

Modèles d'éléments finis et problèmes de convergence en comportement non linéaire

Philippe MESTAT

Directeur de recherche

Chef de la section Rhéologie et modélisation des sols

Division Mécanique des sols et géologie de l'ingénieur

Laboratoire central des Ponts et Chaussées

RÉSUMÉ

Cet article présente les différentes notions de convergence liées à la méthode des éléments finis et au traitement des lois de comportement non linéaire nécessaires pour décrire les déformations des massifs de sol. La convergence au sens du processus itératif de résolution est plus particulièrement étudiée. Pour un maillage et un chargement donnés, l'étude de la suite des déplacements permet, lorsque celle-ci converge, d'obtenir un majorant de l'erreur absolue et de l'erreur relative par rapport à la limite de la suite des déplacements. Des exemples de suivi du processus de résolution sont présentés sur des cas simples. Par ailleurs, des exemples de modèles d'ouvrages (fondations, soutènements) montrent l'intérêt de contrôler cette convergence à chaque étape de la résolution. Tous les calculs sont réalisés avec le progiciel CÉSAR-LCPC.

MOTS CLÉS : 42 - *Éléments finis (méthode) - Modèle numérique - Comportement - Non linéaire - Loi - Sol - Déformation - Fondation - Programme de calcul - Mur de soutènement - /Convergence.*

Introduction

La nécessité de calculer les déformations des structures et des terrains sous diverses sollicitations impose le recours à des méthodes numériques et à des lois de comportement des matériaux relativement compliquées. L'utilisation des résultats d'un calcul par éléments finis en conditions de projet dépend de la représentativité du modèle et de la validité des hypothèses, mais aussi du bon déroulement du processus de résolution incrémental et itératif.

Ce processus doit être fiable et dans la mesure du possible économique ; il doit aussi être bien adapté au traitement local des lois de comportement introduites dans le code de calcul. Il s'agit essentiellement de résoudre des équations différentielles et des équations implicites qui définissent les lois de comportement incrémentales et non linéaires (hypoélasticité, hyperélasticité, élasto-plasticité, etc.).

Les algorithmes utilisés conduisent parfois à des durées de calcul importantes et à des difficultés de convergence liées aux chargements appliqués. Il est alors essentiel pour l'utilisateur de juger de la convergence et d'interpréter correctement les informations que le code de calcul fournit sur le déroulement de la résolution. Cet article a pour objet de préciser ces informations et de prodiguer des conseils pour estimer la qualité des résultats des calculs en comportement non linéaire, lorsqu'on suppose que le code est bien validé et que les algorithmes de résolution sont robustes et fiables.

Convergences et méthode des éléments finis

Le principe de la résolution par les éléments finis d'un problème en comportement non linéaire nécessite quatre processus de discrétisation simultanés :

- ❶ une **discrétisation spatiale** du domaine géométrique représentatif de l'ouvrage et de son environnement (maillage) ;
- ❷ un processus de **résolution itératif**, si les lois de comportement des matériaux sont non linéaires ;
- ❸ une **discrétisation du chargement**. Celui-ci est souvent appliqué en accroissements successifs, appelés incréments, pour faciliter la convergence du processus de résolution itératif, si toutefois cela reste compatible avec la modélisation retenue et le phasage des travaux ;
- ❹ un **schéma d'intégration locale**, si les lois de comportement sont définies sous une forme différentielle ou implicite.

Une notion de convergence peut être associée à chacun de ces processus :

- la **convergence au sens du maillage**, qui est assurée par le choix et la formulation mathématique des éléments finis. Lorsque le maillage devient de plus en plus fin, la solution donnée par le calcul tend vers une limite très proche de la solution exacte du problème ;
- la **convergence au sens du processus de résolution incrémental et itératif**, qui permet d'obtenir la solution en déplacements et en contraintes pour un maillage et un schéma d'intégration des lois de comportement donnés ;
- la **convergence au sens du chargement**. Le calcul a pour objet d'appliquer une suite croissante de chargements afin d'estimer la valeur de la charge limite supportable par un massif de sol ;
- la **convergence au sens du schéma d'intégration locale**, qui permet le calcul des contraintes et des quantités non linéaires (déformation plastique, écrouissage) compatibles avec l'expression des lois de comportement.

La « qualité » de la solution numérique dépend de ces processus et de leur interaction réciproque au cours d'un calcul. Ainsi, pour un maillage donné, les trois derniers processus sont fortement liés : chacun peut être la cause d'une erreur dans l'estimation des contraintes, d'où une erreur dans la redistribution des forces résiduelles et finalement une mauvaise évaluation du champ de déplacements. Pour la pratique, c'est le deuxième type de convergence qui doit retenir en priorité l'attention de l'utilisateur d'un code d'éléments finis.

Le schéma général de résolution conduit à distinguer plusieurs types de solution :

- la **solution théorique** du problème, ou solution exacte ;
- la **solution convergée**, ou solution convergée au sens du processus itératif. Il s'agit de la solution obtenue après la convergence de la suite des inconnues nodales pour un maillage et un schéma d'intégration de la loi de comportement donnés. Ce schéma doit être contrôlé par des tests rigoureux afin de ne pas compromettre la qualité de la solution. Un mauvais schéma peut entraîner une convergence vers une autre solution ;
- la **solution des éléments finis**, ou solution convergée au sens du maillage. Il s'agit de la solution vers laquelle doit tendre toute solution convergée lorsque le maillage devient de plus en plus fin.

En conséquence, la solution d'un problème mécanique en comportement non linéaire doit être à la fois une solution des éléments finis et une solution convergée au sens du processus itératif. La qualité de la solution est alors appréciée en fonction de tests de convergence appropriés. Dans cet article, on s'intéresse essentiellement à la convergence et aux tests liés au processus de résolution itératif et incrémental.

Algorithme de résolution en comportement non linéaire

Principe de la méthode de résolution d'un problème non linéaire

Le traitement par la méthode des éléments finis de type déplacement des équations différentielles d'un problème de mécanique en comportement non linéaire conduit d'une façon générale à la résolution d'un système d'équations algébriques de la forme suivante :

$$R(u, \lambda(t)) = F_{int}(u) - \lambda(t)P = 0$$

Le vecteur R est appelé vecteur résidu. Il exprime l'état de déséquilibre de la structure à un instant t de la sollicitation ; sa dimension est égale au nombre de nœuds que comprend le maillage. u désigne le vecteur des déplacements des nœuds du maillage. $F_{int}(u)$ est le vecteur des forces nodales correspondant aux contraintes dans la structure à l'instant t . P représente le vecteur dû au chargement total appliqué à la structure et $\lambda(t)$, la proportion de chargement exercée à l'instant t , encore appelée facteur de charge.

La solution du système d'équations est le couple $(u, \lambda(t))$ associant la réponse en déplacements de la structure à la sollicitation qu'elle subit.

Lorsque le facteur de charge n'est pas constant, il faut introduire une équation supplémentaire pour résoudre le problème. Cette équation est fournie par une méthode de contrôle pas à pas du chargement (méthode de la longueur d'arc, méthode de Wempner, etc.) (Wempner, 1971 ; Ricks, 1972 ; Crisfield, 1983 ; Mestat, 1993a). Afin de simplifier les développements qui suivent, le facteur de charge est supposé constant ; le champ de déplacements demeure alors la seule inconnue du problème. Cette hypothèse ne réduit en rien la portée générale des concepts et des résultats mis en œuvre dans cet article.

La résolution directe du système d'équations algébriques est le plus souvent impossible à cause des non-linéarités introduites par les lois de comportement. Il faut donc avoir recours à un processus de résolution incrémental et itératif fondé sur une linéarisation des équations algébriques. Cette linéarisation consiste à effectuer un développement limité au premier ordre de l'équation représentant l'équilibre du système mécanique (Bathe et Wilson, 1976 ; Desai et Christian, 1977 ; Bathe, 1981 ; Kardestuncer et Norrie, 1987 ; Zienkiewicz et Taylor, 1989, 1991 ; Prat et al., 1997) :

$$R(u + \Delta u) \approx R(u) + \left[\frac{\partial R}{\partial u} \right] \Delta u$$

Ce développement fait apparaître une matrice, appelée matrice de rigidité tangente, qui est définie par la relation :

$$K = \left[\frac{\partial R}{\partial u} (u) \right]$$

Le calcul de cette matrice permet de proposer un schéma de résolution de l'équation $R(u) = 0$. En effet, si on suppose construite la matrice de rigidité K et connue une solution approchée u_0 telle que $\|R(u_0)\| \neq 0^*$, alors la solution de l'équation au premier ordre, $R(u_0) + \left[\frac{\partial R}{\partial u} (u_0) \right] \Delta u = 0$, constitue une nouvelle approximation de la solution du problème mécanique. L'accroissement de déplacements Δu est déterminé par la relation suivante :

$$\Delta u = u_1 - u_0 = -[K]^{-1} R(u_0)$$

Processus itératif et algorithme de résolution

Pour un incrément de chargement donné, on peut construire ainsi un processus itératif, à condition toutefois que la suite des matrices K_i soient inversibles. Pour une itération i donnée, K_i et

* $\|\cdot\|$ la norme euclidienne classique ($\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$)

$R(u_n^i)$ sont calculés en fonction du déplacement u_n^i , puis le déplacement u_n^{i+1} est déterminé par la relation :

$$u_n^{i+1} = u_n^i - [K_i]^{-1} \cdot R(u_n^i)$$

S'il est prouvé que la suite de déplacements (u_n^i) converge, sa limite est la solution du problème $R(u) = 0$.

Pour un maillage fixé et une loi de chargement donnée (suite de vecteurs P^n dont les accroissements sont compatibles avec la réalité de l'ouvrage), le processus itératif de résolution d'un problème de comportement non linéaire prend une forme simple (fig. 1).

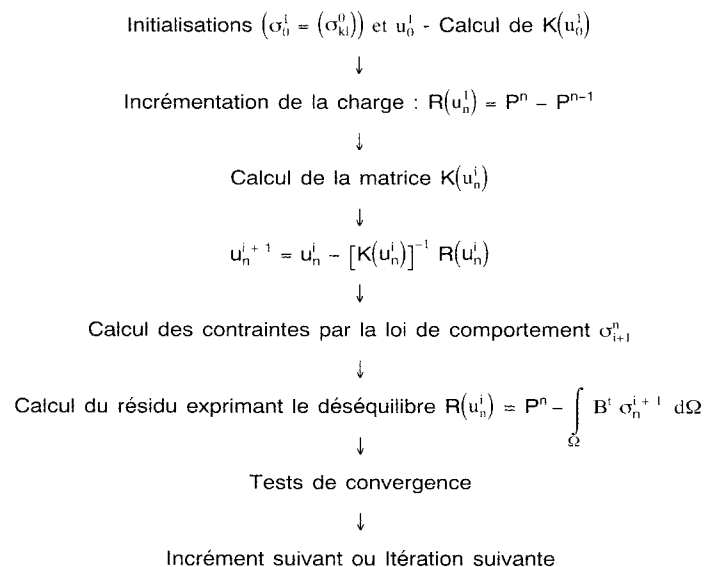


Fig. 1 - Algorithme de résolution en comportement non linéaire. (B représente la matrice des dérivées des fonctions d'interpolation ; σ_n^{i+1} , le tenseur des contraintes à l'itération $i + 1$ de l'incrément n et Ω , le maillage).

Au cours d'une itération, la loi de comportement intervient directement à deux niveaux dans l'algorithme de résolution :

- d'une part, au niveau de la construction de la matrice de rigidité K_i ,
- d'autre part, au niveau du calcul du champ de contraintes en chaque point matériel.

Seul l'incrément de charge a un sens physique ; en revanche, les itérations n'en ont aucun puisque les résultats ne vérifient pas simultanément l'équilibre et la loi de comportement.

Méthodes de calcul des matrices tangentes

Le calcul exact de la matrice tangente à une itération quelconque est rarement possible, car il

faut estimer toutes les dérivées partielles du vecteur résidu par rapport au champ de déplacement (u_i^n). Autrement dit, en supposant que le domaine Ω ne varie pas avec le champ de déplacement (hypothèse des petites transformations), l'expression suivante, écrite sous une forme symbolique, doit être calculée :

$$\frac{\partial R}{\partial u}(u) = - \int_{\Omega} B^t \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u} \right] d\Omega = - \int_{\Omega} B^t \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right] B d\Omega$$

Toute la difficulté concerne le calcul du tenseur de composantes $\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right)$. Devant l'impossibilité d'un calcul correct, la plupart des numériciens ont longtemps admis de confondre ce tenseur avec le tenseur de comportement (E_{ijkl}) reliant les déformations et les contraintes incrémentales :

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\sigma_{mn})d\varepsilon_{kl}$$

Toutefois, depuis quelques années, des techniques nouvelles permettent de calculer approximativement le tenseur $\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right)$ par un développement au second ordre (Simo et Taylor, 1985).

Ces difficultés, ces approximations successives et le coût de calcul d'une matrice à chaque itération (assemblage et triangularisation) ont amené un certain nombre d'auteurs à rechercher le moyen de réduire fortement les temps de calcul. On choisit, ainsi fréquemment, de conserver, pendant toutes les itérations, la matrice de rigidité calculée lors de l'étape initiale. Cette méthode est appelée méthode de Newton-Raphson « modifiée » ou encore méthode des contraintes initiales ; sa simplicité et sa robustesse font que cette méthode est la plus couramment utilisée dans les gros codes de calcul actuels, même si les temps de calcul demeurent importants.

Méthodes d'accélération de la convergence

Afin de rendre les calculs en comportement non linéaire plus rapides et moins onéreux, des méthodes d'accélération de la convergence ont été développées. Deux types de méthode existent :

- les méthodes fondées sur des considérations énergétiques (méthode sécante et méthode dite « line search », voir, par exemple, Mestat, 1993a) ;
- les méthodes dites d'actualisation qui consistent à remplacer le calcul coûteux de la matrice de rigidité tangente par une approximation simple et économique.

Parmi les méthodes d'actualisation, on peut citer les méthodes B-F-G-S (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) et D-F-P (Davidon-Fletcher-Powell), (Broyden, 1965 ; Powell, 1970 ; Dennis et Moré, 1977 ; Crisfield, 1983 ; Humbert et Mestat, 1988 ; Mestat, 1993a).

Ces méthodes permettent des gains de temps considérables (Humbert et Mestat, 1988), mais elles ne sont véritablement efficaces et fiables que pour des matrices de rigidité symétriques, c'est-à-dire lorsque le tenseur de comportement (E_{ijkl}) est lui-même symétrique. De plus, ces méthodes sont très sensibles à la moindre erreur dans l'estimation du vecteur résidu, et donc à toute erreur provenant du schéma d'intégration locale de la loi de comportement. En conséquence, il est important lorsqu'une telle méthode est mise en œuvre de vérifier avec soin le bon déroulement du processus de résolution et la cohérence de la solution, afin d'éviter l'obtention de solutions inacceptables.

Note. Dans le module de résolution MCNL (Mécanique en Comportement Non Linéaire) de CÉSAR-LCPC, c'est la méthode D-F-P (Davidon-Fletcher-Powell) qui est proposée aux utilisateurs, lorsque les lois de comportement considérées conduisent à des matrices de comportement symétriques.

Mesures de la convergence du processus itératif de résolution

Critères de convergence usuels

Le processus itératif conduit à la résolution d'un système de la forme suivante :

$$\Delta u_{n+1}^{i+1} = u_{n+1}^{i+1} - u_{n+1}^i = - [K_i]^{-1} R(u_{n+1}^i)$$

où $R(u_{n+1}^i)$ représente le vecteur des forces résiduelles à l'itération i , qui exprime la différence entre les forces appliquées et les efforts internes dus aux contraintes. Le vecteur u_{n+1}^i représente les déplacements à l'itération i de l'incrément $n+1$ et la matrice $[K_i]$, la matrice de rigidité calculée au même instant ou non, selon le type d'algorithme considéré (méthodes de Newton-Raphson modifiées ou non).

À chaque itération, le calcul d'un vecteur résidu non nul atteste de l'existence de contraintes incompatibles avec le chargement appliqué. Le processus itératif a alors pour but de réduire la norme du vecteur résidu à un niveau raisonnable et de faire converger la suite (u_{n+1}^i) ; sa limite est solution du problème pour l'incrément de chargement $n+1$. La convergence de la suite est appréciée par rapport à trois tests qui portent respectivement sur les forces résiduelles, les dépla-

cements et le travail au cours d'une itération (tableau I).

TABLEAU I
Critères de convergence usuels
pour le processus itératif

Test	Expression du test	Tolérance à fournir
Sur les forces résiduelles	$\frac{\ R(u_{n+1}^i)\ }{\ \Delta P_{n+1}\ }$ ou $\frac{\ R(u_{n+1}^i)\ }{\ P_0 + \Delta P_{n+1}\ }$	Tolérance conseillée 0,1 %, à la rigueur 1 %, pour le premier test qui devient sévère, lorsque $\ \Delta P_{n+1}\ $ est faible. Pour le second test, tolérance conseillée 0,1 %
Sur les déplacements	$\frac{\ u_{n+1}^{i+1} - u_{n+1}^i\ }{\ u_{n+1}^i\ }$	Tolérance conseillée 0,1 %
Sur le travail au cours d'une itération	$\frac{ R(u_{n+1}^i) \cdot (u_{n+1}^{i+1} - u_{n+1}^i) }{ \Delta P_{n+1} \cdot u_{n+1}^i }$	Tolérance conseillée 10^{-9}
Où $\ \cdot\ $ désigne la norme euclidienne ($\ x\ = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$) et ΔP_{n+1} est l'accroissement du chargement appliqué à l'incrément $n + 1$.		

Notion de taux de convergence

La satisfaction des tests de convergence (tableau I) prouve que la suite (Δu_{n+1}^i) tend vers zéro, mais cela ne signifie pas que la convergence de la suite (u_{n+1}^i) , ou de la série associée (Δu_{n+1}^i) , a été démontrée. Il s'agit alors seulement de conditions nécessaires. Il convient donc d'être prudent avant de conclure et il est fortement conseillé de calculer, en plus des tests de convergence, le taux de convergence (q_i) défini par le rapport :

$$q_i = \frac{\|\Delta u_{n+1}^i\|}{\|\Delta u_{n+1}^{i-1}\|}$$

Avec cette définition, il est évident que, pour deux indices d'itération i et $i + k$ quelconques, la relation suivante est vérifiée :

$$\|\Delta u_{n+1}^{i+k}\| = \prod_{j=1}^k q_{i+j} \|\Delta u_{n+1}^i\|$$

Par ailleurs, si l'on peut démontrer que la suite des taux (q_i) est monotone décroissante, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|\Delta u_{n+1}^{i+k}\| \leq (q_{i+1})^k \|\Delta u_{n+1}^i\|$$

Alors, la relation évidente $u_{n+1}^{i+k} - u_{n+1}^i = \sum_{j=1}^k \Delta u_{n+1}^{i+j}$

et l'utilisation de l'inégalité triangulaire (propriété d'une norme) permettent d'aboutir aux inégalités suivantes :

$$\|u_{n+1}^{i+k} - u_{n+1}^i\| \leq \sum_{j=1}^k \|\Delta u_{n+1}^{i+j}\| \leq$$

$$\text{et } \sum_{j=1}^{j=k} (q_i)^j \|\Delta u_{n+1}^i\| \leq \frac{q_i (1 - (q_i)^k)}{1 - q_i} \|\Delta u_{n+1}^i\|$$

Si, de plus, il a pu être établi, en analysant l'évolution des termes (q_i) , que cette suite est décroissante et que chaque terme est strictement inférieur à 1, ou qu'à partir de quelques itérations, cette suite est majorée par un nombre strictement plus petit que 1, l'inégalité suivante est également vérifiée :

$$\|u_{n+1}^{i+k} - u_{n+1}^i\| \leq \frac{q_i}{1 - q_i} \|\Delta u_{n+1}^i\|$$

Cette inégalité prouve l'absolue convergence de la suite (u_{n+1}^i) . Par ailleurs, si on fait tendre k vers l'infini et si on note u_{n+1} la limite de la suite (u_{n+1}^i) , l'inégalité précédente fournit une estimation de l'erreur commise en arrêtant le processus à l'itération i :

$$\|u_{n+1} - u_{n+1}^i\| \leq \frac{q_i}{1 - q_i} \|\Delta u_{n+1}^i\|$$

Pour chaque incrément, l'étude de la décroissance de la suite (q_i) au cours du processus permet de s'assurer de la bonne convergence de la suite des déplacements (u_{n+1}^i) . La limite de cette suite (u_{n+1}) constitue alors une valeur approchée de la solution exacte du problème théorique pour le chargement appliqué à l'instant $n + 1$. Le degré de cette approximation dépend de la finesse du maillage. Si l'on souhaite affiner la solution, il faut recourir à des maillages plus fins et étudier la convergence au sens du maillage.

Mesure de l'erreur relative par rapport à la solution exacte

La définition du taux de convergence permet aussi d'apprécier, pour un maillage donné, l'erreur relative commise sur la limite de la suite des déplacements (Winget et Hughes, 1985). Cette erreur relative est définie par la quantité :

$$\frac{\|u_{n+1} - u_{n+1}^i\|}{\|u_{n+1}\|}$$

En appliquant à la relation $u_{n+1}^{i+k} - u_{n+1}^i = \sum_{j=1}^k \Delta u_{n+1}^{i+j}$

la propriété de l'inégalité triangulaire, on obtient les inéquations :

$$\|u_{n+1}^{i+k}\| + \sum_{j=1}^{j=k} \|\Delta u_{n+1}^{i+j}\| \geq \|u_{n+1}^i\|$$

et donc

$$\|u_{n+1}^{i+k}\| \geq \|u_{n+1}^i\| - \sum_{j=1}^{j=k} \|\Delta u_{n+1}^{i+j}\|$$

Si, de plus, on a pu démontrer que la suite des taux de convergence est monotone, décroissante

et strictement majorée par 1, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|u_{n+1}^{i+k}\| \geq \|u_{n+1}^i\| - \frac{q_i(1 - (q_i)^k)}{1 - q_i} \|\Delta u_{n+1}^i\|$$

Alors, si on fait tendre k vers l'infini, c'est une borne inférieure de la norme de la solution convergée qui apparaît :

$$\|u_{n+1}\| \geq \|u_{n+1}^i\| - \frac{q_i}{1 - q_i} \|\Delta u_{n+1}^i\|$$

Enfin, si le minorant de cette dernière inégalité est positif, il est possible d'obtenir un majorant de l'erreur relative commise en arrêtant le processus de résolution à une itération i donnée :

$$\begin{aligned} \frac{\|u_{n+1} - u_{n+1}^i\|}{\|u_{n+1}\|} &\leq \frac{\|u_{n+1} - u_{n+1}^i\|}{\|u_{n+1}^i\| - \frac{q_i}{1 - q_i} \|\Delta u_{n+1}^i\|} \\ &\leq \frac{\frac{q_i}{1 - q_i} \|\Delta u_{n+1}^i\|}{\|u_{n+1}^i\| - \frac{q_i}{1 - q_i} \|\Delta u_{n+1}^i\|} \end{aligned}$$

Note. Le module MCNL (Mécanique en Comportement Non Linéaire) de CÉSAR-LCPC fournit, à la demande, toutes ces indications dans le fichier d'impression des résultats. L'utilisateur dispose ainsi des informations lui permettant de juger le déroulement du processus de résolution.

Analyse pratique des informations liées au processus itératif et des résultats

S'il est relativement facile de conclure à une convergence, ou à une divergence évidente, en analysant la suite des quantités caractérisant le processus itératif, il n'en est pas de même lorsque ces informations n'indiquent plus de tendance nette. Il est alors difficile de conclure entre une tendance à la divergence et une tendance à une convergence très lente (tableau II).

Pour émettre un jugement « définitif », il faut compléter les informations concernant la convergence par l'exploitation des résultats obtenus à la fin des itérations demandées (déplacements, contraintes, etc.). Les postprocesseurs récents offrent ainsi de nombreuses possibilités pour représenter les résultats sous diverses formes (carte d'isovaleurs, courbes de variation, coupes, animation, etc.) afin d'aider aux vérifications essentielles qui concernent :

- les dimensions du maillage. Elles doivent être suffisantes pour décrire correctement les mécanismes de déformation. En particulier, il faut vérifier que, loin de l'application des sollicitations, l'état des contraintes initiales est peu perturbé ;
- le respect des conditions aux limites imposées et des conditions de symétrie ;
- la cohérence globale des résultats (par exemple, une compression entraîne un tassement où toute excavation a tendance à se refermer). Le

suivi de quelques nœuds caractéristiques (centre de la fondation, clé et radier pour un tunnel, tête de la palplanche ou de la paroi, centre de la base du remblai) permet de construire des courbes de type charge-tassement. Leur allure (régularité, courbure, tendance vers une asymptote) est un indicateur intéressant pour une étude de stabilité ;

- la stabilité du schéma de résolution au cours du temps (consolidation des sols, viscoplasticité) ;
- la continuité des déplacements, des vecteurs-contraintes, des réactions et de certaines composantes des tenseurs des contraintes et des déformations. En particulier, les contraintes normales doivent être quasiment nulles sur un bord libre, ou négligeables devant la contrainte maximale repérée dans le modèle ;

➤ l'ordre de grandeur des résultats (déplacements, pressions interstitielles, contraintes, efforts, moments) et l'analyse des concentrations de contraintes ;

➤ les isovaleurs de déformations plastiques. Celles-ci constituent le meilleur indicateur quant à la formation d'un mécanisme de rupture dans le maillage (concentration et intensité des déformations plastiques par rapport aux valeurs constatées sur les courbes triaxiales). Cette représentation permet également de comparer les zones concernées avec des mécanismes de rupture connus ou utilisés dans les calculs traditionnels ;

- la vérification de la carte des critères de plasticité sur l'ensemble du maillage ;
- le comportement aux interfaces (justification des décollements, calcul du frottement latéral, vérification du critère de Coulomb, etc.) ;
- l'estimation *a posteriori* des erreurs de calcul.

TABLEAU II
Résultats des tests de convergence et diagnostic

Diagnostic	Résultats des tests de convergence
Convergence	Les tests sont satisfaits. La suite (q_i) est monotone décroissante et tend vers une limite inférieure à 1. Lorsque la zone plastique devient importante, sans toutefois menacer la stabilité de l'ouvrage, la suite (q_i) se stabilise fréquemment autour de valeurs comprises entre 0,8 et 0,99 ; ce qui suffit à assurer l'absolue convergence de la série pour la méthode des contraintes initiales. Des valeurs plus faibles sont généralement observées avec la méthode tangente. Dans le cas des accélérateurs de la convergence, la suite des taux est souvent globalement décroissante, car le principe des accélérateurs consiste à obtenir au début d'un incrément des accroissements de déplacements relativement importants entre deux itérations successives.
Non-convergence	La norme des forces résiduelles décroît très lentement, le nombre d'itérations devient très important ou la suite des taux présente des valeurs très proches de l'unité. Il est alors difficile de conclure et il vaut mieux recommencer le calcul avec un incrément de chargement plus faible.
Divergence	La norme des forces résiduelles ne tend pas vers zéro et la suite des taux oscille autour de la valeur unité.

C'est en analysant l'ensemble de ces résultats que l'on peut « conclure » quant à une bonne convergence générale et à un maillage suffisamment fin. Il est également fondamental que l'utilisateur examine les résultats en tenant compte de la spécificité de l'ouvrage étudié. Pour illustrer ce propos, B. Simpson a donné l'exemple suivant : l'analyse de la distribution de la pression des terres derrière un mur de soutènement peut indiquer des erreurs qu'une analyse du champ de déplacements ou des moments fléchissants ne saurait pas mettre en évidence (Crilly, 1993). Il existe ainsi des vérifications spécifiques par types d'ouvrage.

Étude de la stabilité d'un ouvrage et convergence au sens du chargement

Un calcul incrémental par éléments finis de type déplacements permet d'étudier la stabilité des ouvrages et de déceler l'amorce d'un mécanisme de rupture. En pratique, la stabilité d'un ouvrage est analysée à l'aide d'une succession d'accroissements de chargement. Les approches suivantes sont les plus utilisées :

- forces ou pressions imposées (fondations superficielles ou profondes) ;
- déplacements ou rotations imposés (fondations superficielles) ;
- activation de couches de sol (remblaiement) ou désactivation (excavation devant un soutènement ou pour un ouvrage souterrain).

Une quatrième approche est quelquefois employée : elle consiste à réaliser une succession de calculs au cours desquels les paramètres de résistance des sols sont progressivement réduits.

D'une manière générale, l'étude des résultats d'un modèle d'éléments finis en termes d'analyse de stabilité doit être à la fois globale (au niveau du maillage) et locale (suivi de points caractéristiques au cours du processus incrémental). Les principaux indicateurs ou critères annonciateurs de la formation d'une zone de rupture dans le maillage sont les suivants :

- l'allure des courbes chargement-tassement en quelques points caractéristiques. Leur analyse constitue la méthode la plus convaincante pour mettre en évidence l'amorce de la rupture du massif de sol et estimer une charge limite ;
- les difficultés de convergence du processus itératif (augmentation soudaine du nombre d'ité-

rations, décroissance lente de la norme des forces résiduelles). Il en est de même *a fortiori* pour la divergence du processus :

- les mouvements excessifs dans certaines zones du massif de sol sans augmentation significative des contraintes ;
- le développement soudain des zones plastiques dans le maillage ;
- la visualisation des isovaleurs de déformations plastiques ou de déformations de cisaillement. Une comparaison avec les déformations à la rupture déduites des essais triaxiaux permet d'estimer les zones réellement en rupture ;
- les efforts de traction mobilisés dans les renforcements qui, comparés avec les seuils de résistance, indiquent ou non une cassure.

L'ensemble des nœuds du maillage, où les seuils en déformations sont dépassés, constitue une zone de rupture, qui s'étend au cours du calcul jusqu'à ce que le processus itératif ne converge plus pour un certain chargement. Cette zone fournit une indication sur la forme du mécanisme de rupture. Lorsque la divergence apparaît nettement, le chargement appliqué n'est plus supportable par le milieu étudié. Cette approche a conduit à de bons résultats pour des problèmes dont des solutions théoriques sont connues (expansion d'une cavité, capacité portante des fondations ou stabilité des fouilles verticales) et les formes de mécanismes obtenues sont proches des surfaces de glissement théoriques (Mestat, 1993a, 1993b et 1994).

Exemples d'études de la convergence pour des ouvrages de géotechnique

Exemple simple : expansion d'une cavité cylindrique

L'expansion d'un « tube épais » cylindrique infiniment long, soumis à une pression interne uniforme P , est un exemple simple pour valider les algorithmes de résolution, car on connaît la solution analytique de ce problème lorsque le matériau est élastoplastique (critère de Tresca ou de Mohr-Coulomb) (fig. 2).

Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont les suivantes :

$$R_1 = 1 \text{ m} ; R_2 = 10 \text{ m} ; E = 10 \text{ MPa} ; \nu = 0,33 ; c = 600 \text{ kPa} ; \varphi = \psi = 0^\circ.$$

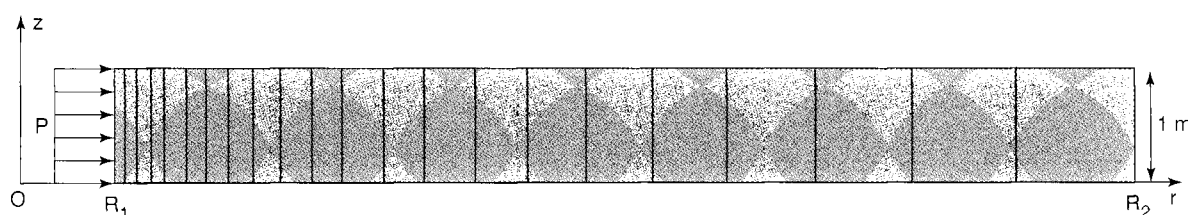


Fig. 2 - Dimensions et maillage du tube épais (113 nœuds et 22 quadrangles à 8 nœuds).

La solution analytique du problème mécanique pour le critère de Tresca est donnée dans le tableau III en fonction du rayon plastique R_p . À cause de la symétrie radiale et du chargement appliqué, les contraintes et le déplacement sont supposés ne dépendre que du rayon r .

La pression limite est donnée par la relation :

$$P_{\text{limite}} = 2c \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right), \text{ soit } 2\,763,1 \text{ kPa. Il est alors}$$

facile de considérer deux cas extrêmes :

- ❶ l'application d'une pression très inférieure à la pression limite ($P = 1\,100 \text{ kPa}$),
- ❷ l'application d'une pression très supérieure à la pression limite ($P = 4\,000 \text{ kPa}$).

Pour ces deux calculs, les quantités significatives du processus itératif sont regroupées dans les tableaux IV et V. La méthode de résolution de type contraintes initiales est utilisée et la pression uniforme est appliquée en un seul incrément.

■ Dans le premier cas, la convergence de la suite des déplacements est obtenue au bout de seize itérations pour une tolérance demandée de 0,1 % sur les trois tests. La décroissance régulière de la norme des forces résiduelles témoigne du bon déroulement du processus itératif et que la suite des accroissements de déplacements tend vers zéro. De plus, après quelques oscillations initiales, la suite des taux de convergence devient monotone décroissante à partir de la cinquième itération et elle se stabilise dès la quatorzième itération. Des calculs complémentaires avec une tolérance égale à 10^{-6} confirme cette stabilité à la valeur 0,69598. Cette constatation prouve « numériquement » que la suite des déplacements a bien convergé pour la modélisation considérée.

Par ailleurs, on a relevé la valeur de la norme du dernier accroissement de déplacements ($\|\Delta u_1^{16}\| = 0,30177 \cdot 10^{-7}$) et celle du déplacement ($\|u_1^{16}\| = 0,10012 \cdot 10^{-2}$), où l'indice 1 correspond au numéro de l'incrément de chargement et l'exposant 16 à la seizième itération. Les erreurs absolue et relative commises sur la solution convergée sont respectivement majorées par les quantités suivantes :

$$\|u_1 - u_1^{16}\| \leq \frac{0,69598}{1 - 0,69598} 0,30177 \cdot 10^{-7}, \text{ soit}$$

$$\|u_1 - u_1^{16}\| \leq 0,69083 \cdot 10^{-7}$$

$$\frac{\|u_1 - u_1^{16}\|}{\|u_1\|} \leq \frac{0,69083 \cdot 10^{-7}}{0,10012 \cdot 10^{-2} - 0,69083 \cdot 10^{-7}} \text{ soit}$$

$$\frac{\|u_1 - u_1^{16}\|}{\|u_1\|} \leq 0,69005 \cdot 10^{-4}$$

Ces erreurs sont très faibles et montrent que la solution convergée obtenue est très satisfaisante. Une comparaison directe avec la solution analytique le confirme également.

■ Dans le cas d'une pression très supérieure à la pression limite théorique, les quantités significatives présentent des évolutions perturbées : les normes des forces résiduelles commencent par décroître doucement, puis se stabilisent et restent constantes après l'itération numéro 55 ($\frac{\|R(u_1^i)\|}{\|\Delta F_1\|} = 0,31391$). Cette indication prouve que la suite des accroissements de déplacements (Δu_1^i) ne tend pas vers zéro, donc que la suite (u_1^i) est divergente. Par ailleurs, la suite des taux de convergence oscille quelque peu, mais montre une tendance générale à la croissance (tableau V) et ses termes dépassent l'unité après l'itération numéro 53.

En outre, l'application d'une succession de chargements permet d'étudier la stabilité du tube épais et d'estimer une pression limite. On cherche ainsi les valeurs de deux pressions :

- d'une part, la plus grande pression pour laquelle une convergence est encore obtenue,
- d'autre part, la plus petite pression qui provoque une divergence nette (la norme des forces résiduelles ne tend pas zéro).

Dans l'exemple considéré, on aboutit facilement à l'encadrement suivant (en trente-six incréments décrits dans le tableau VI) :

$$2\,763,2 \text{ kPa} \leq P_{\text{limite}} \leq 2\,763,3 \text{ kPa}$$

soit une erreur de l'ordre de 0,0036 % par rapport à la solution théorique ($P_{\text{limite}} = 2\,763,1 \text{ kPa}$).

La figure 3 représente la courbe ($u(R_1), P$) qui met en évidence la pression limite. Dans ce cas particulier, on ne peut parler d'asymptote au sens habituel, car le déplacement radial est limité physiquement et le rayon plastique ne peut dépasser le rayon externe du tube. Le déplacement théorique correspondant à la pression limite vaut 0,010568 m ; cette valeur est très proche de la valeur numérique autour de laquelle les points convergés ont tendance à se resserrer lorsque la pression se rapproche de la pression limite (fig. 3).

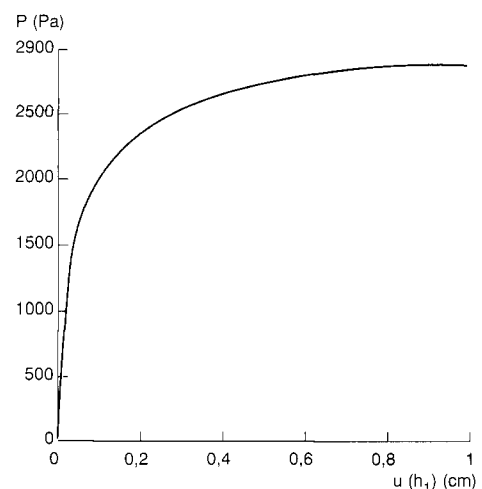


Fig. 3 - Courbe du déplacement à l'intrados en fonction de la pression appliquée.

TABLEAU III
Solution de l'expansion dans une cavité cylindrique pour le critère de Tresca

Comportement	Expressions des contraintes et du déplacement radial
Zone plastique $R_1 \leq r \leq R_p$	$\sigma_{rr}(r) = -P + 2c \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$; $\sigma_{\theta\theta}(r) = -P + 2c + 2c \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$; $\sigma_{zz}(r) = \nu(\sigma_{rr}(r) + \sigma_{\theta\theta}(r))$; $u(r) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \left(-Pr + 2c r \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)\right) + 2\left(\frac{1-\nu^2}{E}\right) \frac{cR_p^2}{r}$ avec $P = 2c \ln\left(\frac{R_p}{R_1}\right) + c\left(1 - \frac{R_p^2}{R_2^2}\right)$
Zone élastique $R_p \leq r \leq R_2$	$\sigma_{rr}(r) = \frac{cR_p^2}{R_2^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right)$; $\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{cR_p^2}{R_2^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right)$; $\sigma_{zz}(r) = \nu(\sigma_{rr}(r) + \sigma_{\theta\theta}(r))$; $u(r) = \left(\frac{1+\nu}{E}\right) \frac{cR_p^2}{R_2^2} \left((1-2\nu)r + \frac{R_2^2}{r}\right)$

R_p est le rayon plastique correspondant à la pression uniforme appliquée

TABLEAU IV
Liste des tests de convergence pour un calcul qui converge (P = 1 100 kPa)

Numéro d'itération	Tolérance sur les déplacements	Tolérance sur les résidus	Tolérance sur les travaux	Taux de convergence
1	0,00000	0,48763	0,00000	1,00000
2	0,94413.10 ⁻¹	0,23612	0,11974.10 ⁻¹	0,10420
3	0,56603.10 ⁻¹	0,13179	0,42408.10 ⁻²	0,63531
4	0,35411.10 ⁻¹	0,76725.10 ⁻¹	0,16819.10 ⁻²	0,64846
5	0,23077.10 ⁻¹	0,49995.10 ⁻¹	0,71186.10 ⁻³	0,66700
6	0,15087.10 ⁻¹	0,32152.10 ⁻¹	0,30919.10 ⁻³	0,66376
7	0,10081.10 ⁻¹	0,22664.10 ⁻¹	0,14067.10 ⁻³	0,67493
8	0,70082.10 ⁻²	0,16508.10 ⁻¹	0,67200.10 ⁻⁴	0,70009
9	0,48644.10 ⁻²	0,11729.10 ⁻¹	0,32349.10 ⁻⁴	0,69748
10	0,33768.10 ⁻²	0,82285.10 ⁻²	0,15609.10 ⁻⁴	0,69653
11	0,23454.10 ⁻²	0,57439.10 ⁻²	0,75409.10 ⁻⁵	0,69618
12	0,16598.10 ⁻²	0,40020.10 ⁻²	0,36461.10 ⁻⁵	0,69605
13	0,11331.10 ⁻²	0,27864.10 ⁻²	0,17639.10 ⁻⁵	0,69601
14	0,78801.10 ⁻³	0,19396.10 ⁻²	0,85367.10 ⁻⁶	0,69599
15	0,54814.10 ⁻³	0,13500.10 ⁻²	0,41326.10 ⁻⁶	0,69598
16	0,38135.10 ⁻³	0,93956.10 ⁻³	0,20009.10 ⁻⁶	0,69598

TABLEAU V
Liste des tests de convergence pour un calcul qui diverge (P = 4 000 kPa)

Numéro d'itération	Tolérance sur les déplacements	Tolérance sur les résidus	Tolérance sur les travaux	Taux de convergence
1	0,00000	0,86890	0,00000	1,00000
2	0,33868	0,66152	0,19906	0,51125
3	0,24236	0,57285	0,12611	0,94413
4	0,18810	0,52567	0,90619.10 ⁻¹	0,95580
5	0,15312	0,49832	0,69844.10 ⁻¹	0,96108
6	0,12893	0,46984	0,56370.10 ⁻¹	0,96667
7	0,11128	0,45544	0,46963.10 ⁻¹	0,97108
8	0,97731.10 ⁻¹	0,43727	0,40055.10 ⁻¹	0,97338
9	0,87173.10 ⁻¹	0,43212	0,34803.10 ⁻¹	0,97713
10	0,78594.10 ⁻¹	0,41471	0,30681.10 ⁻¹	0,97847

Seules les dix premières itérations sont considérées

TABLEAU VI
Loi de chargement pour la recherche de la pression limite d'un tube épais (kPa)

100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000	1 100	1 200
1 300	1 400	1 500	1 600	1 700	1 800	1 900	2 000	2 100	2 200	2 300	2 400
2 500	2 600	2 700	2 750	2 755	2 760	2 761	2 762	2 763	2 763,05	2 763,1	2 763,2

Étude de la stabilité d'une fondation superficielle circulaire

Les fondations superficielles isolées, posées sur un massif de sol homogène à surface horizontale, constituent des exemples simples pour la validation des codes de calcul par éléments finis. En effet, on dispose de solutions exactes concernant la charge limite ou de bornes supérieures et inférieures pour quelques problèmes particuliers. Plusieurs publications ont ainsi comparé des résultats de calcul par éléments finis de type déplacements avec les résultats de l'analyse limite (voir, par exemple, de Borst et Vermeer, 1984 ; Griffiths, 1982 ; Mestat, 1993b et 1994).

Pour illustrer les notions de convergence au sens du chargement et au sens du maillage ainsi que la forte interaction qui existe entre ces deux notions, considérons le cas d'une fondation souple, circulaire et posée sur un sol homogène caractérisé par un critère de Tresca (cohésion non drainé c_u). La fondation est représentée par une pression uniforme perpendiculaire, appliquée sur un disque de diamètre B (fig. 4). Cette pression est augmentée jusqu'à ce qu'une divergence nette apparaisse.

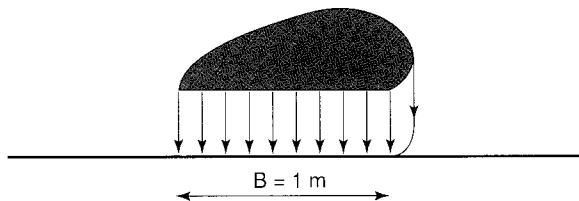


Fig. 4 - Fondation souple, circulaire et isolée sur un massif de sol (critère de Tresca).

Si le massif de sol est supposé non pesant, la charge admissible par le sol est donnée par l'expression (Shield, 1955) :

$$P_{\text{limite}} = 5,69 c_u$$

Pour l'application numérique, on retient les caractéristiques mécaniques suivantes : $E = 50\,000$ kPa ; $\nu = 0,33$ et $c_u = 20$ kPa.

Deux calculs ont été réalisés :

- l'un avec un maillage grossier, comportant trente quadrangles à huit nœuds et 113 nœuds (fig. 5a). La loi de chargement est appliquée en dix-neuf incréments (tableau VII) ;
- l'autre avec un maillage plus fin, constitué de soixante-dix-sept quadrangles à huit nœuds et 268 nœuds (fig. 5b). La loi de chargement comprend dix-sept incréments (tableau VIII).

La méthode de résolution utilisée est la méthode d'accélération D-F-P et la tolérance demandée sur les tests de convergence est fixée à 0,1 %.

Les résultats numériques conduisent à encadrer la pression limite entre deux valeurs :

- la valeur inférieure correspond à la plus grande pression, parmi les termes de la loi de chargement, pour laquelle une convergence est obtenue,
- la valeur supérieure est relative à la plus petite pression pour laquelle une divergence nette apparaît.

La détermination des valeurs inférieures ne pose pas de problème particulier : on obtient 136 kPa pour le maillage grossier et 117 kPa pour le maillage fin. Les tests de convergence sont satisfaits avec la précision demandée. En revanche, l'évolution de la suite des taux (q_i) est perturbée par l'utilisation de la méthode d'accélération de la convergence. En effet, celle-ci conduit à des accroissements de déplacements importants pour certaines itérations et les taux peuvent varier rapidement dans un sens ou dans l'autre d'une itération à la suivante. Néanmoins, l'examen des termes montre qu'ils décroissent globalement et qu'ils restent inférieurs à l'unité.

Pour les pressions immédiatement supérieures dans la loi de chargement (respectivement 137 kPa et 118 kPa), la norme des forces résiduelles oscille entre des valeurs faibles et d'autres plus fortes avec une certaine régularité. Il en est de même à une échelle moindre pour les tests sur les déplacements. La suite des taux de convergence est cette fois particulièrement erratique avec beaucoup de valeurs supérieures à l'unité. Tous ces facteurs indiquent une forte présomption de divergence, mais la preuve manque (si tant est qu'il y en ait une). En revanche, si on effectue un saut dans la loi de chargement et qu'on remplace les pressions précédentes (137 kPa et 118 kPa) par des pressions égales à 140 kPa et 119 kPa, une divergence nette apparaît et la norme des forces résiduelles ne présente aucune tendance à converger vers zéro.

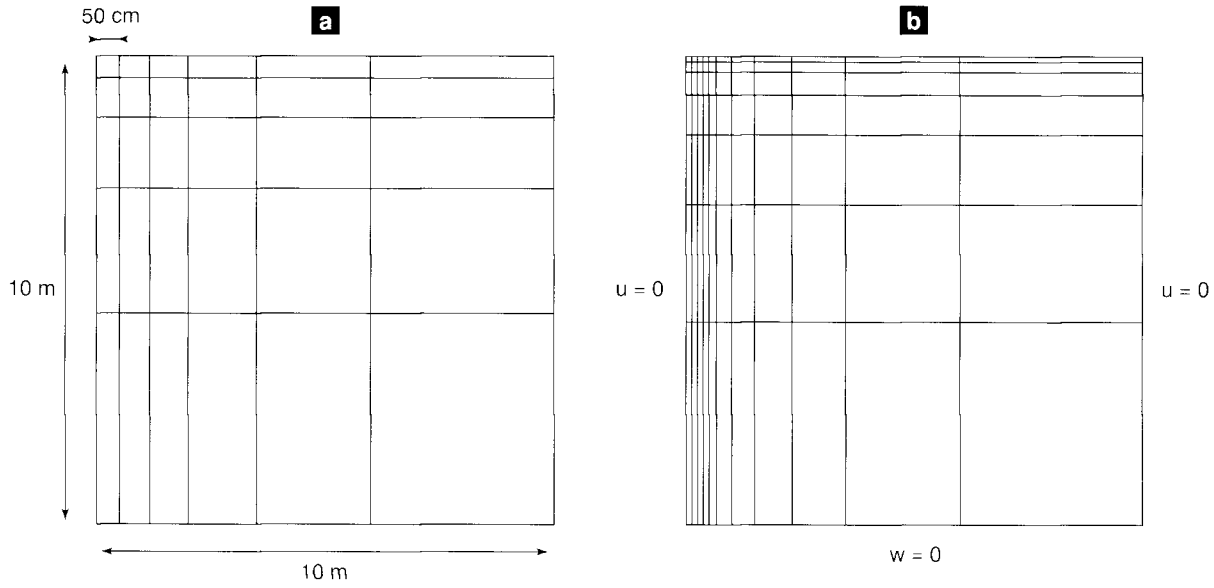
Finalement, les encadrements recherchés sont les suivants :

- pour le maillage grossier : $136 \text{ kPa} \leq P_{\text{limite}} \leq 140 \text{ kPa}$;
- pour le maillage plus fin : $117 \text{ kPa} \leq P_{\text{limite}} \leq 119 \text{ kPa}$.

En assimilant les majorants aux pressions limites calculées, les erreurs relatives par rapport à la solution théorique (113,8 kPa) sont de l'ordre de 23 % pour le maillage grossier et de 4,5 % pour le maillage plus fin. Cette dernière erreur relative est généralement jugée satisfaisante.

La figure 6 représente la courbe du déplacement vertical au centre de la fondation en fonction de la pression appliquée pour les maillages grossier et fin.

Fig. 5 - Maillages de la fondation circulaire en symétrie de révolution



a. Maillage grossier - b. Maillage plus fin.

TABLEAU VII
Loi de chargement pour la recherche de la pression limite (maillage grossier)

10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	105	110
115	120	125	130	135	136	137					

TABLEAU VIII
Loi de chargement pour la recherche de la pression limite (maillage fin)

10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	105	110
112	114	116	117	118							

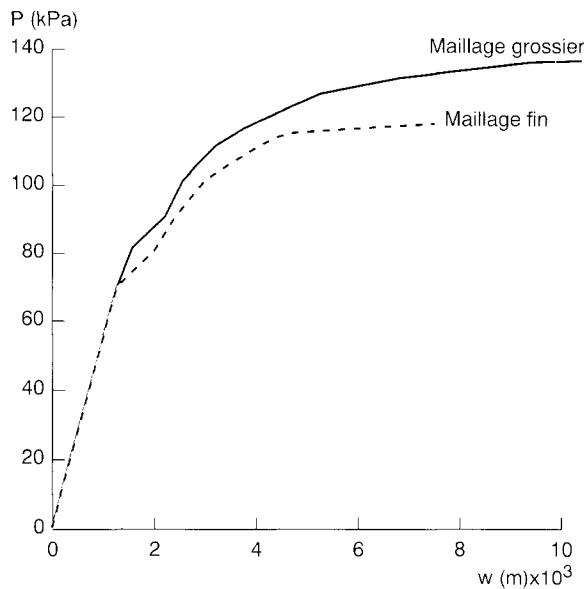


Fig. 6 -
Tassement de la fon-
dation en fonction de
la pression appliquée.

La figure 6 montre qu'il existe une légère oscillation à la fin de la partie linéaire de la courbe (w , P), correspondant à une pression égale à 80 kPa. Puis, lorsque la pression augmente et que la plasticité se développe, cette oscillation disparaît et la courbe tend d'une manière régulière vers son asymptote horizontale (valeur de la pression limite). Cette oscillation est d'origine numérique, et elle disparaît si l'on considère une discrétisation plus fine du chargement. La figure 7 illustre cette remarque dans le cas du maillage grossier : un nouveau calcul a été réalisé en introduisant trois incréments supplémentaires entre les pressions 70 et 80 kPa.

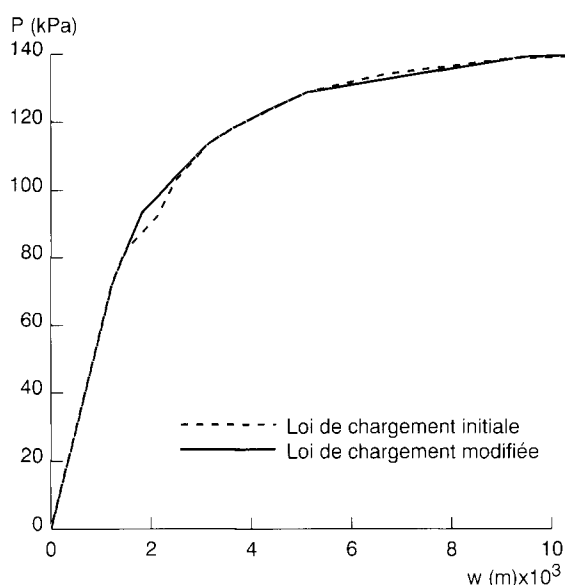


Fig. 7 - Effet de l'introduction de trois incréments de pression supplémentaires.

Cette remarque démontre qu'il n'est pas toujours évident de constituer une loi de chargement *a priori* pour étudier la stabilité d'un ouvrage, même dans le cas simple d'un chargement monotone croissant. Des procédures de découpage automatique du chargement peuvent être envisagées, à condition qu'elles soient capables de mettre en évidence ce type d'oscillations et d'adapter la loi de chargement sans augmenter de manière importante la durée de calcul.

Étude de la convergence pour des modélisations en plusieurs étapes

Séquences de construction et vérifications des calculs

Dans le cas d'une modélisation en plusieurs phases enchaînées (représentant différentes étapes de construction), il est impératif de contrôler le bon déroulement du processus itératif pour le calcul n avant de lancer le calcul $n + 1$, qui est effectué en utilisant les résultats

« convergés » précédents. L'analyse des résultats à la fin de chaque phase est donc indispensable. On ne peut raisonnablement se contenter de contrôler et d'exploiter seulement la phase finale.

Il est important de savoir déceler les anomalies dans les résultats obtenus et de répondre aux questions essentielles suivantes :

- les incréments de chargement sont-ils assez nombreux ? Le découpage de la loi de chargement est-il approprié ? D'une manière générale, il est préférable d'avoir plus d'incrémentes avec moins d'itérations pour chacun, que d'avoir peu d'incrémentes et un grand nombre d'itérations. En effet, seuls les résultats à la fin d'un incrément ont une signification mécanique ; les résultats à la fin d'une itération n'ont pas de sens mécanique, ils vérifient tantôt les équations de l'équilibre et tantôt les équations de comportement ;
- la tolérance demandée sur les tests de convergence est-elle suffisante ? La réponse à cette question dépend de l'étude des quantités décrites précédemment ;
- la densité en éléments finis est-elle satisfaisante ? Des logiciels de calcul d'erreurs *a posteriori* ou l'étude des continuités de certains résultats (par exemple, des vecteurs-contraintes) permettent de répondre à cette interrogation ;
- etc.

Malgré ces conseils, les réponses à fournir ne sont pas toujours évidentes, car elles peuvent dépendre des résultats qui intéressent véritablement l'utilisateur. Une illustration de ce problème a été proposée par Balay (1988) dans le cas de la modélisation d'un ouvrage de soutènement.

Étude de la convergence dans le cas d'un écran de soutènement

La modélisation d'un ouvrage de soutènement est effectuée en tenant compte des différentes séquences de construction de l'ouvrage depuis la mise en place dans le sol (fonçage de rideaux de palplanches, parois moulées) jusqu'à la phase finale d'excavation ou d'exploitation. Les interactions multiples (sol-écran, sol-tirants d'ancrage, écran-ancrage) sont également considérées. Pour cela, on utilise différents types d'éléments finis dans le même modèle :

- des éléments de massifs pour le sol, pour le béton (paroi moulée) ou pour des rideaux de palplanches simulés par un mur d'épaisseur fixée et de rigidité équivalente ;
- des éléments de flexion-extension pour un écran (rideau de palplanches ou paroi moulée d'épaisseur faible) ;
- des éléments de flexion (tirants éventuels) ;
- des éléments spéciaux pour décrire les phénomènes de contact entre les structures et le sol.

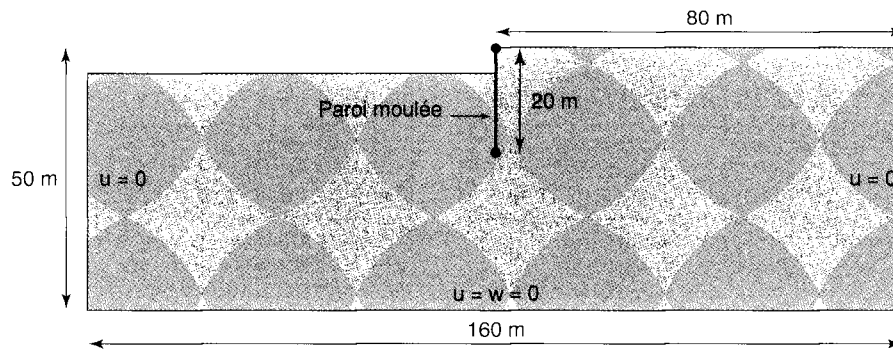


Fig. 8 - Dimensions du modèle retenu et conditions aux limites.

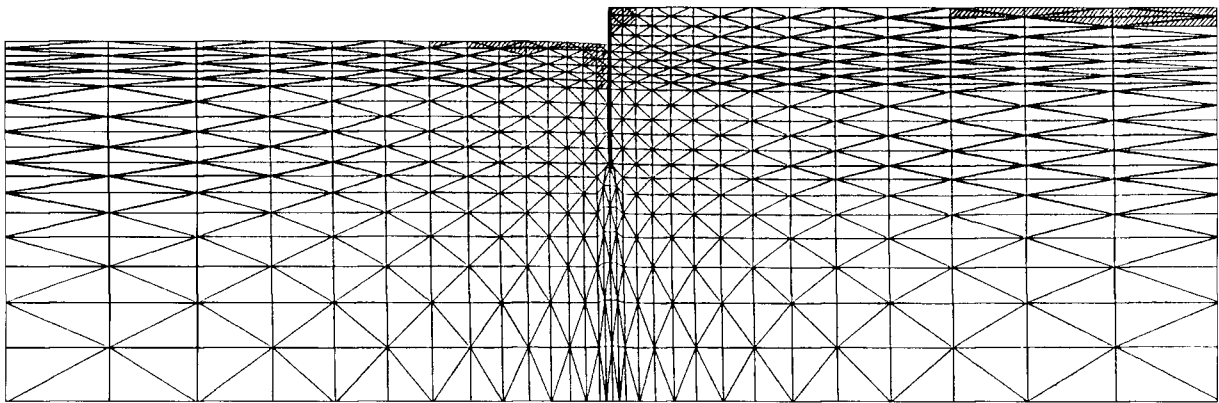


Fig. 9 - Maillage de l'ouvrage de soutènement : 744 nœuds, 1 380 éléments triangulaires à trois nœuds (massif de sol) et quinze éléments de poutre (paroi).

Une interface peut être représentée soit par des éléments de massif formant une bande mince et ayant un comportement élastoplastique orienté (la direction de l'écoulement plastique est imposée selon celle de l'interface), soit par des éléments finis de contact sans épaisseur et ayant un comportement de type frottement de Coulomb (rigide-plastique).

Le cas étudié par Balay (1988) est constitué d'une paroi moulée de 20 m de hauteur retenant le sol sur une hauteur de 5 m (fig. 8). Le maillage est composé d'éléments linéaires (triangles à trois nœuds) pour le massif et d'éléments de poutre pour la paroi. Il n'y a pas de tirant dans le modèle (fig. 9). Le calcul est réalisé en élasto-plasticité (critère de Mohr-Coulomb pour le sol) à l'aide de la méthode des contraintes initiales.

Les caractéristiques mécaniques du sol et du béton de la paroi (caractéristiques équivalentes d'une paroi d'épaisseur 1 m) sont les suivantes :

$$E_{\text{sol}} = 50 \text{ MPa} ; \nu = 0,33 ; \gamma = 20 \text{ kN/m}^3$$

$$c' = 0 \text{ kPa} ; \varphi' = 30^\circ ; K_0 = 0,5 ;$$

$$E_{\text{paroi}} = 10\,000 \text{ MPa} ; \nu_{\text{paroi}} = 0,25$$

Le chargement est constitué par l'exécution d'un niveau d'excavation de profondeur égale à 5 m, simulé en un seul incrément. Plusieurs calculs ont été effectués avec des tolérances décroissantes sur les tests de convergence : 10^{-1} (1 itération) ; 10^{-2} (28 itérations) ; 10^{-3} (153 itérations) ; 10^{-6} (703 itérations). L'influence de la tolérance demandée est importante sur les déplacements et rotations de l'écran (tableau IX) et, plus encore, sur les valeurs des contraintes et des moments fléchissants (fig. 10).

TABLEAU IX
Influence de la tolérance sur les résultats numériques concernant l'écran

Point caractéristique	Tolérance 10^{-2}	Tolérance 10^{-3}	Tolérance 10^{-6}
Tête de l'écran	$u = -0,40396$ cm $v = 2,3113$ cm $\theta = -0,57448 \cdot 10^{-3}$ rd	$u = -0,61328$ cm $v = 2,3073$ cm $\theta = -0,27827 \cdot 10^{-3}$ rd	$u = -0,64256$ cm $v = 2,3067$ cm $\theta = -0,23833 \cdot 10^{-3}$ rd
Niveau du fond de fouille	$u = -0,69760$ cm $v = 2,3122$ cm $\theta = -0,66139 \cdot 10^{-3}$ rd	$u = -0,76494$ cm $v = 2,3079$ cm $\theta = -0,40603 \cdot 10^{-3}$ rd	$u = -0,77489$ cm $v = 2,3073$ cm $\theta = -0,23833 \cdot 10^{-3}$ rd
Pied de l'écran	$u = -1,6720$ cm $v = 2,2923$ cm $\theta = -0,28083 \cdot 10^{-3}$ rd	$u = -1,6730$ cm $v = 2,2895$ cm $\theta = -0,28938 \cdot 10^{-3}$ rd	$u = -1,6731$ cm $v = 2,2891$ cm $\theta = -0,29051 \cdot 10^{-3}$ rd

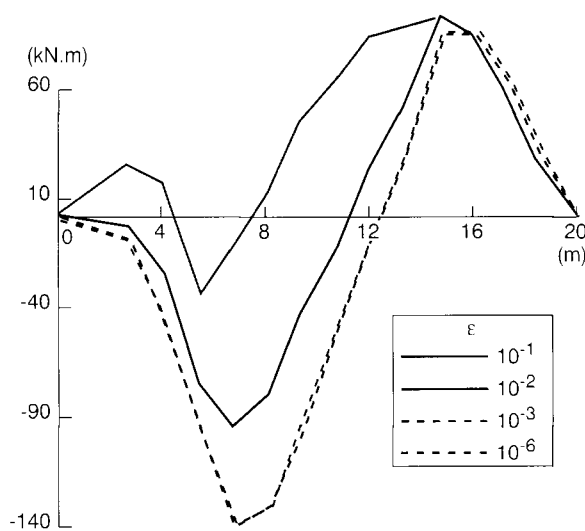


Fig. 10 - Influence des tolérances sur les valeurs des moments fléchissants.

L'analyse des différents calculs conduit aux observations suivantes :

- les déplacements verticaux dans les éléments de poutre (paroi) se stabilisent relativement rapidement pour une tolérance de 1 % (tableau IX) ;
- les déplacements horizontaux et les rotations de la paroi se stabilisent plus lentement. On peut considérer que ces quantités varient peu au-delà d'une tolérance de 0,1 % (tableau IX) ;
- les contraintes principales dans le sol ne varient plus beaucoup en moyenne lorsque la tolérance est inférieure à 0,1 %. Toutefois, dans certaines zones de concentration plastique, il faut atteindre une tolérance de 10^{-6} pour ne plus observer de variations importantes. Si la tolérance est forcée à 10^{-9} (1 283 itérations), les résultats obtenus sont quasiment identiques à ceux calculés pour une tolérance de 10^{-6} ;
- les moments fléchissants se stabilisent aussi lentement et présentent relativement peu de variations au-delà de 0,1 %.

Ces résultats mettent en évidence la lente convergence des moments dans la paroi, qui sont

de première importance pour le projecteur. Il faut ainsi, au minimum, près de 150 itérations en méthode des contraintes initiales pour obtenir une convergence générale satisfaisante sur les déplacements, sur les contraintes et sur les moments. Cette convergence correspond à une erreur relative moyenne de l'ordre de 5 % et une erreur relative maximale de 20 % (pour certaines zones très localisées et plastifiées) entre le calcul effectué avec une tolérance de 0,1 % et un calcul de référence avec une tolérance de 10^{-6} .

Cet exemple est relativement simple en termes de modélisation et de type d'éléments utilisés, mais des constatations identiques ont été faites sur des maillages construits avec des éléments quadratiques (quadrangles à huit nœuds). Par ailleurs, cet exemple comme beaucoup d'autres, montre qu'il est fortement conseillé de considérer une tolérance d'au moins 0,1 % pour un modèle de calcul, et notamment pour des calculs enchaînés (phasage de construction). Cette valeur de la tolérance garantit, lorsque la convergence est acquise, des résultats moyens acceptables.

Notions de convergence et problèmes de couplage

Les modélisations avec des éléments de contact (sans épaisseur) font également appel à une méthode de résolution de type Newton-Raphson : le « couplage » entre le comportement non linéaire des matériaux et celui de l'interface entraîne une double contribution au processus itératif à la fois sur la rigidité (matrice tangente, possibilité de décollement ou de recollement) et sur le second membre (corrections plastiques dans les massifs et à l'interface, frottement, glissement). Dans CÉSAR-LCPC, le comportement d'interface est décrit par des éléments quadratiques à six nœuds, par un critère de frottement de Coulomb et par un critère de résistance à la traction. Le processus itératif, fondé sur les mêmes bases que précédemment, est aussi

contrôlé par des tests de convergence sur les déplacements et sur le déséquilibre global du milieu étudié (tests sur les forces résiduelles). Les conseils précédents restent valables et la tolérance conseillée est également de 0,1 %.

Conclusions

La résolution par la méthode des éléments finis d'un problème de mécanique en comportement non linéaire nécessite généralement l'application de quatre procédures de discrétisations (maillage, méthode itérative, traitement local des équations de comportement, loi de chargement appliquée).

Chacune de ces procédures peut être la source d'erreurs numériques et conduire soit à une mauvaise solution, soit à une divergence non justifiée du processus itératif. Il convient donc, dans la mesure du possible, de contrôler ces procédures afin d'assurer aux utilisateurs du code la validité des résultats qu'ils sont en droit d'attendre.

En particulier, le suivi et l'analyse du processus itératif de résolution, qui est proposé

dans cet article, devraient aider à conclure, dans la plupart des cas, à la convergence ou à la divergence des calculs. Pour les autres types de convergence (au sens du maillage, de la recherche d'une charge limite ou de la satisfaction des équations de comportement), il faut mettre en place d'autres indicateurs internes au code de calcul (étude des continuités, erreurs *a posteriori*, vérification locale des équations de comportement) ou effectuer des analyses de résultats similaires à celles présentées ici (analyse des courbes charge-tassement en des nœuds caractéristiques de l'ouvrage, isovalues de déformations plastiques ou de contraintes, etc.). Cependant, il n'est pas toujours nécessaire de recourir à des techniques mathématiques complexes pour juger de la pertinence du maillage utilisé ou de la loi de chargement adoptée. Le bon sens, les ordres de grandeur connus (tassements, pressions, moments, efforts sur les structures, etc.) et les allures de déformées habituelles (mécanismes de déformation déduits de l'observation d'ouvrages en vraie grandeur) constituent également autant d'indices qui permettent de conclure à la validité de la modélisation et des résultats obtenus.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BALAY (1988), *Utilisation des éléments finis pour le calcul des écrans de soutènement*, Journées d'étude sur l'utilisation de la méthode des éléments finis dans les projets de géotechnique, 17-18 mars 1987, Presses de l'ENPC, Paris, pp. 249-256.

BATHE K.J. (1981), *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

BATHE K.J., WILSON E.L. (1976), *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice hall, Englewood Cliffs, NJ.

de BORST R., VERMEER P. (1984), Possibilities and limitations of finite elements for limit analysis, *Géotechnique*, vol. 34, 2, pp. 199-210.

BROYDEN C.G. (1965), A class of methods for solving non linear simultaneous equations, *Math. Comp.*, vol. 19, pp. 577-593.

CRILLY M. (1993), Report on the BGS meeting « Validation of geotechnical software for design », *Ground Engineering*, vol. 26, 9, November, pp. 19-23.

CRISFIELD M.A. (1983), An arc-length method including line searches and accelerations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 19, pp. 1 269-1 289.

DENNIS J.E., MORÉ J.J. (1977), Quasi-Newton methods, motivation and theory, *SIAM Review*, vol. 19, 1, pp. 46-89.

DESAI C.S., CHRISTIAN J.T. (1977), *Numerical methods in geotechnical engineering*, McGraw-Hill Book Company, New York.

GRIFFITHS D.V. (1982), Computation of bearing capacity factors using finite elements, *Géotechnique*, vol. 32, 3, pp. 195-202.

HUMBERT P., MESTAT Ph. (1988), *Improved algorithm for non linear analysis by the finite element method*, International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Innsbruck, pp. 195-204.

KARDESTUNCER H., NORRIE D.H. (1987), *Finite element handbook*, McGraw-Hill company, 1 424 pages.

MESTAT Ph. (1993a), *Lois de comportement des géomatériaux et modélisation des ouvrages par la méthode des éléments finis*, Études et Recherches des LPC, série Géotechnique, **GT 52**, 194 pages.

MESTAT Ph. (1993b), *Apports d'une méthode d'accélération de la convergence au calcul des charges limites en géotechnique*, rapport interne, division MSGI, LCPC, 94 pages.

MESTAT Ph. (1994), *Validation du progiciel CÉSAR-LCPC en comportement mécanique non linéaire, Vol. I : fondations superficielles et tunnels*, Études et Recherches des LPC, série Géotechnique, **GT 58**, 173 pages.

POWELL M.J.D. (1970), *A new algorithm for unconstrained optimization*, *Non-linear Programming*, J.B. Rosen, O.L. Mangasarian and K. Ritter, eds, Academic Press, New York.

PRAT M., BISCH Ph., MESTAT Ph., MILLARD A., PIJAUDIER-CABOT G. (1997), *Calcul des ouvrages généraux de construction*. Coll. Emploi des éléments finis en génie civil, Editions Hermès, Paris, 768 pages.

RICKS E. (1972), The application of Newton's method to the problem of elastic stability, *J. Applied Mech.*, vol. 39, pp. 1 060-1 066.

SHIELD R.T. (1955), *On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry*, Proc. Roy. Soc. London, A233, pp. 267-287.

SIMO J.C., TAYLOR R.L. (1985), Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 48, pp. 101-118.

WEMPNER G.A. (1971), Discrete approximations related to non linear theories of solids, *Int. J. Solids Struct.*, vol. 7, pp. 1 581-1 599.

WINGET J.M., HUGHES T.J.R. (1985), Solution algorithms for non-linear transient heat conduction analysis employing element-by-element iterative strategies, *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 52, pp. 711-815.

ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R. (1989), *The finite element method (vol. 1 : Basic concepts and linear applications)*, 4^e édition, McGraw-Hill, London, 672 pages.

ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R. (1991), *The finite element method (vol. 2 : Plates, shells, fluids and non-linear problems)*, 4^e édition, McGraw-Hill, London, 824 pages.

ABSTRACT

Finite element models and convergence problems in the case of nonlinear behaviour

Ph. MESTAT

This paper describes the different convergence concepts of the finite element method and the treatment of the nonlinear behaviour laws which are required to describe the deformations of soil masses. Particular attention has been given to convergence in the sense of an iterative resolving process. For a given mesh and data load, by examining the sequence of displacements it is possible, once convergence is reached, to obtain a majorant of the absolute error and the relative error with respect to the limit of the sequence of displacements. Examples of monitoring of the resolution process are presented for simple cases. Furthermore, examples of models for structures (foundations, retaining structures) demonstrate the advantages of checking convergence at each stage of resolution. All the calculations have been performed with the *césar-lcpc* software package.