

Modèle simplifié de chaussées fissurées

Armelle CHABOT

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

Quang Dat TRAN

Alain EHRLACHER

Laboratoire Analyse des Matériaux et Identification
ENPC/LCPC

RÉSUMÉ

Pour étudier le comportement des chaussées rigides et la remontée des fissures sur chaussées semi-rigides en vue de leurs renforcements, il faut pouvoir prédire l'état des contraintes au voisinage d'une fissure sous les sollicitations du trafic. Les modèles simplifiés usuels de dimensionnement des chaussées sont à cet égard peu adaptés et les solutions numériques actuelles par éléments finis 3D nécessitent des maillages très fins, coûteux en temps de calcul. Pour ces calculs, on propose ici l'adaptation d'un modèle simplifié de multicouches élastiques à la mécanique des chaussées. Ce modèle permet de réduire d'une dimension le problème réel et de rendre finies les valeurs des contraintes près des bords ou des fissures. Le massif de sol semi-infini est traité comme un massif élastique de Boussinesq. La résolution numérique est programmée sous Matlab. La validation est effectuée, avec succès, par comparaison avec des calculs par éléments finis 3D.

DOMAINE : Sciences pour le génie civil.

ABSTRACT

SIMPLIFIED MODEL FOR CRACKED PAVEMENTS

During traffic loads on pavements, in order to study the behavior of rigid pavements and the bottom-up crack phenomenon on semi-rigid pavement, it is essential to predict the stress state near cracks. Classical simplified models used in the pavement design method are, from this point of view, poorly adapted; moreover, current numerical solutions involving 3D finite element calculations require very fine meshes, which can be very time-consuming. For these calculations, it is proposed herein to adapt a simplified elastic multilayer model to the mechanic study of pavements. Such a model reduces the 3D real problem by one dimension and produces regular stress field near cracks at the interface of two different layers. The semi-infinite soil is modeled with the help of Boussinesq equations. All the equations are solved numerically under Matlab. Validation is successfully carried out by means of comparison with 3D finite element computations.

FIELD: Civil engineering sciences.

INTRODUCTION

Pour proposer des structures durables et diminuer les coûts de maintenance du réseau routier français dont un tiers est entretenu chaque année, il est en particulier nécessaire de bien connaître les différents processus de ruine des chaussées dont l'origine est souvent la présence de fissures. La plupart des méthodes d'entretien reposent sur plusieurs outils dont le noyau est un modèle mécanique trop simplifié par rapport au problème réel.

En effet, une chaussée est constituée d'une superposition de couches de différents matériaux. Son rôle essentiel est de répartir la charge pour diminuer les contraintes au niveau du sol. La méthode de dimensionnement des chaussées françaises, résumée dans un guide [LCPC-SETRA, 1994], utilise les résultats du modèle de Burmister [Burmister, 1943] de calcul de structures 2D axisymétriques. Ce modèle semi-analytique permet de calculer efficacement un multicouche élastique reposant sur un massif semi-infini et soumis à l'action d'une charge circulaire. Cependant, pour la prise en compte du caractère viscoélastique des couches bitumineuses [Duhamel et al., 2003 ; Duhamel et al., 2005], de leur endommagement [Bodin et al., 2004] ou encore de fissures, des développements importants sont nécessaires, au-delà des méthodes de dimensionnement usuelles [De Lurdes Antunes, 2002].

L'objectif premier de ce travail est la recherche d'une modélisation mieux adaptée à la prise en compte de fissures dans les chaussées. Afin que ce modèle soit aisément utilisable, on se place dans un cadre théorique et numérique simplifié. Cette modélisation doit servir à terme de noyau de calcul à un logiciel de diagnostic et d'entretien des chaussées usagées intégrant comme données initiales la géométrie de chaussées dégradées, quelles que soient l'origine de la fissuration (fatigue des matériaux, retrait des



□ **Figure 1**
Exemple d'une chaussée
semi-rigide fissurée.

matériaux hydrauliques, mouvement des sols, effets environnementaux, défauts de construction), son orientation (transversale, longitudinale) et sa densité (fissure unique ou non) (Fig. 1).

La modélisation de structures 3D de chaussée fissurée par éléments finis est possible [Batz-Villard, 1991 ; Vanelstrate *et al.*, 2000 ; Romanoschi et Li, 2002], mais la finesse du maillage près des fissures, nécessaire à l'obtention de résultats pertinents, rend la méthode très coûteuse en temps de calcul. Pour construire un logiciel rapide et efficace de diagnostic et d'entretien de chaussées usagées, on propose ici de développer un modèle spécifique.

Ce modèle, ainsi que la méthode de résolution de ses équations, sont d'abord expliqués brièvement. Quelques validations sont présentées ensuite avant de conclure.

MODÈLE SIMPLIFIÉ PROPOSÉ

Notations

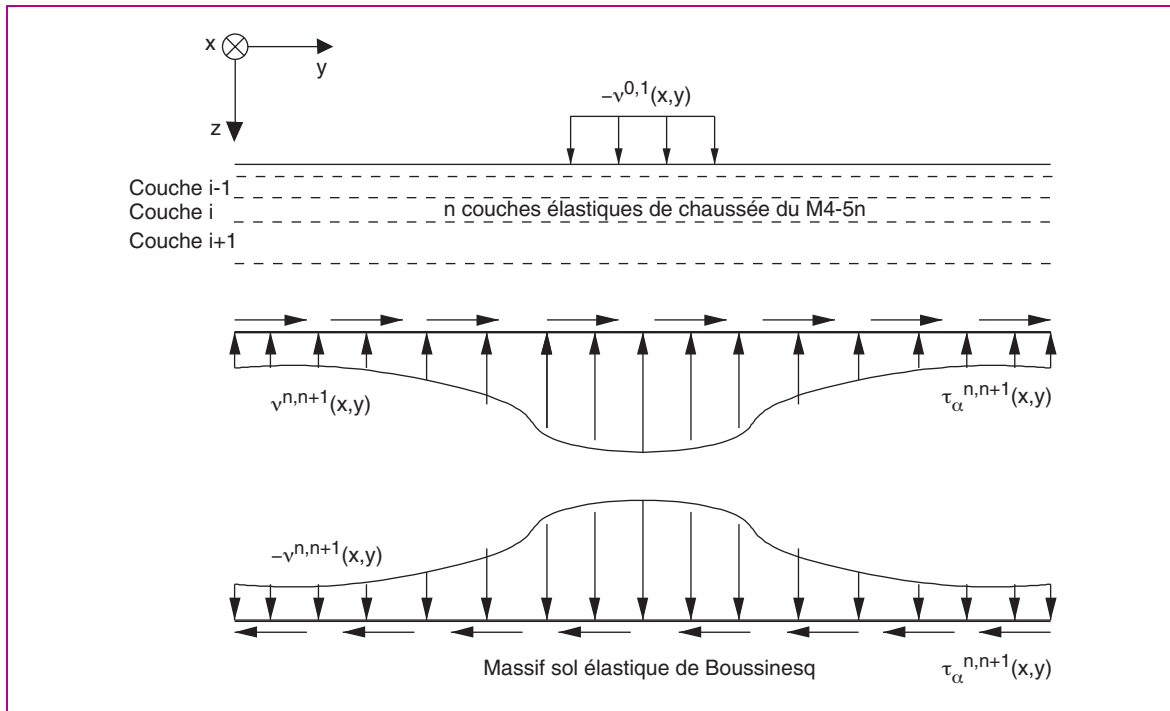
On note (x, y, z) les trois coordonnées d'un point dans le repère de référence $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. L'empilement des n couches du multicouche s'effectue selon la direction, orientée vers le bas, de l'axe \mathbf{e}_3 de ce repère. L'indice i désigne le numéro de la couche dans le jeu $\{1, \dots, n\}$ (Fig. 2). La couche i est composée de l'ensemble des points (x, y, z) tels que $z \in [h_i^-, h_i^+]$ ($h_{i+1}^- = h_i^+$). On note

$e^i = h_i^+ - h_i^-$ son épaisseur, et $\bar{h}^i = \frac{h_i^+ + h_i^-}{2}$ sa cote moyenne sur l'axe \mathbf{e}_3 . L'indice double $i, i + 1$ désigne l'interface entre la couche i et la couche $i + 1$. Dans la suite, on convient de noter les indices des composantes planes des tenseurs par des lettres grecques (par exemple, les composantes planes du tenseur de contrainte sont notées $\sigma_{\alpha\beta}$).

Les couches i de chaussée sont choisies élastiques linéaires et isotropes, de module d'Young E_i et de coefficient de Poisson ν_i . Le sol est élastique, linéaire et isotrope, caractérisé par son module d'Young E_s et son coefficient de Poisson ν_s .

Modèle multiparticulaire des matériaux multicouches à $5n$ équations d'équilibre (M4-5n) pour les couches de chaussées

Le modèle multiparticulaire des matériaux multicouches (M4) choisi pour ce problème de flexion est à cinq champs cinématiques par couche i ($i = 1, \dots, n$) ($5n$). Il fait partie de la famille des M4 développés à l'origine à l'ENPC par Chabot [1997] et Chabot et Ehrlacher [1998] pour l'étude en élasticité des effets de bord dans les structures composites. Si l'on note $u_j(x, y, z)$ ($j = 1, 3$) les champs



□ **Figure 2**
Schéma du modèle simplifié M4-5nB.

de déplacements 3D, la cinématique de ses couches i ($i = 1, \dots, n$) est composée, d'une part des déplacements moyens dans le plan et hors plan suivants :

$$U_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{e^i} u_{\alpha}(x, y, z) dz \quad \text{et} \quad U_3^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{e^i} u_3(x, y, z) dz$$

et, d'autre part, de ses rotations moyennes définies ainsi :

$$\Phi_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12(z - \bar{h}^i)}{e^{i3}} u_{\alpha}(x, y, z) dz$$

Le M4-5n peut être vu comme une superposition de n plaques de Reissner. Sa construction repose sur une approximation polynomiale des champs de contraintes membranaires de degré 1 en z . L'écriture des équations d'équilibre 3D donne alors respectivement pour les contraintes de cisaillement et la contrainte normale des polynômes de degré 2 et 3 en z par couche. Les coefficients de ces polynômes sont reliés, par couche, aux champs d'efforts et de moments généralisés classiques des plaques de Reissner. Ces types d'approximations ont l'avantage de définir aux interfaces $i, i + 1$ des contraintes de cisaillement $\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y)$ et d'arrachement $v^{i,i+1}(x, y)$ telles que l'on ait :

$$\tau_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) = \sigma_{\alpha 3}(x, y, h_i^+) = \sigma_{\alpha 3}(x, y, h_{i+1}^-) \quad \text{et} \quad v^{i,i+1}(x, y) = \sigma_{33}(x, y, h_i^+) = \sigma_{33}(x, y, h_{i+1}^-)$$

La fonctionnelle d'Hellinger-Reissner [Reissner, 1950] est utilisée pour obtenir les équations en variables ainsi généralisées. Le problème multicouche réel 3D se réduit alors à la détermination de champs en (x, y) par couche i et par interface entre couches $i, i + 1$, transformant ainsi l'objet réel 3D en un objet de géométrie 2D. De plus, les M4 « défocalisent » les effets de bord, ce qui se traduit par une valeur finie des contraintes au bord des plaques. Entre deux couches adjacentes de matériaux, l'écriture de critères de délaminage en terme d'efforts d'interface est ainsi possible [Chabot et *al.*, 2000 ; Caron et *al.*, 2004].

Sur des structures finies, Carreira et *al.* [2002] montrent, en introduisant un concept d'efforts généralisés éléments finis, que les champs du M4-5n sont très proches de ceux obtenus finement par éléments finis 3D. Tran [2001] a montré qu'ils conduisent à une bonne approximation des champs de contraintes dans les couches de chaussée, de dimension infinie dans le plan, reposant sur le sol.

En résumé, après combinaison des différentes équations d'équilibre et de comportement du M4-5n, on obtient l'écriture d'un système dans le plan (x, y), à cinq équations différentielles d'ordre 2 par couche i du multicouche de chaussée (i = 1, ..., n). Le lecteur pourra se référer à la thèse de Tran [2004] pour une description complète du modèle. Ci-dessous le système est écrit avec l'hypothèse que les forces de volume et les déformations anélastiques sont négligeables.

$$e_i E_i \left(\frac{1}{1-\nu_i^2} U_{1,11}^i + \frac{1}{2(1+\nu_i)} U_{1,22}^i + \frac{1}{2(1-\nu_i)} U_{2,12}^i \right) = \tau_1^{i-1,i} - \tau_1^{i,i+1} \quad (1)$$

$$e_i E_i \left(\frac{1}{2(1+\nu_i)} U_{2,11}^i + \frac{1}{1-\nu_i^2} U_{2,22}^i + \frac{1}{2(1-\nu_i)} U_{1,12}^i \right) = \tau_2^{i-1,i} - \tau_2^{i,i+1} \quad (2)$$

$$\frac{2e_i^2 E_i}{1-\nu_i^2} \Phi_{1,11}^i + \frac{e_i^2 E_i}{1+\nu_i} \Phi_{1,22}^i + \frac{e_i^2 E_i}{1-\nu_i} \Phi_{2,12}^i - \frac{10E_i}{1+\nu_i} (U_{3,1}^i + \Phi_1^i) = -10(\tau_1^{i-1,i} + \tau_1^{i,i+1}) \quad (3)$$

$$\frac{e_i^2 E_i}{1+\nu_i} \Phi_{2,11}^i + \frac{2e_i^2 E_i}{1-\nu_i^2} \Phi_{2,22}^i + \frac{e_i^2 E_i}{1-\nu_i} \Phi_{1,12}^i - \frac{10E_i}{1+\nu_i} (U_{3,2}^i + \Phi_2^i) = -10(\tau_2^{i-1,i} + \tau_2^{i,i+1}) \quad (4)$$

$$U_{3,11}^i + U_{3,22}^i + \Phi_{1,1}^i + \Phi_{2,2}^i = \frac{12(1+\nu_i)}{5e_i E_i} (\nu^{i-1,i} - \nu^{i,i+1}) - \frac{(1+\nu_i)}{5E_i} (\tau_{1,1}^{i,i+1} + \tau_{2,2}^{i,i+1} + \tau_{1,1}^{i-1,i} + \tau_{2,2}^{i-1,i}) \quad (5)$$

De même, on obtient l'écriture d'un système à trois équations différentielles d'ordre 1 par interface i, i + 1 (i = 1, ..., n - 1) comme suit :

$$U_1^{i+1} - U_1^i - \frac{5e_i}{12} \Phi_1^i - \frac{5e_{i+1}}{12} \Phi_1^{i+1} - \frac{e_i}{12} U_{3,1}^i - \frac{e_{i+1}}{12} U_{3,1}^{i+1} - \frac{e_i(1+\nu_i)}{12E_i} \tau_1^{i-1,i} + \frac{1}{8} \left(\frac{2e_i(1+\nu_i)}{E_i} + \frac{2e_{i+1}(1+\nu_{i+1})}{E_{i+1}} \right) \tau_1^{i,i+1} - \frac{e_{i+1}(1+\nu_{i+1})}{12E_{i+1}} \tau_1^{i+1,i+2} \quad (6)$$

$$U_2^{i+1} - U_2^i - \frac{5e_i}{12} \Phi_2^i - \frac{5e_{i+1}}{12} \Phi_2^{i+1} - \frac{e_i}{12} U_{3,2}^i - \frac{e_{i+1}}{12} U_{3,2}^{i+1} - \frac{e_i(1+\nu_i)}{12E_i} \tau_2^{i-1,i} + \frac{1}{8} \left(\frac{2e_i(1+\nu_i)}{E_i} + \frac{2e_{i+1}(1+\nu_{i+1})}{E_{i+1}} \right) \tau_2^{i,i+1} - \frac{e_{i+1}(1+\nu_{i+1})}{12E_{i+1}} \tau_2^{i+1,i+2} \quad (7)$$

$$U_3^{i+1} - U_3^i = -\frac{9e_i}{70E_i} \nu^{i-1,i} + \frac{13}{35} \left(\frac{e_i}{E_i} + \frac{e_{i+1}}{E_{i+1}} \right) \nu^{i,i+1} - \frac{9e_{i+1}}{70E_{i+1}} \nu^{i+1,i+2} \quad (8)$$

Les efforts à l'interface n, n + 1 entre la dernière couche n en bas du multicouche de chaussée et le sol sont des inconnues à déterminer. Ils dépendent de l'interaction (collage ou non) entre le sol et la structure de chaussée (cf. Fig. 2).

Équations de Boussinesq pour le massif de sol

Parce que le nombre d'inconnues à déterminer serait trop grand, une modélisation par un découpage du massif de sol semi-infini en plusieurs couches d'épaisseur de dimension finie M4-5n, bien que donnant de bonnes solutions [Tran, 2001], ne peut être envisagée pour construire un logiciel de calcul rapide. On a donc choisi d'utiliser un modèle analytique pour le massif de sol élastique semi-infini. La solution de Boussinesq, rappelée par exemple dans [Johnson, 1992], semble la plus pertinente.

Le raccordement des deux modèles se réalise alors par continuité ou non des champs de déplacement à l'interface n, n + 1 des n couches de chaussée et du sol (cf. Fig. 2). Trois équations supplémentaires donnent alors la relation entre les déplacements de surface $u_j^{\text{surface}}(x, y)$ ($j \in \{1, 2, 3\}$) du massif de

Boussinesq et les efforts d'interface $\tau_\alpha^{n,n+1}(x,y)$ et $v^{n,n+1}(x,y)$ du M4-5n comme suit dans le cas collé :

$$u_1^{\text{surface}}(x,y) = U_1^n(x,y) + \frac{e^n}{2} \Phi_1^n(x,y)$$

$$= \frac{(1+v_s)}{\pi E_s} \times \left(\begin{aligned} & -\frac{1-2v_s}{2} \int_S v^{n,n+1}(\xi,\eta) \frac{(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta \\ & + \int_S \tau_1^{n,n+1}(\xi,\eta) \frac{(x-\xi)^2 + (1-v_s)(y-\eta)^2}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)^{3/2}} d\xi d\eta \\ & + v_s \int_S \tau_2^{n,n+1}(\xi,\eta) \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)^{3/2}} d\xi d\eta \end{aligned} \right) \quad (9)$$

$$u_2^{\text{surface}}(x,y) = U_2^n(x,y) + \frac{e^n}{2} \Phi_2^n(x,y)$$

$$= \frac{(1+v_s)}{\pi E_s} \times \left(\begin{aligned} & -\frac{1-2v_s}{2} \int_S v^{n,n+1}(\xi,\eta) \frac{(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta \\ & + v_s \int_S \tau_1^{n,n+1}(\xi,\eta) \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)^{3/2}} d\xi d\eta \\ & + \int_S \tau_2^{n,n+1}(\xi,\eta) \frac{(1-v_s)(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)^{3/2}} d\xi d\eta \end{aligned} \right) \quad (10)$$

$$u_3^{\text{surface}}(x,y) = U_3^n(x,y)$$

$$= \frac{(1+v_s)}{\pi E_s} \times \left(\begin{aligned} & (1-v_s) \int_S v^{n,n+1}(\xi,\eta) \frac{1}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)^{1/2}} d\xi d\eta \\ & + \frac{(1-2v_s)}{2} \left(\begin{aligned} & \int_S \tau_1^{n,n+1}(\xi,\eta) \frac{(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta \\ & + \int_S \tau_2^{n,n+1}(\xi,\eta) \frac{(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \quad (11)$$

Nous appelons par la suite la combinaison du modèle M4-5n pour les couches de chaussées et du modèle de Boussinesq pour le sol, le M4-5nB.

Conditions aux limites du M4-5nB

Les efforts à l'interface 0, 1 entre l'extérieur et la première couche de la chaussée sont des données. Ils sont reliés aux conditions de chargement supposées connues d'une roue de poids lourd s'exerçant sur la chaussée (cf. Fig. 2).

Pour exprimer les différents systèmes de conditions aux limites des bords (ou fissures) du multicouche de chaussée en fonction des inconnues cinématiques et d'efforts d'interface, on utilise les équations de comportement de couche i du M4-5n.

Sur les bords (ou fissures verticales) non chargés des couches i ($i = 1, \dots, n$) de la chaussée, les conditions aux limites sont celles de bords libres. Dans ce cas, elles s'expriment sous la forme du

système à cinq équations par couche [Tran, 2004]. À titre d'exemple, elles sont présentées ci-dessous, quel que soit y , lorsque x devient infini (ou tend vers une valeur finie dans le cas d'une fissure) :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(U_{1,1}^i(x,y) + v_i U_{2,2}^i(x,y) \right) = 0 \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\Phi_{1,1}^i(x,y) + v_i \Phi_{2,2}^i(x,y) \right) = 0 \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(U_{1,2}^i(x,y) + U_{2,1}^i(x,y) \right) = 0 \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\Phi_{1,2}^i(x,y) + \Phi_{2,1}^i(x,y) \right) = 0 \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\Phi_1^i(x,y) + U_{3,1}^i(x,y) + \frac{(1+v_i)}{5E_i} \left(\tau_1^{i-1,i}(x,y) + \tau_1^{i,i+1}(x,y) \right) \right) = 0 \quad (16)$$

Sur les bords bloqués des couches i ($i = 1, \dots, n$) de la chaussée, par exemple là où le matériau est confiné et ne peut se déplacer selon la normale à sa section verticale, les conditions aux limites s'expriment aussi sous la forme du système à cinq équations par couche [Tran, 2004]. À titre d'exemple, elles sont présentées ci-dessous, quel que soit y , lorsque x devient infini (ou tend vers une valeur finie) :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U_1^i(x,y) = 0 \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Phi_1^i(x,y) = 0 \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(U_{1,2}^i(x,y) + U_{2,1}^i(x,y) \right) = 0 \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\Phi_{1,2}^i(x,y) + \Phi_{2,1}^i(x,y) \right) = 0 \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\Phi_1^i(x,y) + U_{3,1}^i(x,y) + \frac{(1+v_i)}{5E_i} \left(\tau_1^{i-1,i}(x,y) + \tau_1^{i,i+1}(x,y) \right) \right) = 0 \quad (21)$$

Généralisation des équations du M4-5nB

Pour écrire le système d'équations global M4-5nB, on utilise les équations d'interface (6) à (8) pour éliminer les efforts $\tau_1^{i,i+1}$, $\tau_2^{i,i+1}$ et $v^{i,i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$) dans les équations (1) à (5) ($i = 1, \dots, n$) du M4-5n que l'on associe aux équations (9) à (11) du modèle analytique de Boussinesq. Finalement, l'écriture du problème 3D initial est réduite à la résolution d'un problème 2D posé dans le plan constitué de $5n + 3$ équations à $5n + 3$ champs plans inconnus.

On note $X = \begin{bmatrix} U_1^1, U_2^1, \Phi_1^1, \Phi_2^1, U_3^1, \dots, U_1^i, U_2^i, \Phi_1^i, \Phi_2^i, U_3^i, \dots, U_1^n, U_2^n, \Phi_1^n, \Phi_2^n, U_3^n \end{bmatrix}_{(x,y)}$ le vecteur

de dimension $5n$ des inconnues cinématiques et $\Sigma = \begin{bmatrix} \tau_1^{n,n+1}, \tau_2^{n,n+1}, v^{n,n+1} \end{bmatrix}_{(x,y)}$, le vecteur

d'inconnues statiques de dimension 3 des points (x, y) de ce plan.

Après utilisation des conditions aux limites en chargement, connues à la surface du multicouche de chaussée, la généralisation du système se synthétise donc sous la forme d'un système global différentiel d'ordre 2 de dimension $5n$ suivant :

$$AA.X_{,11} + BB.X_{,22} + CC.X_{,12} + DD.X_{,1} + EE.X_{,2} + FF.X = GG.\Sigma_{,1} + HH.\Sigma_{,2} + II.\Sigma + JJ \quad (22)$$

avec AA, BB, CC, DD, EE, FF les matrices matériaux correspondantes, de dimension $5n \times 5n$, GG, HH, II les matrices matériaux de dimension $5n \times 3$ et JJ le vecteur de dimension $5n$ intégrant les conditions aux limites de chargement en haut du multicouche de chaussée dont les expressions détaillées sont données dans la thèse de Tran [2004].

Le système des trois équations linéaires complémentaires de Boussinesq est donné sous la forme suivante [Tran, 2004] :

$$M.X(x,y) = \int_S f(x,y,\xi,\eta) \Sigma(\xi,\eta) d\xi d\eta \quad (23)$$

avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 1 & 0 & e^n/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 & 0 & e^n/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de dimension $3 \times 5n$ et f la matrice 3×3

des expressions de (9) à (11).

Généralisée pour n couches, l'écriture discrétisée des cinq conditions aux limites par couche i , illustrées dans les équations (12) à (21) et ramenées, comme précédemment, à l'interface chaussée-sol par l'intermédiaire des équations (6) à (8) s'écrit sur chacun des bords du plan sous la forme des systèmes d'équations différentielles du premier ordre suivants :

Pour $x \rightarrow \infty, \forall y$

$$\begin{cases} CL_{x1} \cdot X'_1 + CL_{x2} \cdot X'_2 + CL_{x3} \cdot X = CL_{x4} \cdot \Sigma^{0,1} + CL_{x5} \cdot \Sigma & \text{bords bloqués} \\ CL_{x6} \cdot X'_1 + CL_{x7} \cdot X'_2 + CL_{x8} \cdot X = CL_{x9} \cdot \Sigma^{0,1} + CL_{x10} \cdot \Sigma & \text{bords libres} \end{cases} \quad (24)$$

Pour $\forall x, y \rightarrow \infty,$

$$\begin{cases} CL_{y1} \cdot X'_1 + CL_{y2} \cdot X'_2 + CL_{y3} \cdot X = CL_{y4} \cdot \Sigma^{0,1} + CL_{y5} \cdot \Sigma & \text{bords bloqués} \\ CL_{y6} \cdot X'_1 + CL_{y7} \cdot X'_2 + CL_{y8} \cdot X = CL_{y9} \cdot \Sigma^{0,1} + CL_{y10} \cdot \Sigma & \text{bords libres} \end{cases} \quad (25)$$

avec $\Sigma^{0,1} = {}^T [\tau_1^{0,1}, \tau_2^{0,1}, \nu^{0,1}]$ le vecteur des conditions aux limites de chargement et $CL_{xj}, CL_{yj} \ j \in [1, 10]$ les matrices coefficients.

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DU MODÈLE M4-5nB

Pour résoudre numériquement les équations du modèle M4-5nB, le plan de calcul, de largeur l et de longueur L , est discrétisé, dans le cas présent, en N intervalles selon l'axe des x et N intervalles selon l'axe des y (Fig. 3). La méthode des différences finies est utilisée. Les inconnues sont les $(5n + 3)$ valeurs aux nœuds (x_k, y_l) ($k \in [1, N + 1], l \in [1, N + 1]$) des champs cinématiques et statiques inconnus sur cette surface.

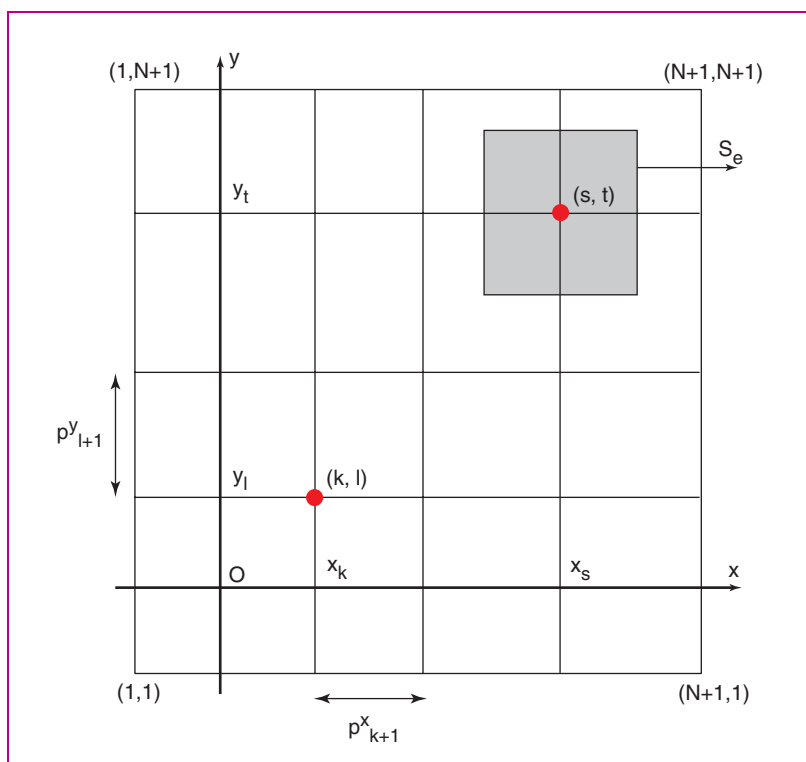


Figure 3
Discrétisation du plan de calcul du modèle M4-5nB.

On note ci-dessous \mathbf{X} et Σ , respectivement, les vecteurs d'inconnues cinématiques de dimension $5n(N+1)^2$ et d'inconnues statiques de dimension $3(N+1)^2$ tels que l'on ait :

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \left[\mathbf{X}_{1,1} \mathbf{X}_{1,2} \dots \mathbf{X}_{k,l} \dots \mathbf{X}_{N+1,N+1} \right] \text{ avec } \mathbf{X}_{k,l} = \mathbf{X}(x_k, y_l)$$

$$\Sigma = \mathbf{T} \left[\Sigma_{1,1} \Sigma_{1,2} \dots \Sigma_{k,l} \dots \Sigma_{N+1,N+1} \right] \text{ avec } \Sigma_{k,l} = \Sigma(x_k, y_l)$$

Le système numérique global du problème est donc de dimension $(5n+3)(N+1)^2$.

Traitements numériques des 5n équations des couches de chaussée

Pour résoudre numériquement le système (22) avec la discrétisation choisie précédemment, on utilise la méthode des différences finies de Newmark (pour la valeur de $\alpha = \frac{1}{2}$) [Newmark, 1959], dont l'erreur de la méthode est de l'ordre du pas de discrétisation au cube, comme suit pour une grandeur quelconque \mathbf{Y} :

$$\frac{\mathbf{Y}_{(k+1,l)'1} + \mathbf{Y}_{(k,l)'1}}{2} = \frac{\mathbf{Y}_{(k+1,l)} - \mathbf{Y}_{(k,l)}}{p_{k+1}^x}, p_{k+1}^x = x_{k+1} - x_k \quad (26)$$

$$\frac{\mathbf{Y}_{(k,l+1)'2} + \mathbf{Y}_{(k,l)'2}}{2} = \frac{\mathbf{Y}_{(k,l+1)} - \mathbf{Y}_{(k,l)}}{p_{l+1}^y}, p_{l+1}^y = y_{l+1} - y_l \quad (27)$$

En utilisant les relations (26) et (27), on transforme en un système d'équations linéaires discrétisées le système d'équations différentielles du second ordre (22).

Pour illustrer, réécrivons l'équation (22) pour les couples de points (x_k, y_l) et (x_{k+1}, y_l) , schématiquement comme suit :

$$AA \cdot \mathbf{X}_{(k,l)'11} + BB \cdot \mathbf{X}_{(k,l)'22} + \dots = GG \cdot \Sigma_{(k,l)'1} + HH \cdot \Sigma_{(k,l)'2} + \dots \quad (28)$$

$$AA \cdot \mathbf{X}_{(k+1,l)'11} + BB \cdot \mathbf{X}_{(k+1,l)'22} + \dots = GG \cdot \Sigma_{(k+1,l)'1} + HH \cdot \Sigma_{(k+1,l)'2} + \dots \quad (29)$$

En prenant la somme de ces deux équations (28) et (29) et en utilisant (26) (en substituant $\mathbf{Y}_{,1}$ par $\mathbf{X}_{,11}$ puis \mathbf{Y} par Σ), on fait disparaître les dérivées du second ordre selon x :

$$2AA \frac{\mathbf{X}_{(k+1,l)'1} - \mathbf{X}_{(k,l)'1}}{p_{k+1}^x} + BB(\mathbf{X}_{(k,l)'22} + \mathbf{X}_{(k+1,l)'22}) \dots = \quad (30)$$

$$2GG \frac{\Sigma_{(k+1,l)} - \Sigma_{(k,l)}}{p_{k+1}^x} + HH(\Sigma_{(k,l)'2} + \Sigma_{(k+1,l)'2}) \dots$$

Puis on utilise la même opération pour faire disparaître les dérivées du premier ordre selon x . Pour les dérivées selon y , la méthode est analogue en utilisant (27).

Le système linéaire résultant est alors un système de $5n(N-1)^2$ équations dont le détail est donné dans le mémoire de thèse de Tran [2004].

Traitement numérique des équations de Boussinesq

Considérons maintenant la discrétisation de la surface S en $(N+1)^2$ surfaces élémentaires S_e (cf. Fig. 3). La surface élémentaire rectangulaire $S_e(x_s, y_t)$, correspondant au point courant intérieur (x_s, y_t) , est définie par la surface $\left[x_{s-\frac{1}{2}}, x_{s+\frac{1}{2}} \right] \times \left[y_{t-\frac{1}{2}}, y_{t+\frac{1}{2}} \right]$ ($1 < s < N+1$) et ($1 < t < N+1$). Sur les bords de la surface S , on définit les surfaces élémentaires suivantes :

➤ pour $1 < t < N+1$:

$$S_e^{1,t} = \left[x_1, x_{\frac{3}{2}} \right] \times \left[y_{t-\frac{1}{2}}, y_{t+\frac{1}{2}} \right] \text{ et } S_e^{N+1,t} = \left[x_{N+\frac{1}{2}}, x_{N+1} \right] \times \left[y_{t-\frac{1}{2}}, y_{t+\frac{1}{2}} \right]$$

➤ pour $1 < s < N + 1$:

$$S_e^{s,1} = \left[x_{s-\frac{1}{2}}, x_{s+\frac{1}{2}} \right] \times \left[y_1, y_{\frac{3}{2}} \right] \text{ et } S_e^{s,N+1} = \left[x_{s-\frac{1}{2}}, x_{s+\frac{1}{2}} \right] \times \left[y_{N+\frac{1}{2}}, y_{N+1} \right]$$

➤ sur les quatre coins :

$$S_e^{1,1} = \left[x_1, x_{\frac{3}{2}} \right] \times \left[y_1, y_{\frac{3}{2}} \right]; S_e^{1,N+1} = \left[x_1, x_{\frac{3}{2}} \right] \times \left[y_{N+\frac{1}{2}}, y_{N+1} \right]$$

$$S_e^{N+1,N+1} = \left[x_{N+\frac{1}{2}}, x_{N+1} \right] \times \left[y_{N+\frac{1}{2}}, y_{N+1} \right]; S_e^{N+1,1} = \left[x_{N+\frac{1}{2}}, x_{N+1} \right] \times \left[y_1, y_{\frac{3}{2}} \right]$$

Pour faciliter les intégrations qui peuvent s'effectuer analytiquement, on suppose, dans une première approximation, que les efforts d'interface écrits dans le vecteur Σ restent constants sur ces surfaces élémentaires S_e . On obtient ainsi les relations suivantes :

$$\int_S f(x, y, \xi, \eta) \Sigma(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_1^{(N+1)^2} \int_{S_e} f(x, y, \xi, \eta) \Sigma(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (31)$$

$$\approx \sum_1^{(N+1)^2} \Sigma(\xi_s, \eta_t) \left(\int_{S_e} f(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \right)$$

Par changement de variables, l'intégrale des fonctions contenues dans $f(x, y, \xi, \eta)$ se calcule aisément analytiquement sur S_e et conduit ainsi à la forme discrétisée de (23) au point (x_k, y_l) :

$$M \cdot X_{k,l} = \sum_1^{(N+1)^2} N_{k,l,s,t} \cdot \Sigma_{s,t} \quad \forall k = 1, N+1, \forall l = 1, N+1 \quad (32)$$

Si N représente la matrice (3×3) des expressions de f intégrées.

L'assemblage final donne alors $3(N+1)^2$ équations linéaires posées sous la forme suivante :

$$K_4 \cdot X = K_5 \cdot \Sigma \quad (33)$$

avec K_4 et K_5 les matrices respectivement de dimensions $3(N+1)^2 \times 5n(N+1)^2$ et $3(N+1)^2 \times 3(N+1)^2$.

Traitement numérique des conditions aux limites

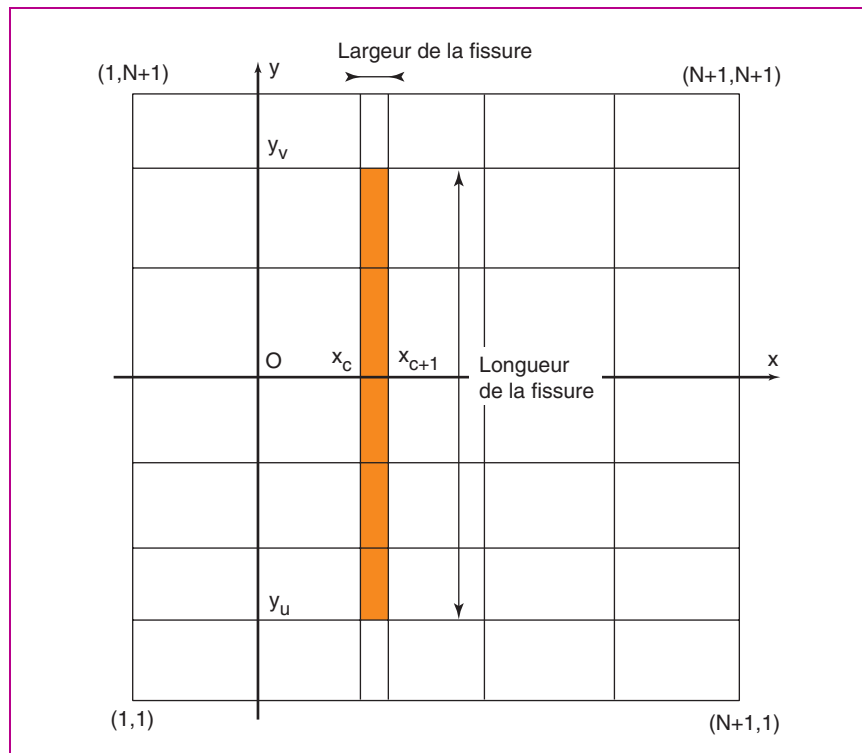
Pour rendre les équations de conditions aux limites (24) et (25) linéaires, on utilise, comme précédemment, l'approximation de Newmark et les relations obtenues pour les $5n$ couches de chaussées. En effet, avec les relations (26) et (30), on peut écrire, par exemple, les termes $X_{(k,j)1}$ et $X_{(k+1,j)1}$ de (24) et (25) en fonction des termes $X_{(k,j)2}$, $X_{(k,j)22}$, $X_{(k+1,j)2}$, $X_{(k+1,j)22}$ ne faisant intervenir que des dérivées selon y . Puis, après avoir remplacé ces valeurs dans les équations (24) et (25) alors discrétisées, si l'on utilise deux fois la relation (27), on peut faire disparaître les termes de dérivées selon y . On obtient ainsi, sur les quatre bords du plan discrétisé (cf. Fig. 3), $4 \times 5nN$ équations de plus.

Ces dernières équations, ajoutées au système obtenu pour les équations des couches de chaussées, fournissent alors le système général de $5n(N+1)^2$ équations de la forme matricielle suivante :

$$K_1 \cdot X = K_2 \cdot \Sigma + K_3 \quad (34)$$

avec K_1 , K_2 et K_3 les matrices respectivement de dimensions $5n(N+1)^2 \times 5n(N+1)^2$, $5n(N+1)^2 \times 3(N+1)^2$ et $5n(N+1)^2 \times 1$.

Pour introduire des fissures longitudinales ou transversales par rapport au sens de roulement de la charge, verticales sur l'épaisseur d'une ou plusieurs couches de chaussée, on considère que les lèvres de la fissure constituent deux bords libres. Ces deux bords sont supposés distants d'un intervalle non nul mais étroit, de l'ordre d'un à plusieurs millimètres selon le type de chaussée à examiner. Dans le schéma discrétisé, la fissure est ainsi numériquement représentée par une discontinuité entre deux lignes de points représentant les bords de la fissure (Fig. 4). Elle est supposée être dans la zone $x \in [x_u, x_{u+1}]$ et $y \in [y_v, y_v]$, $1 \leq u < v \leq N+1 \quad \forall c \in [1, N]$. Les indices u et v représentent les points de départ et d'arrivée de la fissure dans le plan pour le ou les numéros de couche concernées. Pour ces lignes de points des lèvres de la fissure, l'introduction de fissure dans le système d'équations



□ **Figure 4**
Schéma d'introduction de fissure
dans le plan de calcul M4-5nB.

précédent (34) consiste alors à supprimer les équations correspondantes et à les remplacer par des lignes de points de conditions aux limites de type bord libre données dans les systèmes précédents (24) et (25) alors discrétisés.

Bilan de la résolution numérique du modèle M4-5nB

Des équations (33) et (34), le M4-5nB se résume finalement au système linéaire à $(5n + 3)(N + 1)^2$ équations à résoudre de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{X} = [\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_5^{-1} \mathbf{K}_4]^{-1} \cdot \mathbf{K}_3 \\ \mathbf{\Sigma} = \mathbf{K}_5^{-1} \mathbf{K}_4 \cdot \mathbf{X} \end{cases} \quad (35)$$

où \mathbf{X} et $\mathbf{\Sigma}$ sont respectivement les vecteurs d'inconnues cinématiques de dimension $5n(N + 1)^2$ et d'inconnues statiques de dimension $3(N + 1)^2$ écrits précédemment, \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 , \mathbf{K}_4 et \mathbf{K}_5 , les matrices matériaux respectivement de dimension $5n(N + 1)^2 \times 5n(N + 1)^2$, $5n(N + 1)^2 \times 3(N + 1)^2$, $3(N + 1)^2 \times 5n(N + 1)^2$ et $3(N + 1)^2 \times 3(N + 1)^2$ et \mathbf{K}_3 le vecteur des chargements de dimension $5n(N + 1)^2$.

Pour la validation de ce modèle, la résolution est par la suite programmée par Tran [2004] sous Matlab.

VALIDATIONS

Dans le cas de structures multicouches, de nombreux auteurs, depuis plus de 30 ans notamment dans le domaine des matériaux composites, ont montré que la présence de bords libres ou de fissures, joints à l'hétérogénéité du comportement du matériau de part et d'autre des interfaces entre couches, engendre des concentrations de contraintes hors plan aux interfaces non négligeables qu'il est nécessaire d'étudier si l'on veut prévoir la rupture de ces structures (voir par exemple [Pagano, 1978] ou [Leguillon et Sanchez-Palencia, 1985]). Aussi, pour ne pas alourdir la présentation des résultats de validation des calculs, on a choisi par la suite de les illustrer uniquement sur ces champs de contraintes hors plans aux interfaces. On trouvera en particulier dans Chabot [1997], Carreira et al. [2002] et Tran [2004] la validation des autres champs du M4-5n et M4-5nB par rapport à des calculs effectués par éléments finis.

Dans la suite des exemples traités, la charge considérée est prise sous la forme d'une pression uniforme sur une surface carrée de côté $2a$ ou rectangulaire de longueur $2a$ (suivant le sens de roulement) et de largeur $2b$. Le massif sol élastique semi-infini est une plate-forme support de classe 2. Il a pour module d'Young $E_s = 50 \text{ MPa}$ et coefficient de Poisson $\nu_s = 0,35$ [LCPC-SETRA, 1994]. Selon le cas, les calculs sont comparés aux résultats de calculs 2D axisymétriques du logiciel Alizé ou éléments finis 3D du code CESAR-LCPC.

Cas 3D non fissuré : une couche élastique sur un massif de sol

Dans ce premier cas, la charge choisie correspond à la charge française de référence d'une des roues de poids lourd d'un demi-essieu à roues jumelées de 65 kN [LCPC-SETRA, 1994]. Elle est répartie de façon quasi-équivalente pour les calculs effectués sous Alizé en axisymétrie et les calculs réalisés avec le M4-5nB sur une surface carrée de côté $a = 0,11079 \text{ m}$ et de pression $q = 0,662 \text{ MPa}$. On considère une couche élastique $e_c = 0,08 \text{ m}$, $E_c = 5\,400 \text{ MPa}$ et $\nu_c = 0,35$ reposant sur la plate-forme support de classe 2.

Le maillage 3D EF, constitué d'éléments volumiques à 20 nœuds, contient 16×16 mailles dans le plan et 18 mailles suivant la verticale. Les dimensions transversales sont de $2,4 \text{ m}$, soit, sur chaque côté, 10 fois le rayon de la charge. La profondeur du sol est de 6 mètres.

Pour le maillage du M4-5nB, il suffit seulement de 10×10 mailles dans le plan.

On présente sur la figure 5, dans le plan $y = 0$, les contraintes d'interface chaussée-sol du M4-5nB comparées à celles de calculs EF 3D et Alizé (avec une surface circulaire de charge équivalente dans ce dernier cas).

On constate une bonne concordance des résultats obtenus, aussi bien pour le logiciel Alizé que pour le modèle simplifié M4-5nB, environ 100 fois plus rapidement que par éléments finis 3D. On remarque toutefois que l'intensité des cisaillements en bord de charge est surévaluée dans le cas axisymétrique de Burmister par rapport à la solution EF et M4-5nB. Ce résultat est probablement dû à la forme de la charge, qui n'est pas répartie dans les différents modèles sur la même surface (surface carrée dans le cas des calculs faits par les EF et le M4-5nB, surface circulaire pour Alizé). Une analyse

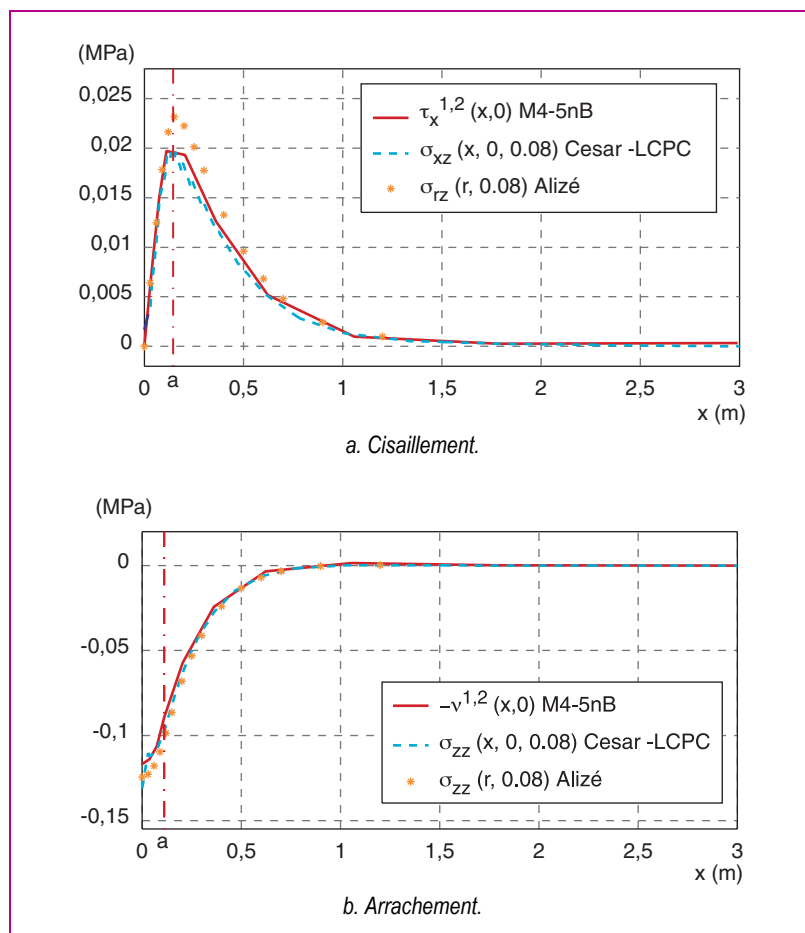


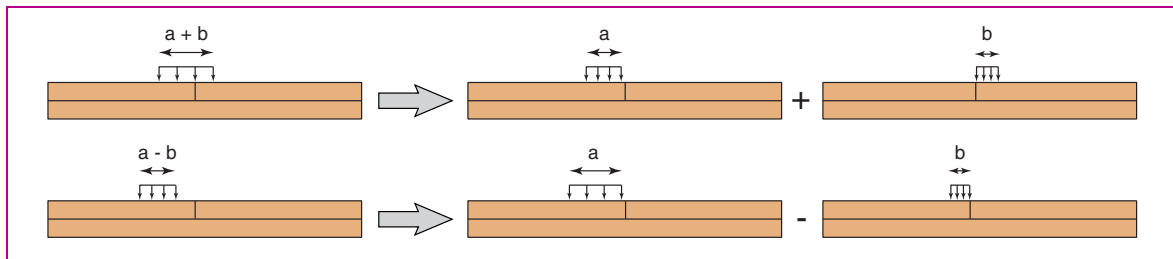
Figure 5
Cas 3D non fissuré : comparaison entre les efforts d'interface chaussée-sol du M4-5nB, de ceux des EF 3D et de ceux du logiciel Alizé avec charge équivalente circulaire.

plus détaillée et réelle des répartitions des chargements et de leur surface lors du contact pneu-chaussée est sans aucun doute nécessaire pour avancer plus loin dans ces hypothèses. Cela fait l'objet d'autres projets de travaux de recherche au LCPC.

Cas du bicouche 3D de chaussée fissurée verticalement en bas

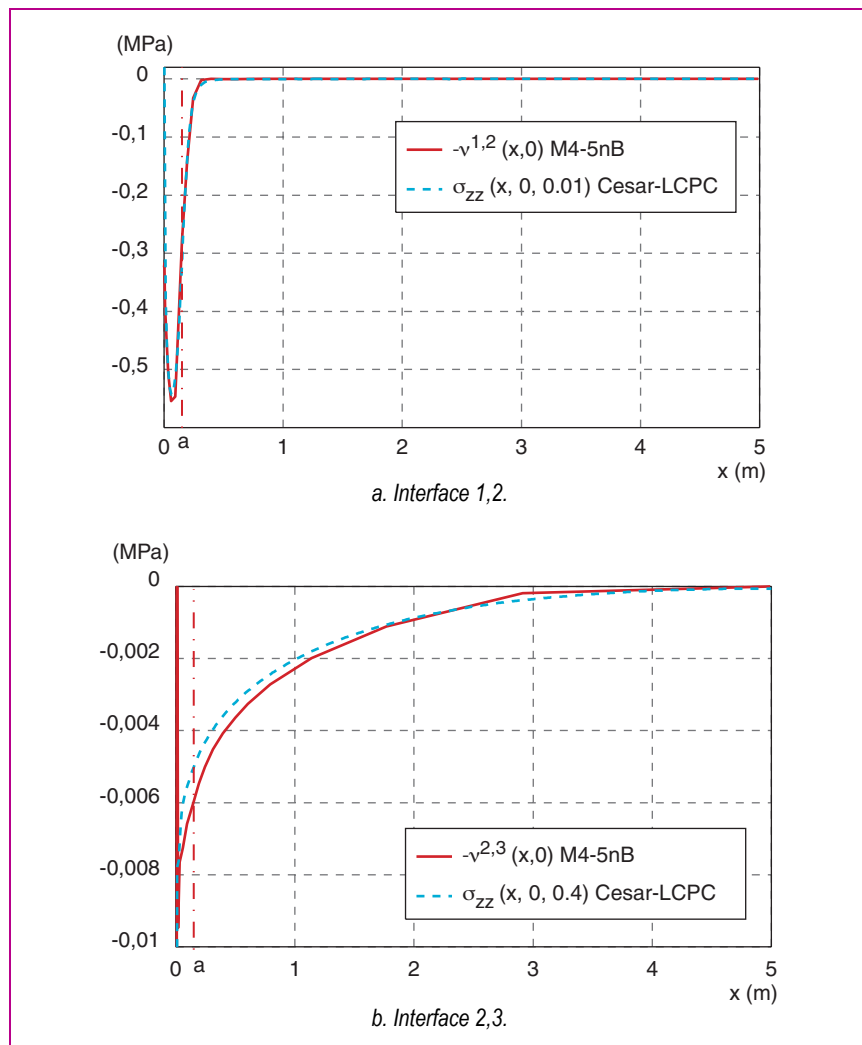
Étant en élasticité linéaire, on peut superposer différents cas de chargement. Ainsi, pour connaître l'état de contrainte sous la fissure lors du déplacement de la charge roulante, il est suffisant d'étudier le cas où la charge se trouve à côté de la fissure, comme décrit sur la figure 6, dans le cas où la fissure n'arrive pas à la surface du sol.

Sur la figure 7, on présente les validations d'une structure de chaussée semi-rigide fissurée « par le bas ». La charge est considérée rectangulaire ($a = 0,15$ m et $b = 0,11$ m) de pression $q = 0,662$ MPa. La chaussée est constituée de 2 couches élastiques ($e_1 = 0,1$ m, $E_1 = 9\,300$ MPa et $\nu_1 = 0,35$, $e_2 = 0,3$ m, $E_2 = 23\,000$ MPa et $\nu_2 = 0,35$) reposant sur le massif de sol.



□ **Figure 6**

Schéma de décomposition du chargement.



□ **Figure 7**

Comparaison en $y = 0$ aux interfaces entre couches des efforts d'arrachement du M4-5nB et de ceux des EF 3D (cas seconde couche fissurée).

Le maillage EF 3D est constitué de 1 965 éléments volumiques à 20 nœuds et de 7 080 éléments à 15 nœuds. Hors de la zone de chargement, les éléments sont à 15 nœuds, d'intervalles maximum de 1 m à 0,03 m. Sous la charge et la fissure, le maillage contient 4×7 mailles cubiques dans le plan. 20 mailles sont prises suivant la hauteur d'empilement. La profondeur du sol est de 10 m. Les dimensions transversales, de 5 m, sont choisies afin d'être suffisantes.

Le maillage plan du M4-5nB contient 24×32 mailles. Les conditions aux limites sont choisies de type bords bloqués.

Le calcul de chaussée fissurée, bidimensionnel dans cette modélisation, montre une très bonne approximation des champs de contrainte aux différentes interfaces (cf. Fig. 7). La solution, programmée sous Matlab, est obtenue par le M4-5nB environ 10 fois plus rapidement que celle issue d'un calcul EF 3D maillé finement près de la fissure. L'application de cette configuration de fissuration verticale en base du bicouche de chaussée a servi à l'analyse des contraintes dans le cadre d'une recherche sur le renforcement des chaussées semi-rigides [Florence et al., 2004].

APPLICATION À L'ANALYSE DES CONTRAINTES 3D D'UNE CHAUSSÉE COMPOSITE FISSURÉE VERTICALEMENT EN HAUT

En partenariat avec l'industrie cimentière, en vue d'obtenir un meilleur dimensionnement des structures composites (béton de ciment sur grave-bitume) substituables aux chaussées classiques, la durabilité du collage « Blanc/Noir » a été étudiée [de Larrard et al., 2001 ; Pouteau et al., 2004]. Un essai en laboratoire, un essai sur chaussée réelle et un essai de type FABAC ont été élaborés et analysés [Pouteau, 2004]. Pour la détermination de la loi de comportement en fatigue du collage, l'application du modèle simplifié M4-5n a permis de dimensionner, de façon optimisée du point de vue de la rupture, les éprouvettes de laboratoire bimatériaux en vue d'en favoriser le délaminage [Pouteau et al., 2002].

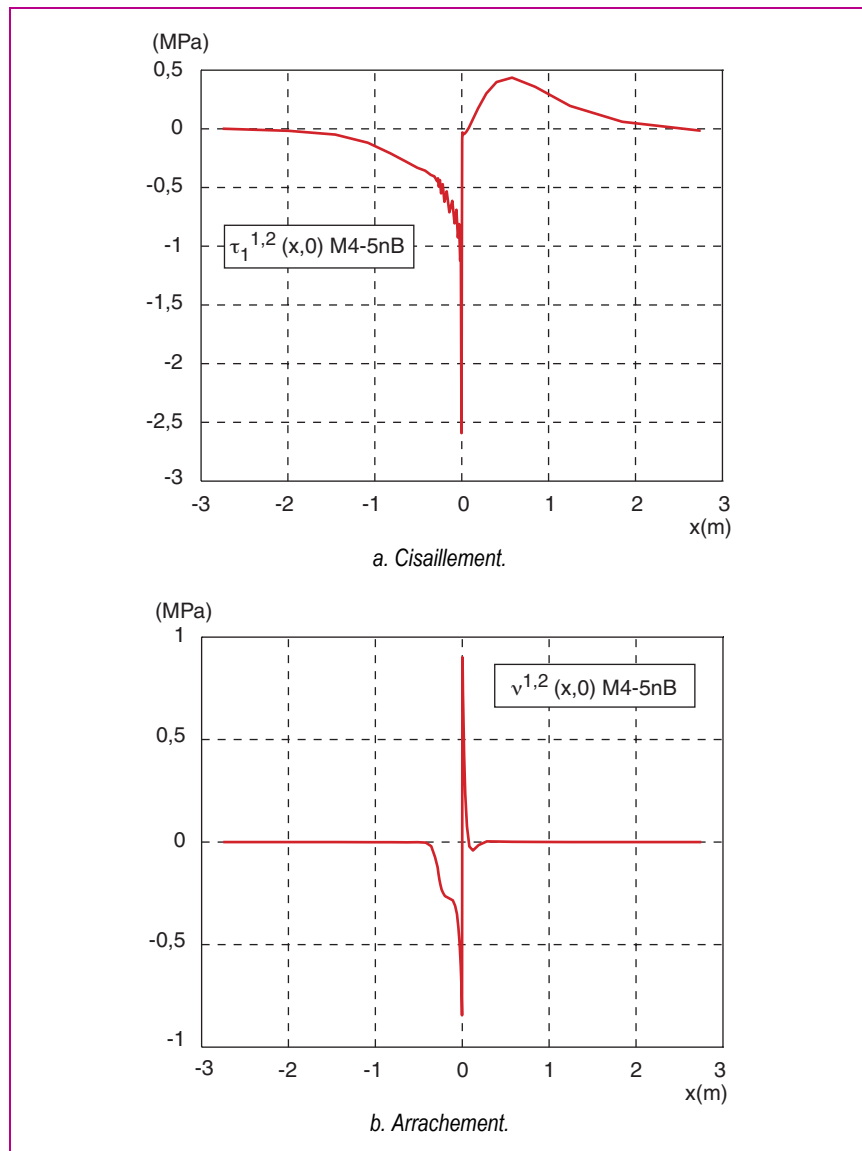
Parmi les différents essais mis au point, l'essai de fatigue accéléré linéaire FABAC sur plate-forme réelle a été mené jusqu'en fin 2003 sur le site de Nantes du LCPC. Le détail de l'instrumentation et des résultats d'auscultation non destructive COLIBRI obtenus sur les différentes planches d'essais est donné dans [Pouteau et al., 2005]. En complément, l'analyse des champs de contraintes par les calculs M4-Boussinesq dans le cas de la première couche fissurée peut apporter des éléments d'interprétation des différents résultats.

On présente ci-après, à titre indicatif, une première approximation élastique de ces résultats à l'aide du modèle M4-5nB programmé, dans sa version recherche, sous l'outil Matlab [Tran, 2004 ; Guillo, 2004], dans le cas où les bords sont bloqués [Chabot et al., 2004]. Dans ce cadre, dans le plan $y = 0$, à l'interface « Blanc/Noir » de la chaussée composite en BCMC (béton de ciment mince collé), lorsque la charge est placée au bord de la fissure, on illustre les contraintes d'arrachement et de cisaillement du calcul M4-5n-B (Fig. 8). La charge est considérée rectangulaire ($a = 0,14$ m et $b = 0,09$ m) de pression $q = 0,645$ MPa. La chaussée est considérée comme constituée de deux couches élastiques de largeur 1,95 m (béton de ciment de classe 5 : $e_1 = 0,08$ m, $E_1 = 36\,500$ MPa, $\nu_1 = 0,25$; enrobé bitumineux de type GB3 : $e_2 = 0,095$ m, $E_2 = 8\,485$ MPa et $\nu_2 = 0,35$) reposant sur le massif de sol (infini dans le plan) de type PF3 : $E_s = 120$ MPa et $\nu_s = 0,35$. La fissure suivant l'épaisseur totale de la couche de béton de ciment a une ouverture de 0,005 m qui correspond au sciage du joint dans le sens transversal.

Le maillage plan du M4-5nB contient 30×20 mailles.

Dans cette position de charge, au bord de la fissure (fissure centrée en zéro sur les figures 8a et 8b), on note que la chaussée est sollicitée en mode mixte. Ce résultat justifie l'essai de laboratoire de rupture en flexion alternée sur éprouvette bimatériaux mis au point dans les travaux de Pouteau [2004]. On note ainsi un cisaillement d'interface important sur les bords de la charge accentué par la présence de la fissure. De plus, l'effort d'arrachement d'interface est fortement négatif sous la charge. Il est non négligeable en traction du côté non chargé. Bien entendu, ces résultats méritent d'être approfondis dans le cas des conditions réelles de l'expérimentation (bords libres suivant l'axe des y ; prise en compte des effets de gradient thermique dans la couche en béton de ciment mince collé, de la répartition réelle du contact pneu/chaussée ; comparaison avec des mesures issues de l'instrumentation ; analyse des effets viscoélastiques de la grave-bitume, de décollement à l'interface entre couches, etc.). Cela fait l'objet de nouveaux travaux de recherche au LCPC.

□ **Figure 8**
Efforts d'interface du M4-5nB en
 $y = 0$ le long de l'interface
« Blanc/Noir » (cas première
couche fissurée).



CONCLUSIONS

Un modèle de chaussée fissurée simplifié, le M4-5nB (modèle multiparticulaire des matériaux multicouches à 5n (n : nombre total de couches de chaussée) équations d'équilibre reposant sur un massif sol de Boussinesq) est proposé comme noyau de calcul d'un logiciel de diagnostic et d'entretien des chaussées usagées. Le problème de structure de chaussée réel 3D se réduit alors à la détermination de cinq champs cinématiques plan par couche de chaussée et de trois champs statiques à l'interface entre la chaussée et le sol, transformant ainsi l'objet réel 3D en un objet de géométrie 2D. Autrement dit, l'écriture du problème 3D initial est réduite à la résolution d'un problème 2D posé dans le plan constitué $5n + 3$ équations à $5n + 3$ champs plans inconnus. Pour résoudre l'ensemble des équations, la surface 2D résultante du modèle simplifié est discrétisée en plusieurs surfaces élémentaires. Pour intégrer les trois équations analytiques de Boussinesq, on considère que chacune des intégrales peut être évaluée par la somme des intégrales sur les surfaces élémentaires. Sur celles-ci, considérant que les efforts d'interface restent constants, ces équations s'intègrent analytiquement par changement de variable. Après intégrations des différentes conditions aux limites, les équations différentielles d'ordre 2 restantes sont résolues par un schéma aux différences finies. L'algorithme complet est ensuite programmé dans sa version recherche dans Matlab [Tran, 2004]. Ce modèle donne de très bonnes approximations des champs de contraintes nécessaires à étudier si l'on veut prévoir la rupture des structures de chaussées fissurées, avec des temps de calculs très inférieurs à ceux des calculs effectués par éléments finis.

Afin de réaliser un logiciel diffusable dans le réseau des Ponts et Chaussées et de diminuer encore les temps de calcul pour des applications d'analyse d'évolution des fissures, une programmation sous un environnement standard est en cours. Par ailleurs, pour accélérer encore plus l'obtention des solutions dans le cadre de calculs multicycles, une méthode d'extrapolation des résultats du 2D pour estimer le 3D a été proposée. Cette méthode consiste, à partir des variables a-dimensionnelles du problème réel 3D, pour une plage de matériaux et d'épaisseurs de couche données, à lister les résultats 3D dans des tableaux ou grilles des valeurs des champs que l'on souhaite obtenir [Tran et al., 2004]. Dans le cas du bicouche 3D fissuré, on espère ainsi obtenir un gain de 100 (au lieu de 10 actuellement) par rapport à une analyse fine par éléments finis 3D.

Enfin, dans les exemples proposés, on a considéré que les couches de chaussées étaient collées entre elles et avec le sol. On a considéré aussi que la chaussée n'était soumise, ni à des gradients de température, ni à des phénomènes de retrait thermique. Le modèle décrit et proposé dans la thèse de Tran [2004] autorise l'écriture de décollements. Les chargements thermiques et les phénomènes de retrait thermique ont été intégrés et validés par rapport à des calculs par éléments finis. Des recherches sont en cours pour utiliser ces résultats et développer des critères d'initiation et de propagation de fissures dans les chaussées.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BATZ-VILLARD, *Influence des défauts de liaison sur le dimensionnement et le comportement des chaussées*, Thèse de doctorat spécialité génie civil, Université de Nantes, 1991, 201 pages.

BODIN D., PIJAUDIER-CABOT G., DE LA ROCHE C., PIAU J.-M., CHABOT A., A continuum Damage Approach to Asphalt Concrete Modelling, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, **130** (6), 2004, pp. 700-708.

BURMISTER D.M., The theory of the stress and displacements in layered systems and applications of design of airport runway, *Proceeding of the Highway Research Board*, **23**, 1943, pp. 126-148.

CARON J. F., DIAZ DIAZ A., CARREIRA R. P., CHABOT A., EHRLACHER A., Multiparticulate modeling for the prediction of delamination in multilayer, *Composites Sciences and Technology*, à paraître, 2005.

CARREIRA R. P., CARON J.-F., DIAZ DIAZ A., Model of multilayered materials for interface stresses estimation and validation by finite element calculations, *Mechanics of Material*, **34**, 2002, pp. 217-230.

CHABOT A., *Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de Modélisations Multiparticulaires des Matériaux Multicouches (M4)*, Thèse de doctorat spécialité structures et matériaux, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1997, 177 pages.

CHABOT A., EHRLACHER A., Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches M4_5n et M4_(2n+1)M pour l'étude des effets de bord, *Comptes-rendus aux 11^e Journées Nationales sur les Composites (JNC11)*, **3**, Arcachon, novembre 1998, pp. 1389-1397.

CHABOT A., CANTOURNET S., EHRLACHER A., Analyse de taux de restitution d'énergie par un modèle simplifié pour un quadricouche en traction fissuré à l'interface entre deux couches, *Comptes-rendus aux 12^e Journées Nationales sur les Composites (JNC12)*, **2**, ENS de Cachan, novembre 2000, pp. 775-784.

CHABOT A., TRAN Q.D., POUTEAU B., Simplified modelling of a cracked composite pavement, *First International Elsevier Conference on Failure Analysis*, Lisbonne, juillet 2004.

De LARRARD F., POUTEAU B., CHABOT A., CLÉMENT J.-L., BALAY J.-M., Chaussées composites et nouvelles applications du ciment dans la route, *TPTech*, Paris, mars 2001.

De LURDES ANTUNES M., Conclusions from COST 333 and Amadeus European projects : improvements to analytical pavement design models, *BCRA'02 workshop on modelling of flexible pavements*, Lisbonne, juin 2002.

DUHAMEL D., NGUYEN V.H., CHABOT A., TAMAGNY P., Modelling of multilayer viscoelastic road structures under moving loads, *9th Int. Conf. on Civil and Structural Engineering Computing*, Amsterdam, septembre 2003.

DUHAMEL D., CHABOT A., TAMAGNY P., HARFOUCHE L., ViscoRoute : Modélisation des chaussées bitumineuses, *Bulletin des laboratoires des Ponts et Chaussées*, **258-259**, octobre-novembre-décembre 2005.

FLORENCE C., FORET G., TAMAGNY P., SENER J.-Y., EHRLACHER A., Experimental evaluation of reflexive cracking resistance in grid reinforced asphalt overlay, *Proceedings of the 5th Int. RILEM conf. Cracking in Pavements*, Limoges, mai 2004.

GUILLO C. 2004, Validations par éléments finis d'un modèle simplifié pour l'étude de décollement à l'interface d'un multicouche de chaussée, Stage de DESS, Université de Nantes, 2004, 52 pages.

JOHNSON K. L., *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, 1992.

LCPC-SETRA, *Conception et dimensionnement des structures de chaussée*, Guide Technique LCPC-SETRA, 1994.

LEGUILLON D., SANCHEZ-PALENCIA E., Méthodes numériques appliquées à la mécanique, Une méthode numérique pour l'étude des singularités de bord dans les composites, *CR Acad. Sc.*, **301** (Série II, N° 18), 1985.

NEWMARK N.M., A method of computation for structural dynamics, *ASCE J. of the Engineering Mechanics Division*, **85**, 1959, pp. 67-94.

- PAGANO N. J., Stress fields in Composite Laminates, *Int. J. Solids Structures*, **14**, **1978**, pp. 385-400.
- POUTEAU B., CHABOT A., De LARRARD F., 2002, Étude en laboratoire du collage béton/ matériaux bitumineux, *Matériaux 2002*, Tours, **2002**.
- POUTEAU B., *Durabilité mécanique du collage blanc sur noir dans les chaussées*, Thèse de doctorat spécialité génie civil, École Centrale de Nantes, **2004**, 213 pages.
- POUTEAU B., BALAY J.-M., CHABOT A., De LARRARD F., Fatigue test and mechanical study of adhesion between concrete and asphalt, *9th Int. Symp. on Concrete Roads*, Istanbul, **2004**.
- POUTEAU B., CHABOT A., BALAY J.-M., De LARRARD F., Essai accéléré de durabilité du collage blanc sur noir dans une chaussée composite, *17^e Congrès Français de Mécanique*, Troyes, **2005**.
- REISSNER E., On a Variational Theorem in Elasticity, *J. Math. Phys.*, **29**, **1950**, pp. 90-95.
- ROMANOSCHI S. A., LI Y., Experimental characterization and modeling of fatigue and crack propagation in asphalt concrete layers, *BCRA'02 workshop on modelling of flexible pavements*, Lisbonne, juin **2002**.
- TRAN Q.D., *Utilisation des modèles multiparticulaires pour l'analyse des champs de contraintes dans une chaussée élastique*, Rapport de DEA, Université Paris VI, **2001**, 30 pages.
- TRAN Q. D., CHABOT A., EHRLACHER A., TAMAGNY P., A simplified modelling for cracking in pavements, *Proceedings of the 5th Int. RILEM conf. Cracking in Pavements*, Limoges, mai **2004**.
- TRAN Q.D., *Modèle simplifié pour les chaussées fissurées multicouches*, Thèse de doctorat spécialité structures et matériaux, École Nationale des Ponts et Chaussées, **2004**, 154 pages.
- VANELSTRATE A., LEONARD D., VEYS J., Structural design of roads with steel reinforcing nettings, *Proceedings of the 4th Int. RILEM conf. Cracking in Pavements*, Ottawa, mars **2000**, pp. 57-67.