frontière entre le terrain et le soutènement doit également coïncider avec des contours intérieurs au maillage ;
- le maillage doit être raffiné au voisinage du tunnel pour obtenir une meilleure précision dans la zone où les contraintes et les déformations varient rapidement d'un point à un autre. En particulier,



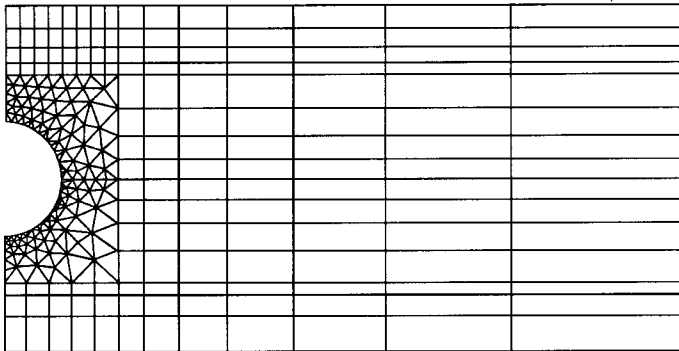
a. Étude tridimensionnelle - b. Cas d'une taille - c. Étude en section courante - d. Étude en déformation axisymétrique.

Fig. 27 - Modélisations d'un ouvrage souterrain.

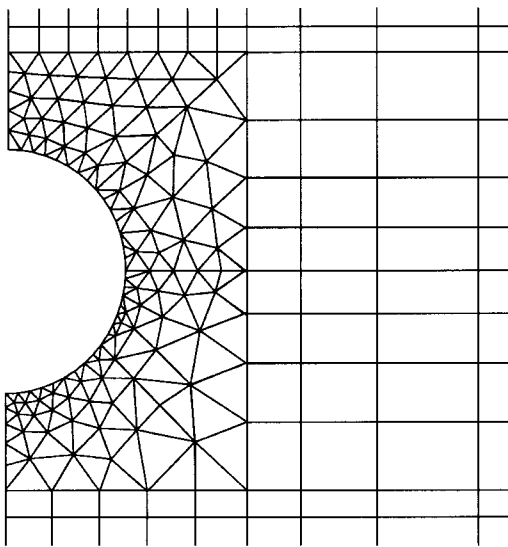


a. Tunnel peu profond - b. Tunnel profond.

Fig. 28 - Dimensions pour le maillage d'un ouvrage souterrain.



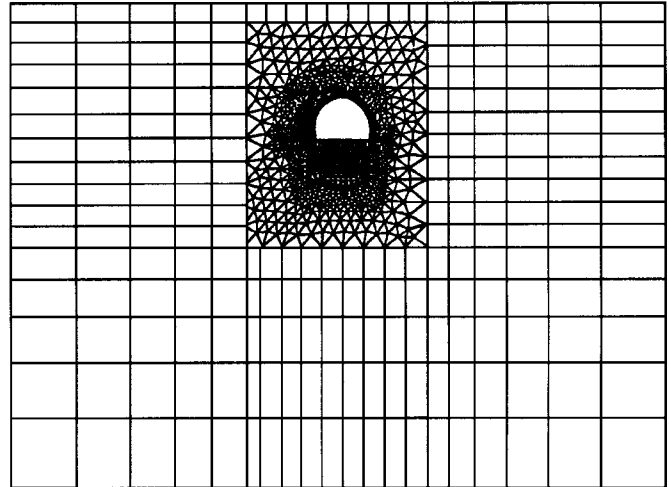
(a)



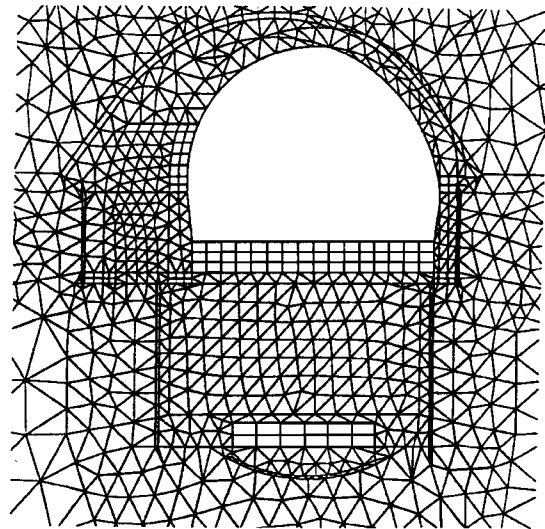
(b)

a. Vue générale (308 nœuds et 371 éléments) -
b. Vue agrandie autour de la galerie (Atwa, 1996).

Fig. 29 - Maillage en déformation plane pour l'analyse de la construction d'un ouvrage souterrain dans un sol composé de couches horizontales.



(a)



(b)

a. Vue générale (5 180 nœuds et 2 319 éléments) - b. Vue agrandie autour de la galerie (document ITECH - Simécsol).

Fig. 30 - Maillage en déformation plane pour l'analyse de la construction d'un ouvrage souterrain.

lorsque le soutènement est maillé avec des éléments de massif, les éléments représentant le soutènement et ceux représentant le terrain au voisinage immédiat du tunnel doivent avoir le même rapport de forme (5 au maximum) ;

➤ si l'interface entre le tunnel et le soutènement doit être considérée (c'est le cas le plus fréquent), elle sera représentée par des éléments d'interface.

Les figures 29 à 31 présentent des exemples de maillages utilisés dans les bureaux d'études pour l'analyse de la construction par étapes d'un ouvrage souterrain (analyse des déformations autour de la galerie et près de la surface, calcul de stabilité). En dehors des recommandations

générales faites précédemment, les dimensions adoptées sont parfois imposées par les conditions géotechniques rencontrées sur le site (fig. 29 : le substratum rigide est proche du tunnel étudié).

Conclusions

La modélisation des ouvrages de géotechnique par la méthode des éléments finis est rendue possible par un ensemble d'hypothèses concernant la géométrie de l'ouvrage et de son environnement, les matériaux et leur comportement, les chargements, les conditions aux limites et les conditions initiales (Desai et Christian, 1977 ; Kardestunder et Norrie,

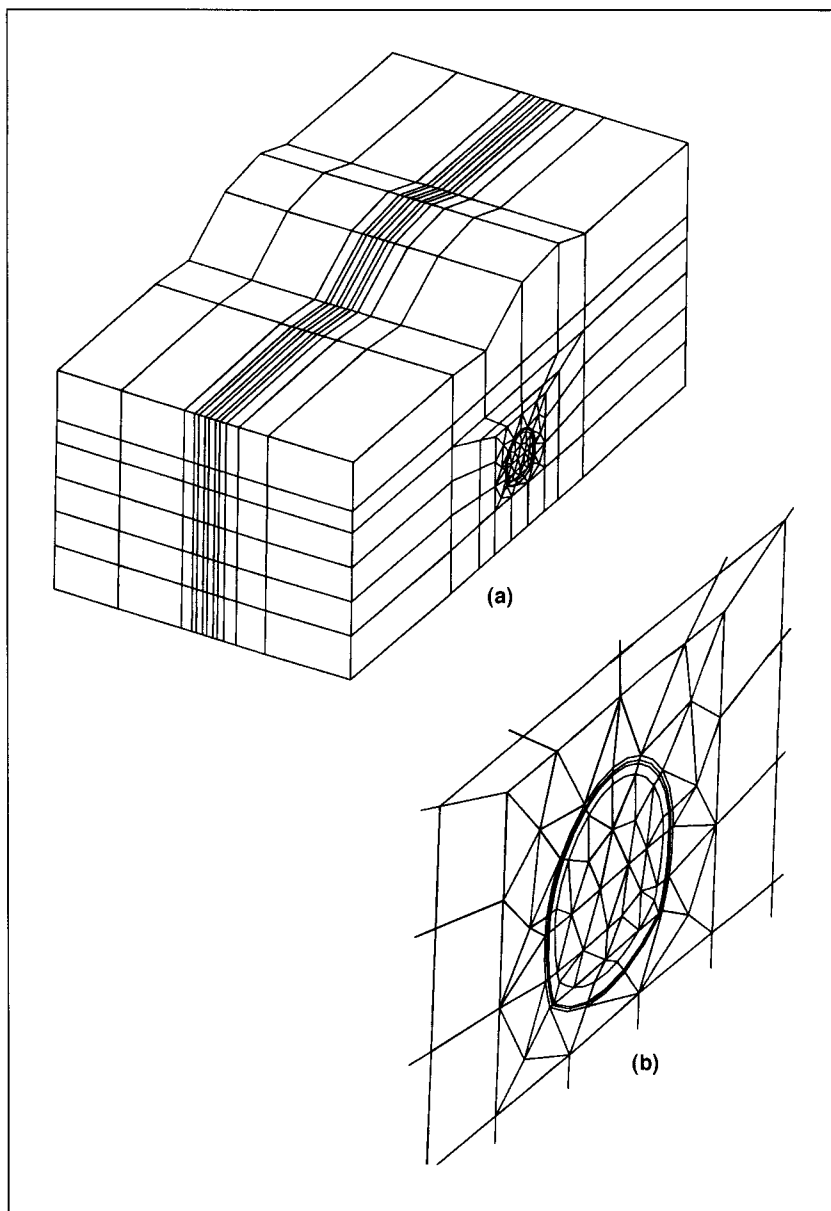


Fig. 31 - Maillage tridimensionnel pour l'analyse de la construction d'un ouvrage souterrain.

a. Vue générale (7 822 nœuds et 2 076 éléments).

b. Vue agrandie autour de la galerie.

1987 ; Zienkiewicz, 1989 ; Zienkiewicz et Taylor, 1991 ; Prat et *al.*, 1995, 1997). Ces hypothèses, souvent simplificatrices (mais qui doivent respecter les phénomènes mécaniques essentiels), sont posées sous la responsabilité de l'ingénieur, chargé de l'étude.

La réalisation concrète de cette étude nécessite la construction d'un maillage d'éléments finis et l'utilisation d'un code de calcul. À ce niveau de réalisation, il s'agit surtout de mettre en œuvre des techniques et il serait souhaitable, pour la qualité des études, que des règles simples (éventuellement dépendantes du type d'ouvrages) soient appliquées afin de minimiser le rôle de l'utilisateur dans la construction du maillage. Les conseils proposés dans cet article vont dans ce sens et devraient permettre aux ingénieurs et, plus particulièrement, aux géotechniciens désireux de s'initier à la méthode des éléments finis, de réaliser des modèles relativement satisfaisants tant au niveau de la durée des calculs que de la précision des résultats.

Évidemment, ces conseils restent pour beaucoup d'entre eux au niveau de la généralité, car chaque ouvrage constitue un cas particulier comme l'ont montré beaucoup des exemples qui ont illustré cet article. Mais il est raisonnable de penser que leur application, replacée dans la démarche globale de modélisation et associée au contrôle de la convergence en comportement non linéaire, pourrait contribuer à rendre les résultats des calculs plus fiables.

_____ RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES _____

BURLAND J.B., SIMPSON B., ST JOHN H.D. (1979), *Movements around excavations in London Clay*, VII ECSMFE, Design parameters in geotechnical engineering, Brighton, vol. 1, pp. 13-29.

CHAOUÏ F. (1992), *Étude tridimensionnelle du comportement des pieux dans les pentes instables*, Thèse de doctorat de l'École nationale des Ponts et Chaussées, 355 pages.

- DESAI C.S., CHRISTIAN J.T. (1977), *Numerical methods in geotechnical engineering*, McGraw-Hill Book Company, New York, 784 pages.
- FLEMING W.G.K., WELTMAN A.J., RANDOLPH M.F., ELSON W.K. (1992), *Piling engineering*, Blackie and Son, London, seconde édition, 390 pages.
- FRANK R. (1984), *Étude théorique des fondations profondes et d'essais en place d'autoforage dans les LPC (1972-1983)*, Rapport de recherche LPC, **128**, 93 pages.
- HUMBERT P., MESTAT Ph. (1995), *Modélisation 3D de la fondation d'une centrale nucléaire*, XIth ECSMFE, Copenhague, mai 1995, **vol. 6**, pp. 63-68.
- JOUSLIN DE NORAY M. (1996), *Géotechnique du centre d'enfouissement de Guitrancourt (Yvelines) et comportement mécanique des déchets*, Travail de fin d'études, Laboratoire régional de l'Ouest parisien, 95 pages.
- KARDESTUNDER H., NORRIE D.H. (1987), *Finite element handbook*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1 424 pages.
- LEKHNITSKII S.G. (1963), *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*, Holden-Day Series in mathematical physics, San Francisco, Californie, 404 pages.
- LÉPIDAS I., MAGNAN J.-P. (1990), *Fluage et consolidation des sols argileux : modélisation numérique*, Rapport de recherche LPC, **157**, 170 pages.
- MAGNAN J.-P. (1992), *Les remblais d'essai sur argiles molles de Muar Flats (Malaisie)*, Études et Recherches des LPC, série géotechnique, **GT 50**, 66 pages.
- MESTAT Ph., DELATTRE L. (1996), *Modélisation des rempiètements de mur de quai*, Journée d'études belgo-française, Aspects géotechniques des travaux portuaires, 20 septembre 1996, Bruxelles, 24 pages.
- MESTAT Ph. (1994), *Validation du progiciel CÉSAR-LCPC en comportement mécanique non linéaire, vol. 1 : fondations superficielles et tunnels*. Études et Recherches des LPC, série géotechnique, **GT 58**, 173 pages.
- PRAT M., BISCH Ph., MESTAT Ph., MILLARD A., PIJAUDIER-CABOT G. (1995), *La modélisation des ouvrages*, Collection AFPC-Emploi des éléments finis en génie civil, Editions Hermès, Paris, 770 pages.
- PRAT M., BISCH Ph., MESTAT Ph., MILLARD A., PIJAUDIER-CABOT G. (1997), *Calcul des ouvrages généraux de construction*, Collection AFPC-Emploi des éléments finis en génie civil, Editions Hermès, Paris, 768 pages.
- REDDY J.N. (1993), *An introduction to the finite element method*, McGraw-Hill Book Company, New York, 684 pages.
- RODRIGUEZ J.S.N. (1975), *The development and application of a finite element program for the solution of geotechnical problems*, Ph D thesis, University of Surrey.
- TAMURA A., OZAWA Y., SUNAMI S., MURAKAMI S. (1982), *Reduction in horizontal bearing capacity of pile group*, Fourth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Eisenstein Z. Editor, Balkema, Rotterdam, pp. 865-874.
- ZIENKIEWICK O.C. (1989), *The finite element method (vol. 1 : basic formulations and linear problems)*, McGraw-Hill Book Company, London.
- ZIENKIEWICK O.C., TAYLOR R. (1991), *The finite element method (vol. 2 : plates, shells, fluids and non linear problems)*, McGraw-Hill Book Company, London.

ABSTRACT

Finite element mesh for geotechnical structures. Advice and recommendations

Ph. MESTAT

General recommendations are given for developing a finite element mesh for geotechnical engineering structures.

The principal types of finite element are described as are the characteristics of each. Specific recommendations are then made for each of the main types of structure (foundations, tunnels, embankments, retaining walls). The authors illustrate their advice with a number of two-dimensional and three-dimensional examples, drawn from studies using the CÉSAR-LCPC software package.