

# État de contraintes initiales dans les sols et calcul par éléments finis

Philippe MESTAT

Directeur de recherche  
Chef de la section Rhéologie et modélisation des sols  
Division Mécanique des sols et géologie de l'ingénieur  
Laboratoire central des Ponts et Chaussées

## RÉSUMÉ

Les calculs non linéaires en éléments finis nécessitent la donnée d'un état initial des contraintes et des charges hydrauliques dans les massifs de sol. Après des rappels sur la caractérisation de l'état initial, cet article présente son influence sur les modélisations d'ouvrages de géotechnique et en particulier les conséquences liées à l'utilisation de certaines lois de comportement courantes. Par ailleurs, des états de contraintes initiaux particuliers peuvent être utilisés pour simuler certains effets mécaniques dus à des phénomènes hydrauliques, thermiques ou d'évolution des matériaux (gonflement, vieillissement). Des exemples de calcul réalisés avec CÉSAR-LCPC illustrent également l'importance d'une prise en compte correcte de cet état pour la simulation de la mise en place d'inclusions dans le sol et, plus généralement, pour l'analyse du fonctionnement des ouvrages de géotechnique.

**MOTS CLÉS :** 42 - Éléments finis (méthode) - Sol - Calcul - Non linéaire - Contrainte - Charge - Modèle numérique - Ouvrage d'art (gén.) - Simulation - Mécanique des sols.

## Introduction

Un massif de sol ou de roche à l'état naturel est généralement au repos et en équilibre avec les effets de la pesanteur, les conditions hydrauliques et d'éventuelles contraintes résiduelles issues de sa « formation » (plissements géologiques, dépôts sédimentaires, phénomènes de cimentation ou d'érosion, altérations physico-chimiques, etc.). L'équilibre mécanique est alors assuré par le champ de contraintes initiales, encore appelé contraintes en place.

L'exécution de travaux ou d'essai *in situ* se traduit par une perturbation plus ou moins importante de l'état initial des terrains, qui engendre des déformations, une redistribution des contraintes et la recherche d'un nouvel état d'équilibre. Les déformations peuvent être estimées au moyen de modèles de comportement des matériaux qui prennent en compte l'histoire des sollicitations et d'une méthode de résolution numérique (comme, par exemple, les éléments finis). L'état de contraintes initiales exerce ainsi une influence importante sur la réponse d'un massif de sol ou de roche aux sollicitations qu'on lui applique. La modélisation des ouvrages de géotechnique doit donc prendre en compte la détermination de l'état initial des contraintes, qui peut être déduit de mesures ou estimé *a priori*.

## Estimation de l'état initial des contraintes dans les massifs de sol et de roche

La détermination de l'état initial constitue un des problèmes les plus délicats de la mécanique des sols et de la mécanique des roches.

## Contraintes en équilibre dans les massifs au repos

Pour un terrain naturel au repos (déformations nulles), limité par une surface horizontale et formé de couches homogènes perpendiculaires à l'axe de la pesanteur, l'état de contraintes initiales est supposé défini par des contraintes principales verticale et horizontale et par un plan d'isotropie perpendiculaire à l'axe de la pesanteur (ce qui correspond à la formation du massif par le dépôt de couches horizontales successives). L'histoire simplifiée des sollicitations est alors celle d'une suite de compressions sans déplacement horizontal. Le tenseur des contraintes totales est principal dans les axes naturels :

$$\sigma_{zz}^0 = \sigma_{v0} \text{ et } \sigma_{xx}^0 = \sigma_{yy}^0 = \sigma_{h0}$$

où  $\sigma_{v0}$  et  $\sigma_{h0}$  sont respectivement les contraintes totales initiales selon la direction verticale et suivant une direction horizontale.

La détermination de la contrainte verticale  $\sigma_{v0}$  est effectuée en étudiant l'équilibre des terrains. Dans le cas simple évoqué précédemment, le tenseur de contraintes totales ( $\sigma_{ij}^0$ ) vérifie les équations de l'équilibre :

$$\sigma_{ij,j}^0 + \rho g_i = 0,$$

où le vecteur ( $g_i$ ) représente les composantes du poids dans le repère choisi et  $\rho$  la masse volumique du sol.

Pour des couches homogènes et horizontales, la contrainte totale verticale en un point  $M_{n+1}$  appartenant à la couche  $n+1$  est due au poids de la colonne de sol qui se trouve située au-dessus de lui. On a donc :

$$\sigma_{v0}(M_{n+1}) = \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i + \gamma_{n+1} (z - \sum_{i=1}^n h_i)$$

où  $n$  est le nombre de couches situées au-dessus du point  $M_{n+1}$  ;  $\gamma_i$ , le poids volumique de la couche  $i$  et  $h_i$  son épaisseur ;  $z$ , la cote du point  $M_{n+1}$  lorsque l'origine est choisie à la surface du massif.

Il est à noter que la contrainte verticale n'est pas toujours égale au poids des terrains susjacentes. C'est notamment le cas sous des reliefs très accidentés ou dans des massifs rocheux hétérogènes et fracturés où les efforts verticaux peuvent se reporter par des effets de voûte (Panet et Santa Lucia, 1968).

La connaissance du champ de pression interstitielle initiale  $u_0$  permet de déduire la contrainte effective verticale à l'état initial :

$$\sigma'_{v0} = \sigma_{v0} - u_0$$

Si la contrainte effective verticale à l'état initial peut toujours être calculée en étudiant l'équilibre du massif, il n'en est pas de même pour la contrainte horizontale. Les équations de l'équilibre ne suffisent plus et il faut introduire le comportement du matériau et son histoire. Cette prise en compte peut être faite soit de manière expérimentale (essais de laboratoire ou essais en place), soit en supposant connues les lois de comportement des différentes couches de sol et l'histoire des sollicitations.

En pratique, la détermination de la contrainte effective horizontale à l'état initial est effectuée en introduisant le coefficient de pression des terres au repos  $K_0$  défini par la relation :

$$K_0 = \frac{\sigma'_{h0}}{\sigma'_{v0}} = \frac{\sigma_{h0} - u_0}{\sigma_{v0} - u_0}.$$

Ce coefficient est un paramètre de comportement, toutefois il n'est pas intrinsèque à un matériau. En effet, les expérimentations ont montré qu'il varie avec la profondeur et qu'il dépend des propriétés du sol, et de l'histoire des contraintes horizontale et verticale. Le coefficient  $K_0$  est ainsi perturbé à chaque étape de la formation d'un massif de sol. Cette complexité et la variabilité importante qui l'accompagne rendent sa détermination très délicate. Quatre approches sont envisageables :

- l'analyse théorique en se donnant une loi de comportement vraisemblable,
- l'interprétation d'essais en place,
- l'analyse inverse de mesures effectuées sur un ouvrage ou au cours d'un essai,
- l'étude d'essais de laboratoire.

### Détermination du coefficient $K_0$ à partir de résultats théoriques

D'un point de vue théorique, l'état des contraintes initiales d'un massif naturel se trouve soit dans le domaine élastique, soit à l'équilibre limite. Cette constatation fixe des limites à la variation du coefficient  $K_0$ , compris entre les coefficients de poussée et de butée ( $K_a$  et  $K_p$ ). Plus généralement, pour une loi de comportement isotrope donnée, capable de décrire la rhéologie du sol, le coefficient  $K_0$  est relié aux autres paramètres mécaniques (élastiques et plastiques) par des relations plus ou moins compliquées.

Dans le cas d'un massif homogène, semi-infini à surface horizontale et à déformation latérale nulle, l'utilisation de l'élasticité linéaire isotrope conduit à l'expression :

$$K_0 = \frac{\nu'}{1 - \nu'}$$

où  $\nu'$  est le coefficient de Poisson du sol. Compte tenu des valeurs généralement attribuées à  $\nu'$  (variant entre 0 et 0,5), cette formule peut conduire à des estimations irréalistes de  $K_0$ . Il en est de même pour les expressions déduites des lois de comportement plus complexes, comme des lois de type élastoplastique.

Jaky (1944) a ainsi étudié de façon théorique la stabilité d'un massif avec le critère de Mohr-Coulomb et a établi la valeur du rapport de contraintes  $\sigma'_{xx0} / \sigma'_{zz0}$  à l'équilibre limite :

$$K_0 = \frac{\sigma'_{xx0}}{\sigma'_{zz0}} = \frac{1 - \sin \varphi'}{1 + \sin \varphi'} \left( 1 + \frac{2}{3} \sin \varphi' \right)$$

Cette expression est habituellement simplifiée et on utilise la formule approchée suivante, dite formule de Jaky (1944) :

$$K_0 = 1 - \sin \varphi'$$

Dans le cas des modèles anisotropes, il n'y a plus unicité du coefficient de pression des terres au repos : les rapports de contraintes  $\sigma'_{xx} / \sigma'_{zz}$  et  $\sigma'_{yy} / \sigma'_{zz}$  n'ont pas la même valeur contrairement au cas isotrope. Il faut définir deux coefficients  $K_0^1$  et  $K_0^2$ . Dans cet article, on suppose par la suite que ces coefficients sont égaux.

### Détermination du coefficient $K_0$ à partir de l'interprétation d'essais en place

Pour éviter le remaniement dû au prélèvement des échantillons, plusieurs types d'essais en place ont été développés ou adaptés pour estimer le coefficient de pression des terres au repos : cellules de pression totale, essai au pressiomètre autoforeur, essai de fracturation hydraulique, essai au dilatomètre Marchetti (Baguelin et al., 1978 ; Lunne et al., 1989 ; Sève et al., 1995) ou technique de surcarrottage (Misbahi et al., 1994). Les appareils actuellement disponibles diffèrent par leur complexité de mise en oeuvre et d'interprétation des résultats, mais surtout par le degré de perturbation qu'ils peuvent occasionner dans le massif au repos.

La principale difficulté dans l'interprétation consiste donc à corriger l'estimation de la contrainte totale horizontale et de la pression interstitielle pour tenir compte de la perturbation introduite par la mise en place de l'appareil au sein du massif (déformations, remaniement du sol, modifications des pressions interstitielles) (Jamiolkowski et al., 1985 ; Lunne et al., 1989). Par ailleurs, ces essais coûtent relativement cher, et les résultats obtenus sont souvent assez proches des valeurs calculées à partir des relations empiriques (voir, par exemple, Josseume, 1998). Pour ces diverses raisons, la détermination de  $K_0$  se fait souvent à partir d'essais en laboratoire ou de relations empiriques.

### Détermination du coefficient $K_0$ à partir d'essais de laboratoire

Le coefficient de pression des terres  $K_0$  peut également être obtenu en laboratoire au cours d'un essai de compression qui simule les conditions dans lesquelles se trouvait l'échantillon dans le sol. Ces conditions sont caractérisées par la contrainte verticale totale en place et par des déformations latérales nulles. Les essais sont des essais triaxiaux drainés à déformation latérale nulle ou des essais oedométriques avec mesure de la contrainte latérale (Serratrice et Flavigny, 1993). La contrainte verticale appliquée à l'éprouvette varie de façon à simuler les chargements et déchargements successifs subis par le sol au cours de son histoire.

Néanmoins, il reste de nombreuses difficultés expérimentales non résolues, liées au caractère intact des échantillons, aux techniques de prélèvement et de conservation, au découpage et à l'initialisation de l'essai lui-même. Ces problèmes induisent des contraintes et des déformations qui ne peuvent pas être complètement contrôlées et qui perturbent l'interprétation des résultats. Malgré cela, la réalisation de cycles de charge-décharge-recharge permet d'obtenir des informations utiles et d'accéder à un état que l'on peut raisonnablement penser proche du comportement *in situ* surconsolidé (Serratrice et Flavigny, 1993). L'étude des pentes des chemins de contraintes en charge dans le plan ( $\sigma'_1, \sigma'_3$ ) conduit à estimer une valeur  $K_0^{nc}$  dans le domaine des fortes contraintes axiales (domaine normalement consolidé). Cette valeur est souvent proche de celle fournie par la formule de Jaky.

En revanche, à la décharge, le chemin de contraintes est plus fortement non linéaire et on peut mettre en évidence une relation pour le coefficient à la décharge  $K_0^d$  du type :

$$K_0^d = K_0^{nc} (R_{oc})^{\sin \varphi'}$$

où  $R_{oc} = \frac{\sigma'_{1,max}}{\sigma'_1}$  est le degré de surconsolidation

vertical et  $\sigma'_{1,max}$ , la contrainte verticale qu'a subie l'éprouvette de sol au cours de l'essai (Mayne et Kulhawy, 1982 ; Serratrice et Flavigny, 1993). Une relation plus élaborée a été proposée par Mayne et Kulhawy (1982), qui ont tenu compte de l'effet d'un cycle de charge-décharge-recharge :

$$K_0^{oc} = K_0^{nc} \left[ \left( \frac{R_{oc}}{R_{oc,max}^{(1-\sin \varphi')}} \right) + \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{R_{oc}}{R_{oc,max}} \right) \right]$$

où  $R_{oc,max}$  est le rapport de surconsolidation maximal appliqué au cours des cycles.

## Détermination du coefficient $K_0$ à partir d'une analyse inverse

Les travaux cités précédemment montre qu'il est délicat de déduire des essais en place une estimation du coefficient de pression des terres au repos, ou d'une manière plus générale les valeurs des contraintes *in situ*. Aussi, plutôt que d'exploiter directement les mesures en termes de corrélation avec certains paramètres de comportement, plusieurs auteurs ont envisagé de combiner une étude par éléments finis et une technique d'analyse inverse.

L'objectif de l'analyse inverse a été fort bien défini par Gioda et Sakurai (1987) : « il s'agit de trouver les valeurs des paramètres mécaniques et hydrauliques qui, lorsqu'ils sont introduits dans un modèle théorique de l'ouvrage ou de l'essai étudié, conduisent à des résultats (déplacements, déformations, contraintes, pressions interstitielles) aussi proches que possible des mesures correspondantes effectuées sur le site ». Traduit en termes mathématiques, on cherche à minimiser une expression du type :

$$J = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (x_i^j - \bar{x}_i^j)^2$$

où  $M$  est le nombre de pas de temps ou d'étapes de chargement ;  $N$ , le nombre de valeurs mesurées ;  $x_i^j$ , la valeur de la variable numéro  $i$  calculée à l'instant  $j$  à partir des valeurs de paramètres considérées et  $\bar{x}_i^j$ , la valeur mesurée correspondante.

Pour chaque couche identifiée dans le massif, on recherche une estimation des paramètres ( $E$ ,  $\nu$ ,  $k_0$ ,  $k_v$ ,  $k_h$ ), où  $E$  est le module d'Young ;  $\nu$ , le coefficient de Poisson ;  $k_v$  et  $k_h$ , les coefficients de perméabilité verticale et horizontale. L'algorithme d'optimisation tient également compte des conditions imposées aux paramètres par les lois de la mécanique et les valeurs usuelles de la mécanique des sols ou des roches :

$$E > 0 ; 0 < \nu \leq 0,5 ; K_0 > 0 ; k_v > 0 ; k_h > 0.$$

Les résultats calculés ( $x_i^j$ ) sont généralement fournis par une méthode numérique, comme la méthode des éléments finis de type déplacements. Les points de mesure deviennent des nœuds du maillage.

Une analyse inverse simple pour un comportement élastique linéaire (non couplée avec l'hydraulique) consiste à écrire les équations de l'équilibre en réalisant la partition suivante entre les valeurs de déplacements connues expérimentalement ( $\bar{u}_1$ ) et les valeurs inconnues ( $u_2$ ) :

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

où  $f_1$  et  $f_2$  représentent des forces intérieures et/ou extérieures et  $R_{ij}$ , les sous-matrices de rigidité correspondant à cette partition (cf. « Prise en compte d'un état initial des contraintes dans la méthode des éléments finis »).

La réorganisation du système d'équations précédent conduit à éliminer les valeurs inconnues. On obtient alors l'équation :

$$(R_{11} - R_{12} R_{22}^{-1} R_{21}) \bar{u}_1 = f_1 - R_{12} R_{22}^{-1} f_2.$$

L'analyse inverse de cette relation fournit une estimation des paramètres du calcul. Dans le cas d'un problème d'excavation et pour la première phase, les forces  $f_1$  et  $f_2$  sont composées en partie de la contribution  $F_0$  des contraintes initiales sur le contour excavé  $S$  :

$$F_0 = \int_S N^i \sigma^0 dS \text{ avec } \sigma^0 = \{ K_0 \sigma_{zz}^0 ; K_0 \sigma_{zz}^0 ; \sigma_{zz}^0 \}.$$

### Remarque

*Bien qu'un problème d'excavation soit le plus souvent modélisé en plusieurs phases de calcul, le fait de supposer un comportement élastique linéaire permet d'obtenir la solution calculée en une seule phase de calcul. La linéarité autorise la superposition des chargements et donc des différentes phases de calcul.*

Pour simplifier le problème, les contraintes initiales sont supposées définies par les poids volumiques et les coefficients de pression des terres au repos pour les différentes couches identifiées.

Une nouvelle réorganisation de la dernière équation matricielle permet d'introduire le vecteur  $P$  des valeurs des paramètres de déformabilité, le vecteur  $K^*$  des coefficients de pression des terres, une matrice  $T(P)$  et des vecteurs  $g_1(P)$  et  $g_2(P)$  qui ne dépendent que de  $P$  :

$$\begin{bmatrix} T_{11}(P) & T_{12}(P) \\ T_{21}(P) & T_{22}(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ K^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(P) \\ g_2(P) \end{bmatrix}$$

Les inconnues (vecteurs  $P$  et  $K^*$ ) étant le plus souvent moins nombreuses que les équations (correspondant au nombre de mesures disponibles), on peut résoudre le système surabondant par la méthode des moindres carrés ; d'où le système d'équations non linéaires suivant :

$${}^t [T(P)] [T(P)] \begin{bmatrix} P \\ K^* \end{bmatrix} = {}^t [T(P)] \begin{bmatrix} g_1(P) \\ g_2(P) \end{bmatrix}$$

La résolution est effectuée par un processus itératif. Ainsi, même si le comportement supposé du massif de sol est élastique linéaire, le problème inverse conduit à la résolution d'un système non linéaire.

D'autres approches plus complexes ont été développées en combinant un algorithme d'optimisation avec une analyse probabiliste (Gioda, 1985 ; Gioda et Sakurai, 1987 ; Misbahi et al., 1994 ; Gens et al., 1996 ; Ledesma et al., 1996a, 1996b). L'analyse probabiliste permet de tenir compte des erreurs de mesure.

Cette démarche peut être appliquée aux mesures effectuées au cours d'essais en place ou réalisées sur des ouvrages en vraie grandeur (en cours de construction ou en phase de service), puisque toutes les mesures consécutives à une perturbation de l'équilibre d'un massif devraient permettre de remonter aux propriétés mécaniques et hydrauliques du sol, à la condition que le modèle décrive suffisamment bien son comportement, que les paramètres aient une influence suffisamment importante sur les phénomènes observés et que les erreurs de mesure soient faibles. Plus cette influence sera petite et les erreurs grandes, plus il sera difficile d'effectuer une analyse inverse.

Si les mesures sont réalisées en cours de chantier, l'intérêt de cette méthode est similaire à celui de la « méthode observationnelle » préconisée par Terzaghi et Peck (1967) pour affiner les modèles théoriques et réévaluer les paramètres utilisés dans les projets de géotechnique. Cette approche est d'autant plus intéressante qu'elle permet en théorie de tenir compte des véritables chemins de contraintes suivis par des volumes élémentaires de sol autour des ouvrages (effet d'échelle et des discontinuités, interaction sol-structure), ces types de chemin étant en dehors des possibilités des procédures classiques de détermination des paramètres à l'aide d'essais de laboratoire.

Bien que le comportement réel des massifs de sol ou de roche soit fortement non linéaire, les techniques d'analyse inverse proposées actuellement concernent essentiellement l'élasticité linéaire isotrope ou anisotrope (Gens et al., 1996 ; Ledesma et al., 1996a) ou l'élasticité linéaire non incrémentale de type sécant (Arai et Kojima, 1987 ; Ledesma et al., 1991 ; Arai, 1993 ; Ledesma et al., 1996b). Cela facilite grandement les algorithmes d'optimisation et réduit la durée des calculs. En revanche, il reste des problèmes théoriques importants pour les lois incrémentales comme l'élastoplasticité. Cette limitation actuelle réduit fortement l'intérêt pratique de ces techniques.

Une autre critique importante concernant l'analyse inverse est que celle-ci nécessite au préalable le choix de la loi de comportement du massif de sol ou de roche. Aussi certaines recherches ont été orientées vers la détermination simultanément du modèle et de la valeur de ses paramètres (Sakurai et al., 1994). Cette tâche est évidemment très ambitieuse et il faut bien

reconnaître que les premières tentatives ne sont guère convaincantes, car une difficulté majeure demeure : celle de l'unicité de la solution dont on n'est jamais sûr et *a fortiori* lorsqu'on rajoute comme « inconnue » le modèle de comportement. Cependant, c'est une voie de recherche qui mérite d'être poursuivie, notamment dans le cadre de la méthode observationnelle.

### Relations empiriques utilisées en pratique

Comme la mise en œuvre et l'interprétation des résultats d'essais sont difficiles, il est souvent préférable en phase de projet de déterminer la valeur du coefficient  $K_0$  à partir d'expressions empiriques le reliant à d'autres paramètres géotechniques (angle de frottement interne, pression de préconsolidation, voire l'indice de plasticité pour les argiles ou la densité relative pour les sables), lorsque l'histoire du chargement est relativement simple (Brooker et Ireland, 1965 ; Schmidt, 1966 ; Alpan, 1967 ; Ladd et al., 1977 ; Massarch, 1975 ; Mayne, 1984).

Le tableau I regroupe les relations utilisées couramment en distinguant les sols surconsolidés et normalement consolidés. Ces expressions fournissent des ordres de grandeur relativement corrects dans la plupart des cas (Josseaume, 1976 ; Josseaume, 1998). En revanche, lorsque l'histoire des sollicitations comporte plusieurs cycles de charge-décharge, il n'est plus possible de décrire à l'aide d'une formule empirique l'ensemble des phénomènes qui interviennent.

TABLEAU I  
Relations empiriques pour le coefficient de pression des terres au repos

Type de sol	Expression de $K_0$
Massif de sol à surface horizontale, normalement consolidé	$K_0 = 1 - \sin \varphi'$ Cette relation a été validée par de nombreuses études (Brooker et Ireland, 1965 ; Mayne et Kulhawy, 1982, etc.)
Massif de sol à surface horizontale, surconsolidé (par un déchargement monotone)	$K_0 = (1 - \sin \varphi') \sqrt{\frac{\sigma_p}{\sigma_{v0}'}}$ où $\sigma_p$ est la pression de préconsolidation du sol déterminée à l'essai œdométrique et $\sigma_{v0}'$ , la contrainte verticale effective en place
Massif de sol à surface inclinée d'un angle $\beta$ sur l'horizontale ( $\beta \leq \varphi'$ )	Dans ce cas, le coefficient $K_{0\beta}$ est le rapport de la contrainte effective, qui est parallèle à la surface inclinée, à la contrainte effective verticale : $K_{0\beta} = K_0 (1 + \sin \beta)$ où $K_0$ correspond à un massif horizontal ayant les mêmes caractéristiques

Pour les massifs naturels qui n'ont jamais été surchargés (dépôts sédimentaires), la valeur de  $K_0$  peut être de l'ordre de 0,5 voire un peu inférieure. En revanche, pour les massifs qui ont été fortement surchargés à un moment de leur histoire, la valeur de  $K_0$  peut atteindre 3.

Dans le cas d'une géométrie des couches complexe, les mesures et les formules empiriques ne suffisent plus. L'ingénieur est obligé de faire des hypothèses et d'imaginer un état de contraintes initiales plausible. Une solution pratique consiste à recourir à une modélisation numérique :

- soit en faisant des hypothèses sur l'histoire de la formation du massif et en réalisant un calcul par étapes (sédimentation par couches successives sous poids propre, érosion selon une certaine pente, surcharges, etc.) ;
- soit en appliquant dans le calcul le poids volumique des différents matériaux identifiés dans le massif.

Les contraintes initiales sont alors le résultat du calcul numérique. Les déplacements associés sont ensuite annulés et ces contraintes « injectées » dans le véritable calcul d'ouvrage. La validité de ce procédé de calcul repose sur la capacité de la loi de comportement utilisée à décrire à la fois le comportement *passé* du sol et son comportement *futur*.

### Prise en compte d'un état initial des contraintes dans la méthode des éléments finis

De manière générale, la prise en compte d'une loi de comportement dans un programme d'éléments finis de type « petits déplacements » conduit à l'écriture du principe des travaux virtuels. Quel que soit le champ de déplacements virtuels  $\delta u_i$ , le champ de contraintes vérifie l'égalité :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_S q_i \delta u_i dS + \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega$$

où  $\Omega$  est le domaine étudié ;  $\delta \varepsilon_{ij}$  représente le tenseur de déformations virtuelles déduit du champ de déplacements virtuels  $\delta u_i$  ;  $q_i$ , le vecteur-contraintes appliqué sur le contour  $S$  du domaine  $\Omega$  et  $f_i$ , les forces volumiques s'exerçant dans le domaine  $\Omega$ .

Le report de la relation de comportement dans le principe des travaux virtuels permet d'écrire un système d'équations où l'inconnue est le champ de déplacements réels  $u_i$ . Dans le cas de l'élasticité linéaire, on obtient la relation suivante :

$$\int_{\Omega} (E_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \sigma_{ij}^0) \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_S q_i \delta u_i dS + \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega$$

Le champ  $u_i$  doit vérifier cette relation quel que soit le champ virtuel  $\delta u_i$ . Le traitement numérique par la méthode des éléments finis est effectué en faisant passer au second membre le terme dans lequel apparaissent les contraintes initiales :

$$\int_{\Omega} E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_S q_i \delta u_i dS + \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^0 \delta \varepsilon_{ij} d\Omega$$

Sans entrer dans les détails, on aboutit au système d'équations algébriques suivant, dans lequel trois types de chargement sont distingués :

$$KU = F_{ext} + F_g - F_0$$

où  $K$  est la matrice de rigidité du milieu discrétisé ;  $U$ , le vecteur des déplacements nodaux ;  $F_{ext}$ , le vecteur des forces extérieures nodales ;  $F_g$ , le vecteur associé au poids volumique des matériaux et  $F_0$ , le vecteur correspondant aux contraintes initiales. Ce dernier vecteur est parfois appelé *chargement de contraintes initiales*.

Puis, après prise en compte des conditions de déplacements imposés, la valeur des déplacements  $U$  est obtenue par la résolution du système précédent. Le champ de contraintes est ensuite calculé à partir du champ de déformations  $\varepsilon_{ij}$ , associé au champ de déplacements nodaux  $u_i$ , et de la loi de comportement élastique linéaire :

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \sigma_{ij}^0$$

Il convient de noter que, dans un calcul par éléments finis, le champ de contraintes initiales intervient généralement à deux niveaux : d'une part, en tant que second membre ou vecteur de chargement par l'intermédiaire du vecteur  $F_0$  et, d'autre part, en initialisation pour la détermination du champ de contraintes par la loi de comportement. La programmation des modules de résolution de CÉSAR-LCPC distingue ces deux opérations. L'initialisation des contraintes ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0$ ) et la mise en chargement des contraintes initiales (calcul de  $F_0 = \int_{\Omega} B^t \sigma_{ij}^0 d\Omega$  où

$B$  est la matrice des dérivées des fonctions d'interpolation) sont ainsi deux opérations distinctes qu'il faut savoir combiner avec soin lorsque cela est nécessaire pour la modélisation.

### Modélisation numérique et chargement de contraintes initiales

Le poids des terres (vecteur  $F_g$ ) et le chargement de contraintes initiales (vecteur  $F_0$ ) constituent des éléments importants de la modélisation numérique en géotechnique, mais ils ne sont pas toujours systématiquement considérés dans un

modèle d'éléments finis. En effet, pour un massif de sol intact, à contours rectangulaires et surface horizontale et qui ne contient pas de vides (fig. 1a), il est facile de montrer que la combinaison des chargements  $F_g$  et  $F_0$  ne produit pas de déplacements : les contraintes verticales sont parfaitement équilibrées et les conditions de déplacement latéral nul sur les frontières empêchent tout déplacement horizontal. Pour obtenir la solution de ce problème particulier, il suffit d'initialiser les contraintes sans appliquer de chargement ( $F_g = F_0 = 0$  ;  $U = 0$  et  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0$ ).

En revanche, lorsqu'un vide existe dans le maillage (contour d'une excavation souterraine) ou que la surface naturelle n'est plus horizontale (la zone non maillée correspond à une excavation à ciel ouvert), la combinaison des deux chargements revient à imposer directement sur le bord de l'excavation des forces de surface, opposées à celles exercées par le matériau enlevé sur le matériau restant (fig. 1b).

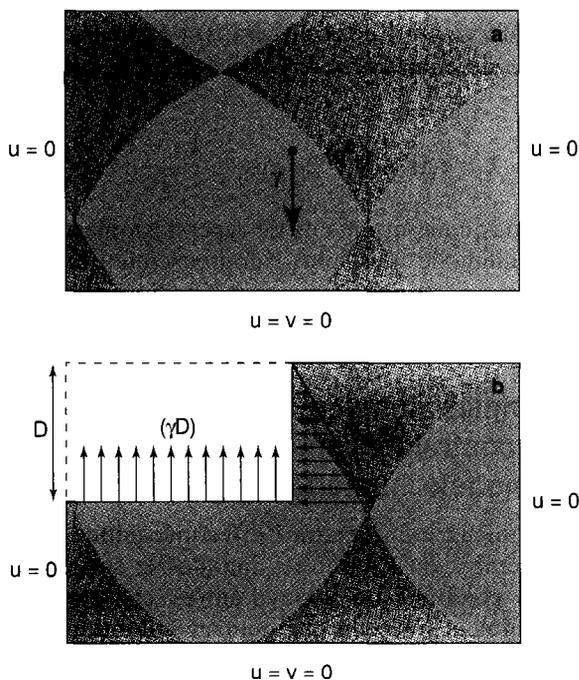


Fig. 1 - Prise en compte de l'état initial :

- a. Massif de sol homogène au repos.
- b. Excavation dans le massif et distribution des forces équivalentes.

Ainsi, pour le calcul d'une cavité non maillée et creusée en une seule étape, les deux méthodes suivantes sont équivalentes :

- initialisation des contraintes ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0$ ) et mise en chargement des contraintes géostatiques ( $F_0 \neq 0$ ) et du poids des terres ( $F_g \neq 0$ ) ;
- initialisation des contraintes ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0$ ) et application de forces extérieures sur le contour de la zone excavée ( $F_{ext} \neq 0$  avec  $F_{ext} = F_g - F_0$ ).

Dans le cas où seulement un certain pourcentage des forces extérieures est appliqué, la seconde méthode s'avère plus commode et est, en général, préférée à la première. C'est notamment le cas pour simuler la proximité du front de taille d'un tunnel dans la méthode convergence-confinement (taux de déconfinement intérieur à 1). Dans le progiciel CÉSAR-LCPC, c'est l'option de calcul nommée LAM qui réalise cette opération et qu'il est conseillé d'employer pour simuler tout type de creusement dans un massif.

## Autres applications des contraintes initiales mises en chargement

### Modélisation approchée du gonflement des sols

La mise en chargement du champ de contraintes initiales peut également être utilisée pour la simulation du comportement d'une couche de sol gonflant. En effet, une modélisation possible de ce phénomène consiste à relier, lors d'une décompression, une variation du tenseur des contraintes à une variation de la partie élastique du tenseur des déformations par la relation :

$$\Delta\sigma_{ij} = E_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} + p_{gf}\delta_{ij}$$

où  $p_{gf}$  est la pression de gonflement subie par le sol ;  $\delta_{ij}$ , le tenseur de Kronecker et  $E_{ijkl}$ , le tenseur de comportement élastique linéaire.

En termes d'accroissement, cette relation est du même type qu'une loi de comportement élastique avec des contraintes initiales.

### Modélisation d'un effet thermique ou hydraulique

Une autre application de la mise en chargement du champ de contraintes initiales est constituée par la recherche de l'effet mécanique sur un solide d'une variation du champ de températures ou de charges hydrauliques. Ce type de calcul suppose que l'étape transitoire peut être négligée.

Supposons qu'initialement la charge hydraulique en tout point valait  $h_0$  et qu'après une perturbation la valeur de cette charge passe à  $h$ , tous les déplacements restant bloqués. L'accroissement de contraintes dû à la perturbation de l'écoulement est alors égal à la variation de pression interstitielle :

$$\Delta\sigma_{ij} = -\gamma_w (h - h_0) \delta_{ij}$$

où  $\gamma_w$  est le poids volumique de l'eau. Les contraintes finales calculées sont la somme des contraintes effectives et des pressions interstitielles.

Le même raisonnement peut être appliqué pour l'étude d'un effet thermique ; il suffit alors de remplacer la charge hydraulique  $h$  par la température  $T$  (Piau et al., 1996). La thermo-élasticité linéaire fournit l'accroissement du champ de contraintes sous la forme :

$$\sigma_{ij}^0 = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} (T - T_0) \delta_{ij}$$

où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation ;  $E$ , le module d'Young et  $\nu$ , le coefficient de Poisson.

### Modélisation approchée d'un effet différé

Soumis à des sollicitations maintenues constantes, la plupart des massifs de sol présentent, à un degré ou un autre, un comportement différé, qui se traduit par un accroissement de la déformation sous charge constante. Une modélisation rigoureuse consisterait à utiliser des lois de comportement de type viscoélastique ou viscoplastique et à suivre pas à pas l'évolution du phénomène. Toutefois, ce type d'analyse conduit souvent à des temps de calcul très importants. Il est alors plus « économique », pour une étude exploratoire, d'avoir recours à une méthode simplifiée qui permet de calculer les déformations et les contraintes provoquées par l'évolution des paramètres d'élasticité actuels ( $E$  et  $\nu$ ) vers des valeurs ( $E_\infty$  et  $\nu_\infty$ ) qui seraient atteintes pour un temps infini (Piau et al., 1996). Cette évolution est simulée par la mise en chargement d'un état de contraintes initiales adapté, qu'il est possible d'explicitier analytiquement dans le cas d'un comportement élastique linéaire.

Considérons deux états d'équilibre (1) et (2) soumis aux mêmes forces volumiques et aux mêmes conditions aux limites. Ces états sont caractérisés par les tenseurs de déformation ( $\epsilon_{ij}^1$  et  $\epsilon_{ij}^2$ ) et de contraintes ( $\sigma_{ij}^1$  et  $\sigma_{ij}^2$ ), liés par les deux équations de comportement :

$$\sigma_{ij}^1 = E_{ijkl}^1 \epsilon_{kl}^1 + \sigma_{ij}^0 \quad \text{et} \quad \sigma_{ij}^2 = E_{ijkl}^2 \epsilon_{kl}^2 + \sigma_{ij}^0$$

La variation de contraintes entre les deux états vaut alors :

$$\Delta \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^2 - \sigma_{ij}^1 = E_{ijkl}^2 \epsilon_{kl}^2 - E_{ijkl}^1 \epsilon_{kl}^1$$

L'introduction de la variation de déformation ( $\Delta \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^2 - \epsilon_{ij}^1$ ) permet de réécrire cette relation comme suit :

$$\Delta \sigma_{ij} = E_{ijkl}^2 \Delta \epsilon_{kl} + (E_{ijkl}^2 - E_{ijkl}^1) \epsilon_{kl}^1$$

Par ailleurs, l'inversion de l'équation de comportement pour l'état (1) permet d'exprimer le tenseur de déformations  $\epsilon_{ij}^1$  en fonction des états de contraintes actuels  $\sigma_{ij}^1$  et initial  $\sigma_{ij}^0$ . Si  $H_{ijkl}^1$  est le tenseur de comportement inverse, la variation de contraintes entre les états (1) et (2) s'exprime finalement sous la forme :

$$\Delta \sigma_{ij} = E_{ijkl}^2 \Delta \epsilon_{kl} + (E_{ijkl}^2 - E_{ijkl}^1) H_{klmn}^1 (\sigma_{mn}^1 - \sigma_{mn}^0)$$

Cette relation est caractéristique d'une loi de comportement élastique linéaire (en termes d'accroissements) avec un état de contraintes initiales  $\sigma_{ij}^{\text{diff}}$  défini par :

$$\sigma_{ij}^{\text{diff}} = (E_{ijkl}^2 - E_{ijkl}^1) H_{klmn}^1 (\sigma_{mn}^1 - \sigma_{mn}^0)$$

Dans le cas d'une élasticité isotrope, la variation des contraintes s'écrit sous forme développée :

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{ij} &= \lambda_2 \text{tr}(\Delta \epsilon_{kl}) \delta_{ij} + 2\mu_2 \Delta \epsilon_{ij} \\ &+ \frac{\Delta \mu}{\mu_1} (\sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^0) + \frac{\mu_1 \Delta \lambda - \lambda_1 \Delta \mu}{\mu_1 (3\lambda_1 + 2\mu_1)} \text{tr}(\sigma_{kl}^1 - \sigma_{kl}^0) \delta_{ij} \end{aligned}$$

où les paramètres  $\lambda_k$  et  $\mu_k$  sont les coefficients de Lamé reliés aux modules d'Young  $E_k$  et aux coefficients de Poisson  $\nu_k$  par les relations :

$$\lambda_k = \frac{E_k \nu_k}{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)} \quad \text{et} \quad \mu_k = \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)} ;$$

$$\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \quad \text{et} \quad \Delta \mu = \mu_2 - \mu_1 .$$

Enfin, si le coefficient de Poisson est supposé peu affecté par l'effet du temps, l'expression du champ de contraintes  $\sigma_{ij}^{\text{diff}}$  se simplifie grandement :

$$\Delta \sigma_{ij} = \lambda_2 \text{tr}(\Delta \epsilon_{kl}) \delta_{ij} + 2\mu_2 \Delta \epsilon_{ij} + \frac{E_2 - E_1}{E_1} (\sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^0)$$

Pour des comportements de type élastoplastique, cette méthode n'est plus rigoureusement exacte. Néanmoins, en première approximation, elle peut être utilisée pour une modélisation qualitative.

### Exemples simples d'utilisation des contraintes initiales dans un modèle numérique

Pour mieux comprendre l'effet mécanique d'un chargement de contraintes initiales et son éventuelle combinaison avec d'autres chargements (notamment avec un chargement volumique), il est intéressant d'étudier les exemples simples présentés ci-après.

Considérons un massif de sol sec, homogène, de comportement élastique linéaire isotrope, infiniment long selon la direction  $Oy$  (hypothèse de déformation plane), de hauteur  $H$  suivant  $Oz$  et de largeur  $L$  suivant  $Ox$  (fig. 2). L'état initial des contraintes est *a priori* quelconque et le chargement considéré est constitué par le poids propre du massif et une éventuelle surcharge de pression uniforme appliquée sur la surface extérieure, à la cote  $H$ .

Supposons, de plus, que le massif ne peut se déformer que dans la direction  $Oz$ . Le champ de déplacements se réduit alors à sa composante verticale :

$$u = v = 0 \quad \text{et} \quad w = w(z)$$

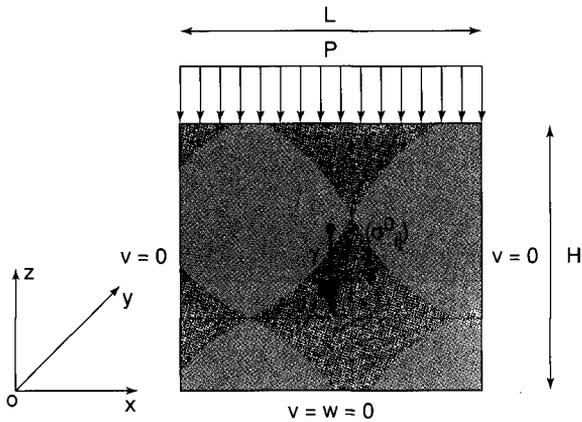


Fig. 2 - Massif de sol en déformation plane : géométrie et conditions aux limites.

Pour sa part, le champ de contraintes final doit vérifier les équations de l'équilibre :

$$\sigma_{ij,j} + \rho g_i = 0$$

où le vecteur ( $g_i$ ) représente les composantes du poids dans le repère Oxyz.

En tenant compte de la forme particulière du champ de déplacements et de la loi de comportement élastique linéaire isotrope, les équations de l'équilibre et les conditions aux limites se réduisent aux relations suivantes :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \gamma; \quad \sigma_{zz}(z = H) = -P;$$

$$w(z = 0) = 0$$

où  $\gamma$  représente le poids volumique du matériau et  $P$ , une pression extérieure (surcharge).

Dans ce cas particulier, le comportement élastique linéaire avec contraintes initiales montre que le champ de contraintes est uniquement fonction de la cote  $z$ . Les relations suivantes se déduisent facilement :

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$$

$$\sigma_{xx} - \sigma_{xx}^0 = \sigma_{yy} - \sigma_{yy}^0 = \frac{\nu}{1 - \nu} (\sigma_{zz} - \sigma_{zz}^0)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{dw}{dz} = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)} (\sigma_{zz} - \sigma_{zz}^0)$$

La combinaison des équations de l'équilibre et des relations de comportement conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)} \left( \gamma - \frac{\partial \sigma_{zz}^0}{\partial z} \right)$$

L'intégration est évidente et la prise en compte des conditions limites [ $w(z = 0) = 0$  et  $\sigma_{zz}(z = H) = -P$ ] fournit l'expression du déplacement et de la contrainte :

$$w(z) = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)} \left( \gamma \frac{z^2}{2} - \gamma H z - P z - \int_0^z \sigma_{zz}^0(\xi) d\xi \right)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^0 + \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{dw}{dz} = \gamma(z - H) - P$$

Les contraintes situées dans le plan horizontal sont données par les relations précédentes :

$$\sigma_{xx} - \sigma_{xx}^0 = \sigma_{yy} - \sigma_{yy}^0 = \frac{\nu}{1 - \nu} (\sigma_{zz} - \sigma_{zz}^0)$$

Ces expressions permettent d'illustrer les différentes actions des contraintes initiales. Pour l'exemple étudié, le tableau II regroupe les

TABLEAU II  
Effets des contraintes initiales combinées avec d'autres chargements

Hypothèses	Solution du problème	Déformation du massif
Pas de contraintes initiales ( $\sigma_{ij}^0 = 0$ ) et pas de chargement associé ( $F_0 = 0$ ) Seul l'effet du poids est considéré ( $F_g \neq 0$ )	$w(z) = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)} \left( \gamma \frac{z^2}{2} - \gamma H z \right)$ $\sigma_{zz} = \gamma(z - H)$	$\downarrow w < 0$
Initialisation des contraintes ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0$ ), mais celles-ci ne sont pas mises en chargement ( $F_0 = 0$ ) L'effet du poids est considéré ( $F_g \neq 0$ )	$w(z) = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)} \left( \gamma \frac{z^2}{2} - \gamma H z \right)$ $\sigma_{zz} = 2\gamma(z - H)$	$\downarrow w < 0$
Initialisation des contraintes ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0$ ) et mise en chargement des contraintes initiales ( $F_0 \neq 0$ ) L'effet du poids est négligé ( $F_g = 0$ )	$w(z) = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - \nu)} \left( -\gamma \frac{z^2}{2} + \gamma H z \right)$ $\sigma_{zz} = 0$	$\downarrow w > 0$
Initialisation des contraintes ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0$ ) et mise en chargement des contraintes initiales ( $F_0 \neq 0$ ) L'effet du poids est considéré ( $F_g \neq 0$ )	$w(z) = 0$ $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^0 = \gamma(z - H)$	$w = 0$

conséquences mécaniques de plusieurs hypothèses courantes. Pour simplifier, il est supposé que les contraintes initiales sont d'origine géostatique, c'est-à-dire définies par le poids volumique du massif  $\gamma$  et par le coefficient de pression des terres au repos  $K_0$ . Par ailleurs, la surcharge considérée auparavant est prise égale à zéro ( $P = 0$  ou  $F_{ext} = 0$ ).

Le tableau II montre, en particulier, que la mise en chargement des contraintes initiales sans la prise en compte du poids (cas 3) conduit à une expansion du massif, d'amplitude égale au tassement provoqué par le poids du sol (cas 1 ou 2). Ce tableau met également en évidence une erreur de modélisation possible : l'initialisation des contraintes et leur mise en chargement combinée avec la prise en compte du poids du sol conduisent à un doublement des contraintes (cas 2). Il faut donc combiner avec soin, en fonction des nécessités de la modélisation, les différentes possibilités d'initialisation et de chargements, offertes par un code de calcul comme CÉSAR-LCPC.

### État de contraintes initial, maillage et critères de plasticité

Même si la connaissance de l'état de contraintes initiales d'un massif de sol se réduit souvent à peu d'information, on sait que cet état est en équilibre avec les forces de gravité et l'état hydraulique et qu'il peut être en équilibre limite ou non. D'après la théorie de la poussée et de la butée, le coefficient  $K_0$  est par construction compris entre deux valeurs extrêmes :

$$K_a \leq K_0 \leq K_p$$

où  $K_p$  est le coefficient de butée et  $K_a$ , le coefficient de poussée.

Pour un modèle de comportement de type élasto-plastique parfait, l'état de contraintes initiales est donc situé à l'intérieur du domaine élastique ou sur la frontière de celui-ci. Cette condition doit être vérifiée avant tout calcul par éléments finis, sinon la plastification de toute une région *sans aucune justification* pourrait entraîner des perturbations importantes sur les résultats ou empêcher la convergence du processus itératif, nécessaire pour la résolution en comportement non linéaire.

Un mécanicien des sols sait vérifier la cohérence des données déduites de l'analyse géotechnique d'un site, mais pour un ingénieur chargé de réaliser des calculs numériques cette vérification n'est pas toujours évidente et elle peut être la source d'erreurs de modélisation.

Pour illustrer ces problèmes, considérons un massif de sol homogène à frontières verticales et horizontales (fig. 3a). Si l'origine de l'axe vertical (Oz) est placée à la surface du terrain natu-

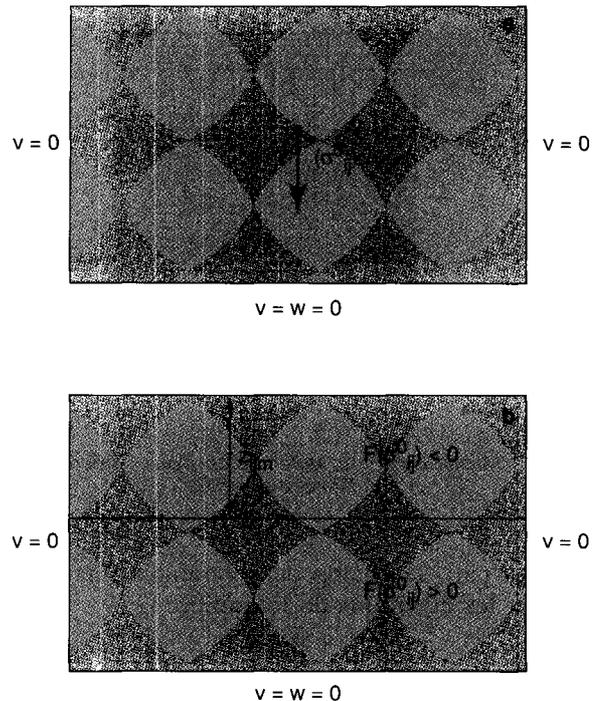


Fig. 3 - Massif de sol à frontières verticales et horizontales :  
a. État de contraintes initial.  
b. Existence d'une épaisseur limite pour le modèle.

rel, l'état initial est défini par les contraintes principales :  $\sigma_1^0 = \gamma z$  et  $\sigma_2^0 = \sigma_3^0 = K_0 \gamma z$  (avec  $z \geq 0$ ).

Supposons, par ailleurs, que le comportement du massif peut être caractérisé par un critère de Mohr-Coulomb ( $F_{MC}$ ) :

$$F_{MC} = |\sigma_1 - \sigma_3| - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi - 2c \cos \varphi$$

où  $\varphi$  est l'angle de frottement interne du sol et  $c$ , sa cohésion effective ;

ou par un critère de Drucker-Prager ( $F_{DP}$ ) :

$$F_{DP} = \sqrt{J_2} - \alpha I_1 - k$$

avec  $J_2$ , déviateur des contraintes et  $I_1$ , somme des contraintes principales :

$$J_2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{6} \quad \text{et}$$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

Les critères sont écrits avec la convention de signe de la mécanique des sols : les compressions sont positives.

La position de l'état initial des contraintes par rapport à ces critères de plasticité est alors déterminée par l'étude du signe des quantités suivantes :

$$F_{MC} = \gamma z \left[ |1 - K_0| - (1 + K_0) \sin \varphi \right] - 2c \cos \varphi$$

$$F_{DP} = \gamma z \left[ \frac{|1 - K_0|}{\sqrt{3}} - \alpha(1 + 2K_0) \right] - k$$

**TABLEAU III**  
**État initial de contraintes et critères de plasticité parfaite**

Type de critère	Position de l'état initial en fonction des paramètres de calcul
Mohr-Coulomb	Si $ 1 - K_0  - (1 + K_0) \sin \varphi \leq 0$ et si $c > 0$ , l'état initial reste dans le domaine élastique quelle que soit la valeur de la cote $z$
	Si $ 1 - K_0  - (1 + K_0) \sin \varphi = 0$ et si $c = 0$ , l'état initial est en équilibre limite (situé sur la frontière du domaine d'élasticité)
	Si $ 1 - K_0  - (1 + K_0) \sin \varphi > 0$ et si $c = 0$ , l'état initial est en dehors du domaine d'élasticité. Cet état est impossible ; cela reviendrait à supposer $K_0 > K_p$ ou $K_0 < K_s$ .
	Si $ 1 - K_0  - (1 + K_0) \sin \varphi \geq 0$ et si $c > 0$ , il existe une cote $z_{lim}$ à partir de laquelle le massif de sol dépasse le domaine d'élasticité et entre dans un domaine impossible : $z_{lim} = \frac{2c \cos \varphi}{\gamma ( 1 - K_0  - (1 + K_0) \sin \varphi)}$
Drucker-Prager	Si $ 1 - K_0  - \alpha\sqrt{3} (1 + 2 K_0) \leq 0$ et si $k > 0$ , l'état initial reste dans le domaine élastique quelle que soit la valeur de la cote $z$ .
	Si $ 1 - K_0  - \alpha\sqrt{3} (1 + 2 K_0) = 0$ et si $k = 0$ , l'état initial est en équilibre limite (situé sur la frontière du domaine d'élasticité).
	Si $ 1 - K_0  - \alpha\sqrt{3} (1 + 2 K_0) > 0$ et si $k = 0$ , l'état initial est en dehors du domaine d'élasticité. Cet état est impossible.
	Si $ 1 - K_0  - \alpha\sqrt{3} (1 + 2 K_0) \geq 0$ et si $k > 0$ , il existe une cote $z_{lim}$ à partir de laquelle le massif de sol dépasse le domaine d'élasticité et entre dans un domaine impossible : $z_{lim} = \frac{\sqrt{3}k}{\gamma ( 1 - K_0  - \alpha\sqrt{3} (1 + 2K_0))}$

en fonction des valeurs des paramètres respectifs ( $\varphi$ ,  $c$  et  $K_0$ ) ou ( $\alpha$ ,  $k$  et  $K_0$ ). Le tableau III résume cette étude lorsque l'on suppose  $K_0$  indépendant de la profondeur  $z$  et montre l'existence, dans certains cas, d'une cote limite au-delà de laquelle le critère est dépassé. L'existence de cette cote est liée au choix des paramètres de calcul, mais aussi à la position retenue pour la frontière inférieure du modèle et peut donc dépendre directement de la construction du maillage d'éléments finis. Les états qualifiés d'*impossibles* dans le tableau III ne sont pas mécaniquement admissibles ; la stabilité ne pourra être obtenue qu'au prix de la modification de l'état de contraintes initiales et de la génération de déformations irréversibles qui resteront contenues. Dans le cas contraire, la stabilité ne pourra être atteinte et le massif sera rompu.

Pour aller plus loin dans l'analyse, il faut exprimer le coefficient de pression des terres au repos en fonction de l'angle de frottement interne et du rapport de surconsolidation.

### Cas particulier des sols grenus ou normalement consolidés

Dans le cas des sols grenus ou normalement consolidés, la cohésion effective est généralement nulle et il est admis que le coefficient de

pression des terres au repos est lié à l'angle de frottement interne par la relation empirique :  $K_0 = 1 - \sin \varphi$ . Le critère de Mohr-Coulomb s'écrit alors :

$$F_{MC} = -\gamma z \sin \varphi (1 - \sin \varphi)$$

La quantité  $F_{MC}$  est toujours négative. L'état initial d'un sol grenu ou normalement consolidé se trouve donc bien dans le domaine élastique délimité par le critère de Mohr-Coulomb. En revanche, le critère de Drucker-Prager (avec l'hypothèse  $k = 0$ ) s'écrit :

$$F_{DP} = \gamma z \left[ \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}} - \alpha(3 - 2 \sin \varphi) \right]$$

Le signe de la quantité  $F_{DP}$  n'est plus évident et il dépend de la valeur du paramètre  $\alpha$ . Ce paramètre est souvent exprimé en fonction de l'angle de frottement interne grâce à une identification sur un chemin de contraintes fixé entre les critères de Mohr-Coulomb et Drucker-Prager (voir par exemple, Mestat, 1997). Le tableau IV met en évidence les conséquences du choix du chemin de contraintes sur le signe de  $F_{DP}$ .

Le tableau IV montre qu'à l'exception du chemin de compression triaxiale, les autres chemins conduisent à une expression de  $\alpha$  telle que l'état de contraintes initiales entre dans un domaine de contraintes « impossible », dès que l'angle de frottement interne dépasse la valeur

moyenne de  $38^\circ$ . Ce problème est important car, d'une part, la valeur de  $38^\circ$  est une valeur relativement faible pour les sables denses à moyennement denses et, d'autre part, il est souvent conseillé d'utiliser les relations déduites d'un chemin en déformation plane (cas 3 et 4 dans le tableau IV). La violation du critère de plasticité s'explique principalement par les faits suivants :

- l'état initial est défini classiquement à partir de corrélations déduites d'une analyse fondée en partie sur le critère de Mohr-Coulomb (différent de celui de Drucker-Prager) ;
- le domaine élastique défini par le critère de Drucker-Prager (suivant la valeur de ses paramètres, cf. tableau IV) peut être entièrement situé à l'intérieur du domaine d'élasticité de Mohr-Coulomb, ou le recouper en partie, ou encore englober complètement ce domaine. Ainsi, les états d'équilibre limite de Mohr-Coulomb et de Drucker-Prager peuvent être incompatibles.

Lorsque l'état des contraintes initiales est entré dans un domaine de contraintes impossible, le processus de résolution en comportement non linéaire va ramener progressivement cet état sur la frontière du domaine élastique en transformant l'excès de contraintes en déformations plastiques. Celles-ci sont, en général, faibles par rapport aux déformations induites par les véritables chargements du problème étudié et ces chargements extérieurs font même parfois rentrer l'état de contraintes actuel dans le domaine élastique. Néanmoins, il est toujours essentiel de vérifier ce point au cours de l'exploitation des résultats d'un calcul : la représentation des isovaleurs de déformations plastiques permet ainsi de prendre la mesure de la perturbation. Par exemple, la figure 4a présente le cas d'une fondation filante (déformation plane) supportée par un massif homogène dont le comportement est décrit par un modèle de Drucker-Prager ( $c' = 0$  kPa et  $\phi' = 40^\circ$ ). La figure 4b représente les isovaleurs de déformations plastiques générées pour ramener l'état de contraintes initiales sur la frontière du domaine d'élasticité ; ces isovaleurs sont rectilignes et elles croissent en fonction de la profondeur.

Pour éviter de telles perturbations, il peut être envisagé soit de n'utiliser que le critère de Mohr-Coulomb (ce que l'on conseille), soit d'introduire une petite cohésion pour les faibles épaisseurs de sol, de manière à ne pas dépasser la cote limite au-delà de laquelle une région du massif entrerait dans un domaine de contraintes impossible. Pour les couches plus profondes, il faut se rappeler que l'angle de frottement interne des matériaux grenus diminue avec l'augmentation de la pression de confinement (et donc avec la profondeur). Cette diminution est favorable, car elle permet de réduire ou de faire disparaître les perturbations.

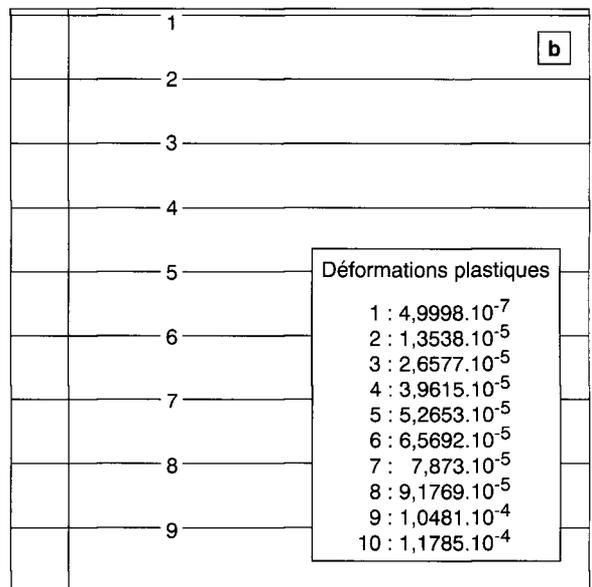
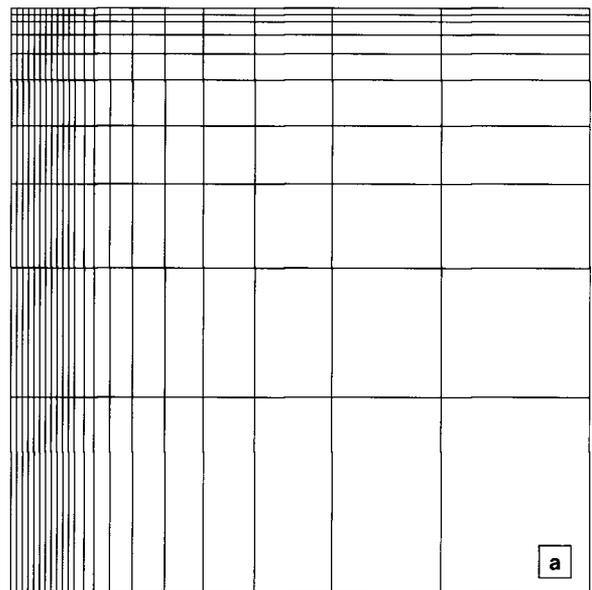


Fig. 4 - Calcul d'une fondation filante avec un état initial des contraintes ( $\phi = 40^\circ$ ) :

a. Maillage utilisé (693 nœuds et 210 quadrangles à 8 nœuds).

b. Isovaleurs des déformations plastiques générées par le critère de Drucker-Prager.

### Cas particulier des sols fins cohérents

Pour les sols fins cohérents, le comportement est caractérisé par une cohésion effective et un angle de frottement interne. Pour sa part, le coefficient de pression des terres au repos est lié à l'angle de frottement interne et au rapport de surconsolidation  $R_{oc}$  par la relation empirique :

$$K_0 = (1 - \sin \phi) \sqrt{R_{oc}}$$

L'expression du coefficient  $K_0$  devient plus compliquée car le rapport de surconsolidation varie en fonction de la profondeur. Pour un massif

**TABEAU IV**  
**Influence de la détermination du paramètre  $\alpha$  sur le signe de la quantité  $F_{DP}$**

Choix de calcul pour $\alpha$	$\alpha$	$F_{DP} / (\gamma z)$	Signe de $F_{DP}$
Compression triaxiale	$\frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3} (3 - \sin \varphi)}$	$-\frac{3 \sin \varphi}{\sqrt{3}} \left( \frac{1 - \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \right)$	$F_{DP} < 0$ dès que $\varphi > 0^\circ$
Extension triaxiale	$\frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3} (3 + \sin \varphi)}$	$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}} \left( \frac{-3 + 5 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \right)$	$F_{DP} \geq 0$ si $\varphi \geq 36,87^\circ$ $F_{DP} < 0$ si $\varphi < 36,87^\circ$
Déformation plane et dilatance nulle	$\frac{\sin \varphi}{3}$	$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}} \left( \frac{\sqrt{3} - 3 + 2 \sin \varphi}{\sqrt{3}} \right)$	$F_{DP} \geq 0$ si $\varphi \geq 39,34^\circ$ $F_{DP} < 0$ si $\varphi < 39,34^\circ$
Déformation plane et dilatance associée	$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{9 + 3 \sin^2 \varphi}}$	$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{3 - 2 \sin \varphi}{\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}} \right)$	$F_{DP} \geq 0$ si $\varphi \geq 35,86^\circ$ $F_{DP} < 0$ si $\varphi < 35,86^\circ$

de sol cohérent homogène à surface horizontale dont on admet que la surconsolidation  $\sigma'_p - \sigma'_{v0}$  est constante, ce rapport vaut :

$$R_{oc} = \frac{\sigma'_p}{\sigma'_{v0}} = \frac{\sigma'_p(z=0) + \gamma z}{\gamma z}$$

où  $\sigma'_p(z=0)$  est la pression de préconsolidation en surface. Le critère de Mohr-Coulomb à l'état initial s'écrit alors :

$$F_{MC} = \gamma z \left[ 1 - (1 - \sin \varphi) \sqrt{\frac{\sigma'_p(0) + \gamma z}{\gamma z}} \right] - \sin \varphi - (1 - \sin \varphi) \sin \varphi \sqrt{\frac{\sigma'_p(0) + \gamma z}{\gamma z}} - 2c \cos \varphi$$

Le signe de la quantité  $F_{MC}$  est plus difficile à établir. Toutefois, si l'on se réfère à la théorie de la poussée et de la butée, la cohérence des données géotechniques devrait assurer que l'état initial est compris entre les états limites de poussée  $K_a(z)$  et de butée  $K_p(z)$  et qu'il se trouve donc à l'intérieur ou sur la frontière du domaine élastique. Il convient tout de même de vérifier ces données avant de réaliser un calcul par éléments finis pour éviter la génération de déformations plastiques indues.

En revanche, pour le critère de Drucker-Prager, le problème est plus complexe. En effet, la quantité  $F_{DP}$  apparaît sous la forme :

$$F_{MC} = \gamma z \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ 1 - (1 - \sin \varphi) \sqrt{\frac{\sigma'_p(0) + \gamma z}{\gamma z}} \right] - \alpha \left[ 1 + 2(1 - \sin \varphi) \sqrt{\frac{\sigma'_p(0) + \gamma z}{\gamma z}} \right] \right\} - k,$$

et elle doit être étudiée comme précédemment en remplaçant les paramètres  $\alpha$  et  $k$  par leur expres-

sion en fonction des paramètres de Mohr-Coulomb ( $\varphi$  et  $c$ ). Le signe de  $F_{DP}$  dépend alors des valeurs respectives de la profondeur (en fait du produit  $\gamma z$ ), de la pression de préconsolidation en surface, de l'angle de frottement et de la cohésion. À cause du nombre de ces variables, les développements analytiques deviennent compliqués et n'apportent pas grand chose. Il vaut mieux laisser faire le code de calcul qui, avec des données précises, indiquera si l'état des contraintes initiales est entré dans un domaine impossible ou non. La réalisation d'un tel calcul est d'autant plus à conseiller que la plupart des codes de calcul ne peuvent pas traiter un coefficient de pression des terres au repos qui varie avec la profondeur. L'utilisateur doit fournir un coefficient par couche, qui correspond à une moyenne ou au coefficient calculé au milieu de la couche. Dans ce cas, le problème devient plus simple et on se ramène à l'étude du signe de  $F_{DP}$  entre les limites de chaque couche. L'analyse théorique est fastidieuse et encore une fois il suffit d'examiner les résultats d'un calcul par éléments finis sans chargement extérieur (ou avec un chargement très faible ou situé loin des zones supposées critiques) pour estimer l'influence du dépassement du critère de plasticité en termes de déformations plastiques.

### **Influence de l'état initial dans une simulation d'excavation**

Pour un modèle d'éléments finis, c'est lorsqu'on analyse la première étape d'une excavation dans un massif de sol que l'influence de l'état des contraintes initiales est la plus forte.

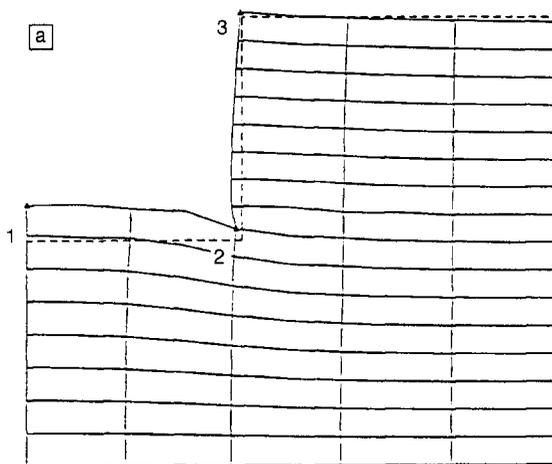
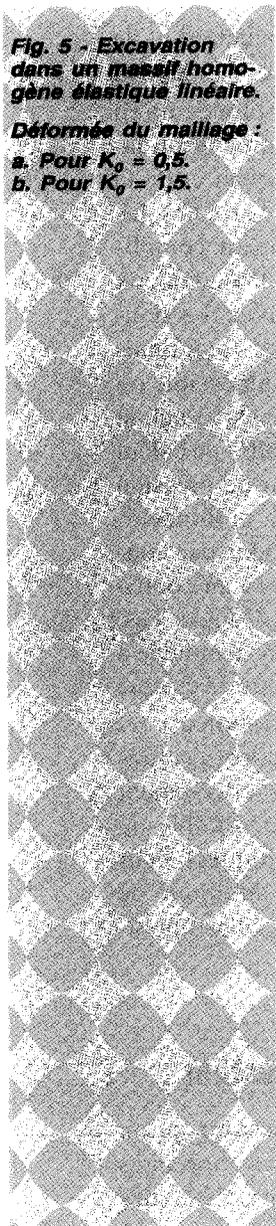
### Cas d'une excavation pour un ouvrage de soutènement

Considérons une excavation rectangulaire d'un massif homogène à surface horizontale en déformation plane. La simulation du creusement est effectuée grâce au calcul de forces équivalentes déterminées à partir de l'état de contraintes initiales dans le massif, défini par le poids volumique du sol  $\gamma$  et par le coefficient de pression des terres au repos  $K_0$  (supposé constant). Le système de forces obtenu a été décrit sur la figure 1b.

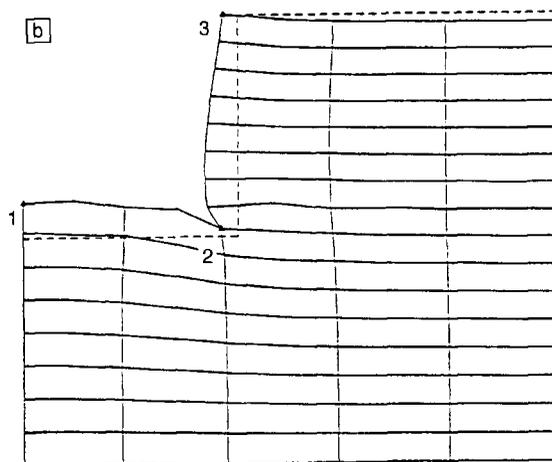
La distribution des forces équivalentes montre que le coefficient de pression des terres au repos est une donnée essentielle pour la modélisation du creusement. Son influence sur le calcul est

importante ; selon le modèle de comportement utilisé, le choix d'une valeur supérieure ou inférieure à 1 peut modifier voire inverser l'allure des résultats numériques (fig. 5). La valeur du coefficient  $K_0$  a ainsi une très nette influence sur les chemins de déformations et de contraintes suivis au cours d'une excavation :

- les déplacements augmentent avec  $K_0$ . Pour de faibles valeurs de ce coefficient, le mouvement du sol est essentiellement vertical. En revanche, pour de fortes valeurs, supérieures à 1, une composante horizontale importante se développe ;
- les contraintes horizontales croissent avec  $K_0$  ;
- l'étendue de la zone plastique augmente avec  $K_0$ .



Point	U (m)	V (m)
1	0	$1,662 \cdot 10^{-3}$
2	$-2,893 \cdot 10^{-4}$	$5,173 \cdot 10^{-4}$
3	$-8,904 \cdot 10^{-4}$	$2,037 \cdot 10^{-5}$



Point	U (m)	V (m)
1	0	$1,664 \cdot 10^{-3}$
2	$-8,044 \cdot 10^{-4}$	$3,734 \cdot 10^{-4}$
3	$6,991 \cdot 10^{-4}$	$4,444 \cdot 10^{-5}$

----- Maillage initial  
— Maillage déformé

0,005 m

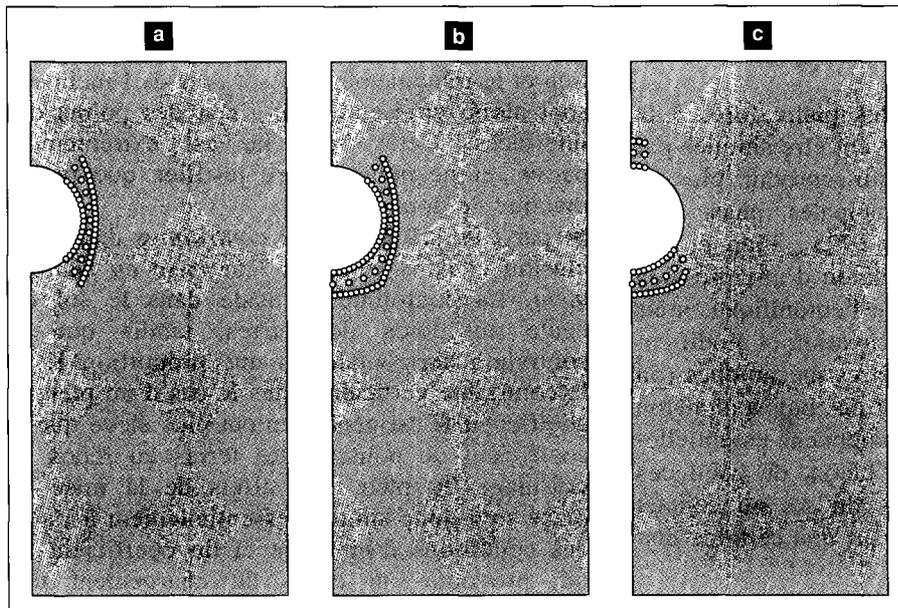


Fig. 6 - Influence du coefficient de pression des terres au repos sur l'apparition de la plasticité autour d'un tunnel circulaire excavé en une étape :

a. Pour  $K_0 = 0,5$ .

b. Pour  $K_0 = 1$ .

c. Pour  $K_0 = 1,5$ .

### Cas d'une excavation pour un ouvrage souterrain

Comme pour une excavation à ciel ouvert, les forces équivalentes ont pour effet de redistribuer le champ de contraintes au bord de la cavité :

- la contrainte normale diminue pour tendre vers zéro à la fin de l'excavation ;
- la contrainte tangentielle augmente ;
- les contraintes de cisaillement  $\sigma_{xy}$  (en déformation plane) restent généralement négligeables au bord d'une cavité régulière (cercle ou ellipse), puisqu'elles étaient supposées nulles à l'état initial (cas d'un terrain à surface horizontale).

L'influence du coefficient de pression des terres au repos, supposé constant dans le massif, peut être résumée de la manière suivante (d'après Wong et Kaiser, 1991) :

- pour  $K_0 < 1$ , la contrainte radiale initiale est plus grande que la contrainte tangentielle initiale à la clé. En revanche, c'est le contraire aux piédroits de la galerie. Par conséquent, lorsque la contrainte radiale diminue, la quantité  $|\sigma_1 - \sigma_3|$  est plus importante aux piédroits. C'est donc là que la quantité  $F_{MC}$  deviendra positive pour le champ de contraintes d'origine élastique et que la plasticité apparaîtra (fig. 6a) ;
- pour  $K_0 = 1$ , l'état initial des contraintes est isotrope. La quantité  $|\sigma_1 - \sigma_3|$  croît donc de manière identique et la plasticité a tendance à se développer uniformément au bord de la cavité, si la pression appliquée est uniforme. Mais, pour des forces de déconfinement variant avec la profondeur, la plasticité est localisée initialement dans la demi-couronne inférieure (fig. 6b) ;

- pour  $K_0 > 1$ , la contrainte horizontale initiale est plus grande que la contrainte verticale initiale. La plasticité apparaîtra donc près du radier puis en clef (fig. 6c).

Les déformées des maillages obtenues après convergence ont l'allure générale d'une ellipse dont les positions du grand axe et du petit axe dépendent de  $K_0$ .

### État initial et mise en place d'une inclusion dans le sol

Jusqu'à présent, on n'a considéré que des états de contraintes initiales régnant dans des massifs intacts, au sens qu'on n'y a pas encore entrepris de travaux. Mais, du point de vue de la modélisation des ouvrages de géotechnique, il faut aussi estimer les états de contraintes du sol remanié par certaines phases de construction, essentiellement celles qui consistent à placer des inclusions dans les massifs (renforcements divers, pieu, paroi moulée ou rideau de palplanches, etc.) et qui se situent chronologiquement avant l'application des chargements extérieurs (surcharges de surface ou excavations).

Pour quelques cas particuliers, il est possible de simuler de manière approximative la mise en place de structures dans le sol :

- les structures enterrées sont relativement simples à modéliser (fondations superficielles encastées, murs gravitaires ou cantilever, canalisations, etc.). Il suffit de procéder comme pour un remblaiement, c'est-à-dire d'activer au fur et à mesure de l'avancement des travaux des couches

horizontales d'éléments finis et de prévoir des éléments de contact aux différentes interfaces (fig. 7a) ;

► les parois moulées ou les pieux forés à la boue et coulés en place peuvent être simulés par une *succession de calculs* qui reproduit plus ou moins fidèlement les principales phases de construction (Gunn et al., 1993 ; Piau et al., 1996) : excavation et application d'une pression hydrostatique due à la boue bentonitique, mise en place du béton dans l'excavation et modification progressive des paramètres mécaniques (on passe de la boue à un béton frais, puis à un béton durci). Les incertitudes proviennent essentiellement du comportement du béton, de celui des interfaces et des propriétés du sol au contact (souvent imprégné de boue sur une certaine distance) (fig. 7b).

En revanche, pour d'autres modes de mise en place comme le battage ou le fonçage, les phénomènes complexes mis en jeu empêchent de modéliser d'aussi près les phases de travaux avec les codes de calcul actuels. Aussi, d'un point de vue pratique, l'hypothèse couramment admise consiste à élaborer le maillage du massif avec l'inclusion (ou les inclusions) déjà présente en son sein et à effectuer le calcul selon l'une des trois approches suivantes :

► par l'*application du poids propre* des différentes structures (dont les inclusions) et des sols qui interviennent dans la modélisation. Les poids

volumiques sont quelquefois appliqués de manière incrémentale. La technique de construction et le remaniement du sol près de l'inclusion sont alors représentés par l'état des points des interfaces. Cette approche est extrêmement pauvre et ne pourrait être justifiée que par le manque de données ;

► par l'*initialisation des contraintes* dans l'inclusion et dans le sol et leur *mise en charge*. La contrainte verticale dans le sol est égale au poids des terres, tandis que la contrainte horizontale est une proportion  $K$  de la contrainte verticale. Dans le cas d'un pieu, le coefficient  $K$  est généralement plus élevé que le coefficient de poussée des terres au repos au voisinage du pieu. Les effets de la mise en place sont donc simulés essentiellement à l'aide des conditions d'interface et du coefficient  $K$ , qui provoque au cours du chargement une étreinte latérale sur le fût du pieu et une poussée verticale sous la pointe. Cette poussée est totalement neutralisée par le poids du pieu. Une telle approche permet de transmettre un état de contraintes dans les éléments d'interface et a été utilisée pour approcher le comportement de pieux battus dans un calcul à rebours (Desai, 1977). Quand on ne dispose pas d'informations suffisantes pour estimer la valeur de  $K$ , on peut réaliser un premier calcul avec la valeur du coefficient de pression des terres au repos et ensuite effectuer une étude de sensibilité pour estimer approximativement l'effet de la réponse du sol sur le comportement de l'inclusion ;

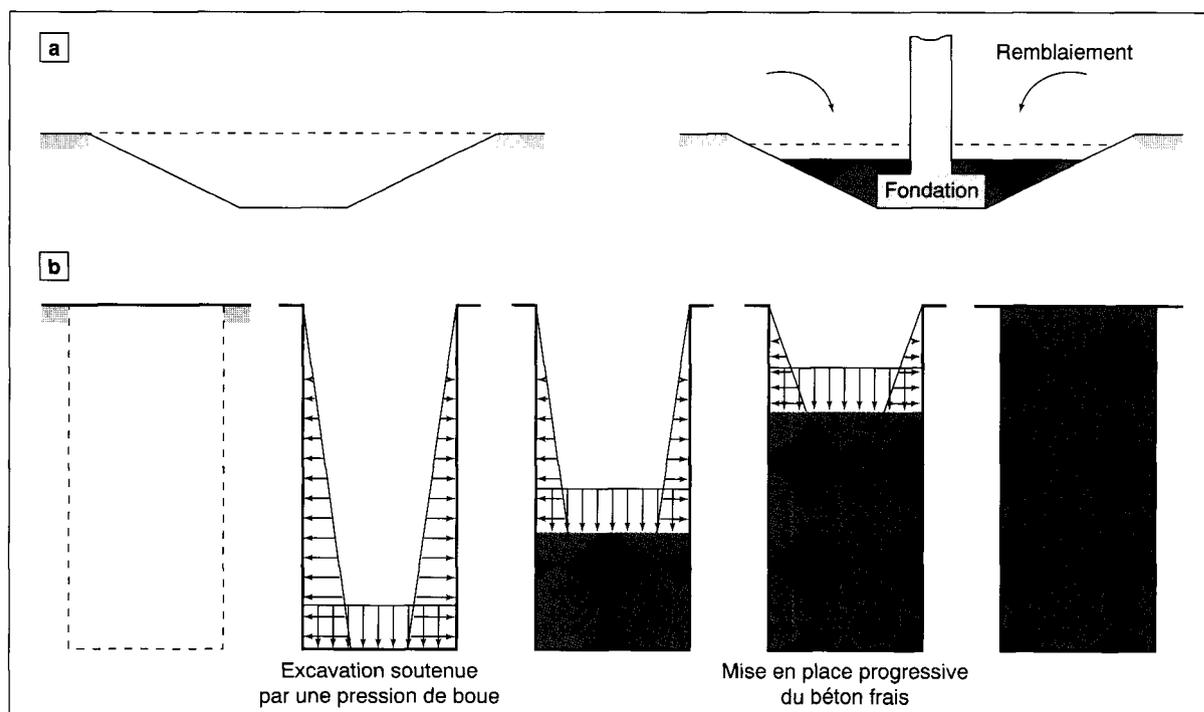


Fig. 7 - Exemples de simulations de mise en place d'une inclusion dans un massif de sol :  
a. Fondation en partie enterrée. b. Paroi moulée.

► par l'application des poids volumiques des matériaux et une modification des caractéristiques mécaniques du sol dans la zone remaniée par la construction (modification du module d'Young et des paramètres de résistance du sol). Cette approche a été employée pour la modélisation *a posteriori* des pieux battus (calculs à rebours) (Balaam et al., 1975).

Certaines de ces approches sont parfois combinées pour obtenir des modèles plus fins : par exemple, on peut *simultanément* modifier le coefficient  $K_v$ , le module d'Young, les paramètres de résistance du sol, les conditions d'interface et introduire des contraintes résiduelles dans les inclusions. Tout cela suppose de disposer de données nombreuses et précises. Mais, en conditions de projet, c'est la première ou mieux la seconde approche qui devrait être employée, avec une étude de sensibilité aux paramètres de calcul.

Par la suite, les déplacements provoqués par la simulation de la mise en place sont annulés et les contraintes récupérées pour l'initialisation du véritable calcul d'ouvrage.

## Conclusion

La prise en compte des contraintes initiales et leur mise en chargement, ou non, constituent des aspects essentiels de la modélisation par éléments finis des massifs de sol. Elles permettent en effet de représenter, par « l'initialisation du champ de contraintes », l'état des contraintes en place avant toute phase de travaux et, par « la mise en chargement des contraintes initiales », la tendance du sol à exercer une étreinte sur une inclusion, à pousser derrière un mur de soutènement ou à se déformer sous l'effet d'un creusement.

Le chargement de contraintes initiales peut également être utilisé pour simuler de manière approchée l'effet de certains phénomènes physiques (effet des pressions interstitielles, effet thermique ou dû au vieillissement).

Les exemples présentés dans cet article ont illustré ces différentes possibilités et ont souligné les précautions à prendre lorsqu'on doit combiner divers chargements avec un état de contraintes initiales. De même, des précautions doivent être prises lorsqu'on utilise l'initialisation des contraintes avec un critère de plasticité autre que celui de Mohr-Coulomb. L'utilisateur doit rester vigilant et veiller à employer à bon escient les moyens mis à sa disposition pour générer un état initial aussi représentatif que possible.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ALPAN I. (1967), The empirical evaluation of the coefficient  $K_0$  and  $K_{0r}$ , *Soils and Foundations*, vol. 7, 1, pp. 31-40.

ARAI K., OHTA H., KOJIMA K. (1987), Estimation of nonlinear constitutive parameters based on monitored movement of subsoil under consolidation, *Soils and Foundations*, vol. 27, 1, pp. 35-49.

ARAI K. (1993), Back-analysis of deformation and Mohr-Coulomb strength parameters based on initial strain method, *Soils and Foundations*, vol. 33, 3, pp. 130-138.

BAGUELIN F., JÉZÉQUEL J.-F., SHIELDS D.H. (1978), *The pressuremeter and foundation engineering*, Aedermanssdorff (CH), Trans. Tech. Publications, 618 pages.

BALAAM N.P., POULOS H.G., BOOKER J.R. (1975), Finite element analysis of the effects of installation on pile load-settlement behaviour, *Geotechnical Engineering*, vol. 6, pp. 33-48.

BROOKER E.W., IRELAND H.O. (1965), Earth pressures at rest related to stress history, *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 2, 1, pp. 1-15.

DESAI C.S. (1977), *Deep foundations*, in Numerical methods in geotechnical engineering, C.S. Desai et J.T. Christian (eds), McGraw Hill Book company, pp. 235-271.

GENS A., LEDESMA A., ALONSO E.E. (1996), Estimation of parameters in geotechnical backanalysis - II. Application to a tunnel excavation problem, *Computers and Geotechnics*, vol. 18, 1, pp. 29-46.

GIODA G. (1985), *Some remarks on back analysis and characterization problems*, Fifth Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Nagoya, Balkema, pp. 47-61.

GIODA G., SAKURAI S. (1987), Back analysis procedures for the interpretation of field measurements in geomechanics, *Int. Journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, vol. 11, 4, pp. 555-583.

GUNN M.J., SATKUNANATHAN A., CLAYTON C.R.I. (1993), *Finite element modelling of installation effects*, Retaining structures, Institution of civil engineers, C.R.I. Clayton (ed), Thomas Telford, London, pp. 46-55.

JAMIOLKOWSKI M., LADD C.C., GERMAINE J.T., LANCELLOTTA R. (1985), *New developments in field and laboratory testing of soils*, Proceedings of the 11th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, San Francisco, vol. 1, pp. 57-153.

JOSSEAUME H. (1976), *Comportement et méthodes de calcul des rideaux de soutènement*, Compte rendu des Journées des LPC sur les soutènements, Lyon, Rapport interne LCPC.

- JOSSEAUME H. (1998), *Propriétés mécaniques de l'argile des Flandres à Dunkerque et à Calais* (à paraître dans la Revue Française de Géotechnique).
- LADD C.C., FOOT R., ISIHARA K., SCHLOSSER F., POULOS H.G. (1977), *Stress deformation and strength characteristics*, Proceedings of the 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Tokyo, vol. 2, pp. 421-494.
- LEDESMA A., GENS A., ALONSO E.E. (1991), *Identification of parameters of nonlinear geotechnical models*, Computer Methods and Advances in Geomechanics, Beer, Booker and Carter Eds, Balkema, pp. 1005-1010.
- LEDESMA A., GENS A., ALONSO E.E. (1996a), *Estimation of parameters in geotechnical backanalysis - I. Maximum likelihood approach*, Computers and geotechnics, vol. 18, 1, pp. 1-27.
- LEDESMA A., GENS A., ALONSO E.E. (1996b), *Parameter and variance estimation in geotechnical backanalysis using prior information*, Int. Journal for numerical and analytical methods in geomechanics, vol. 20, 1, pp. 119-141.
- LUNNE T., LACASSE S., RAD N.S. (1989), *General report/Discussion session 2 : SPT, CPT, pressure-meter testing and recent developments in in-situ testing - Part 1 : all tests except SPT*, Proceedings of the 12th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Rio de Janeiro, vol. 4, pp. 2339-2403.
- MASSARCH K.R. (1975), New method for measurement of lateral earth pressure in cohesive soils, *Canad. Geotech. Journal*, vol. 12, 1, pp. 142-146.
- MAYNE P.W. (1984),  $K_0 - c_u / \sigma'_{v0}$  Trends for overconsolidated clays, *ASCE, Journal of geotechnical engineering division*, vol. 110, GT10, october, pp. 1511-1516.
- MAYNE P.W., KULHAWY F.H. (1982)  $K_0 - OCR$  relationships in soils, *ASCE, Journal of geotechnical engineering division*, vol. 108, GT6, june, pp. 851-872.
- MESTAT P. (1997), Note technique - Loi de Druker-Prager, *Revue Française de Génie Civil*, pp. 367-371.
- MISBAHI A., SHAO J.-F., HENRY J.-P. (1994), Application de la méthode d'inversion à la détermination des contraintes in situ en milieux anisotropes. *Revue française de géotechnique*, 67, pp. 41-48.
- PANET M., SANTA LUCIA D. (1968), Mesure des contraintes dans les massifs rocheux. *Bulletin de liaison des Laboratoires Routiers des Ponts et Chaussées*, juin-juillet, pp. 67-76.
- PIAU J.-M., HUMBERT P., DUBOUCHET A. (1996), *Modélisation des phases de construction d'un tunnel, CÉSAR-LCPC, Bibliothèque d'exemples*, Rapport interne LCPC, 8e édition.
- SAKURAI S. (1992), *Field measurement and back analysis*, Computer Methods and Advances in Geomechanics, Beer, Booker and Carter (eds), Balkema, pp. 1693-1701.
- SAKURAI S., AKUTAGAWA S., TOKUDOME O. (1994), *Characterization of yield function and plastic potential function by back analysis*, Computer Methods and Advances in Geomechanics, Siriwardane and Zaman (eds), Balkema, pp. 2011-2016.
- SCHMIDT B. (1966), Discussion of « Earth pressures at rest related to stress history », *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 3, 4, pp. 239-242.
- SERRATRICE J.-F., FLAVIGNY E. (1993), *Mesure en laboratoire du coefficient  $K_0$  sur une marne*, Geotechnical Engineering of Hard Soils - Soft Rocks, Anagnostopoulos et al. (eds), Balkema, pp. 787-793.
- SÈVE G., BLIVET J.-C., POUGET P., BENOÎT J., CRANSAC D. (1966), *Estimation de la contrainte horizontale dans une pente instable*, Landslides, Trondheim, Balkema, pp. 895-900.
- TERZAGHI K., PECK R.B. (1967), Chapter 12 - *Performance observations*, pp. 627-681 in Soil mechanics in engineering practice, John Wiley, second edition, 730 pages.
- WONG R.C.K., KAISER P.K. (1991), Performance assessment of tunnels in cohesionless soils, *ASCE, Journal of geotechnical engineering*, vol. 117, 12, pp. 1880-1901.

## ABSTRACT

### Initial stress states in soils and finite element calculation methods

PH. MESTAT

Non-linear finite element calculations require as data the initial state of the stresses and hydraulic loading in the soil. This paper starts by reviewing the characterization of the initial state and then describes the way in which this initial state influences the modelling of geotechnical structures, and in particular the consequences which result from the use of certain widely employed constitutive laws. Furthermore, specific initial stress states can be used to simulate certain mechanical effects caused by hydraulic or thermal processes or the alteration of materials (swelling, ageing). Examples of calculations performed with CÉSAR-LCPC are also given in order to illustrate the importance of accurately taking this state into account when simulating the installation of structures in the soil and more generally for the analysis of the operation of geotechnical structures.